

地震動記録のフーリエ振幅に見る確率特性

佐藤 忠信¹

¹正会員 東南大学教授 城市工程科学技術研究院 (210096, 中華人民共和国南京市四牌路2)

E-mail:satodtnbseu@yahoo.co.jp

地震動のフーリエ振幅を円振動数に関する連続確率過程として捉え、その確率特性を抽出する。フーリエ振幅過程をその平滑化過程で割ったものを、標準化フーリエ振幅過程と名付け、それを考察の対象とする。差分間隔を変えて、標準化フーリエ振幅過程の差分を計算し、その標準偏差が離散円振動数間隔に1次比例することを明らかにする。標準化フーリエ振幅差分過程を標準偏差で正規化した確率変数は、差分間隔の取り方によらず単一の裾切レヴィ分布関数で表現できることを明らかにする。その結果から、フーリエ振幅過程が自己アフィン相似性を持つフラクタル過程であることを明示する。さらに、裾切レヴィ分布関数が安定分布群に属することを述べ、こうした確率特性を有するフーリエ振幅の模擬法を模索する。

Key Words : *Fourier amplitude, stochastic process, truncated Levy distribution, fractal process.*

1. まえがき

地震動のフーリエ位相を確率過程として、円振動数の関数として見ると、その関数形状が微視的に見た時と巨視的に見た時に同型性を保つという、フラクタル性を見出して以来¹⁾、その特性を抽出する努力^{2,3)}を続けてきた。これまでに見出された位相のフラクタル特性として、特筆しなければならないのは「位相過程は円振動数の連続関数として定義されるが、その差分過程の不連続性の形状が、確率的に見て、差分間隔の取り方によらず同型性を保たなければならない」という特性⁴⁾であった。地震動のフーリエ位相にフラクタル特性が見出されるという事実は、地震動のフーリエ振幅特性にもフラクタル特性が潜んでいる可能性がある。

本論文は、地震動のフーリエ振幅に潜むフラクタル性が確率的にみてどのような特性を有しているのかについて、考究することを目的としている。前提条件として、フーリエ振幅は円振動数に関する連続関数として定義されるものとする。この条件下では、微小円振動数間隔でフーリエ振幅差分を計算すると、それを足し合わせることで、差分間隔の異なる(離散円振動数間隔が異なる)フーリエ振幅差分が計算できることになる。その上で、差分間隔の異なるときのフーリエ振幅差分が有する確率特性に自己アフィン相似性が存在するかどうかを検証する。そのために、フーリエ振幅スペクトルを、円振動数に関する連続確率過程と見なすことにする。まず、フーリエ振幅の非定常性を抽出するために、Parzenウィンドウ⁵⁾を

用いてフーリエ振幅過程を平滑化する。その際、フーリエ振幅過程を計算する離散円振動数間隔の取り方により、平滑化過程が変動しないようにParzenウィンドウのウィンドウ幅を決定する。得られた平滑化フーリエ振幅過程で、フーリエ振幅過程を割ったものを標準化フーリエ振幅過程と名付け、その差分過程の確率特性が差分間隔(離散円振動数間隔)の取り方によりどのように変動するかを明らかにする。結果として、標準化フーリエ振幅過程の自己アフィン相似性を規定する確率分布特性が明らかにされる。

標準化フーリエ振幅の差分過程を規定する確率特性が正規分布では表現できず、裾切レヴィ分布関数(truncated Levy distribution function)⁶⁾でモデル化できることを見出し、その特性について考察を加える。

解析に用いる地震記録は加速度記録であり、1993年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測されたNS成分、1994年北海道東方沖地震の際に根室市弥栄で観測されたEW成分、1995年兵庫県南部地震の際に神戸気象台で観測されたNS成分である。その他に、1994年ノースリッジ地震の際にManhattan Beach観測点、1999年台湾集集地震の際にCHY034観測点、2004年9月5日紀伊半島沖地震の際に亀岡観測点で記録されたものも考察の対象とする。まず、釧路気象台の観測記録を用いて、解析法の基本的な内容を記述した後、その他の記録についても、同様な結果の得られることを示し、釧路記録で得られる地震動フーリエ振幅の確率特性が、地震動記録に見られる一般的特性であることを明らかにする。さらに、得られた確率

特性をモデル化するための方法論についても言及する。

2. フーリエ振幅特性について

本章では、1993年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された加速度記録のNS成分を対象にして、フーリエ振幅特性の基本的な性質を簡単に記述する。この記録は離散時間間隔 $dt = 0.02(s)$ で離散化された時系列であり、離散点個数15000として気象庁から公開されている。

(1) フーリエ振幅の基本的特性

地震記録の時間関数を $x(t)$ とし、そのフーリエ変換を $X(\omega)$ とすれば、以下のように表現される。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = R(\omega) + iI(\omega) \quad (1)$$

$$= A(\omega)\exp(i\phi(\omega))$$

ここに、 ω は円振動数、 $R(\omega)$ 、 $I(\omega)$ 、 $A(\omega)$ と $\phi(\omega)$ は ω の連続関数として定義されるフーリエ変換の実部、虚部、振幅と位相である。

これらの変数は円振動数の連続関数であるが、ここでは、なるべく微小な離散円振動数間隔 $d\omega$ で有効円振動数を離散化したうえで、離散値として取り扱うことにする。離散時間間隔 dt で離散化されている時系列の後半にゼロ点を付加することによって、離散円振動数間隔は制御できる。ゼロ点を付加した時系列の離散点総数を $M = 2^m$ とし、時刻歴 $x(t)$ の離散化時間間隔を dt とすれば、離散円振動数間隔は $d\omega = 2\pi/dt/M$ となる。この場合、離散点の円振動数値は $\omega_i (i = 1, 2, \dots, M = 2^m)$ と表現できる。各離散円振動数点での離散化フーリエ振幅を次式のように定義する

$$A_i = A(\omega_i) \quad (2)$$

図-1は公開されている離散記録の後半にゼロを付加し、離散点総数を $M = 2^{26}$ とした上で、時系列(上図)とフーリエ振幅の主要部分(下図)を図示したものである。この場合には $d\omega = 100\pi/2^{26}$ 間隔でフーリエ振幅を描いている。提供されている離散点総数15000より少し多い2の整数乗である $2^{14} = 16384$ を基準として、 $M = 2^m (m = 14, 16, 18, 26)$ の場合に対して、離散フーリエ変換により求められたフーリエ振幅の一部を比較したのが図-2である。図には円振動数の範囲[6.6: 7.0]における離散フーリエ振幅値が描画されており、 $m = 14, 16, 18$ の順に赤太口、緑太口、青△の点列で、 $m = 26$ の場合が細実線で描かれている。いずれの点も細実線の上に載っていることが分かる。 M の値を大きくすれば、離散フーリエ変換によって求められるフーリエ振幅は円振動数の連続関数に漸近するので、 $m = 26$ の場合を連続フーリエ振幅を直接離散化したものとすれば、 $14 \leq m \leq 26$

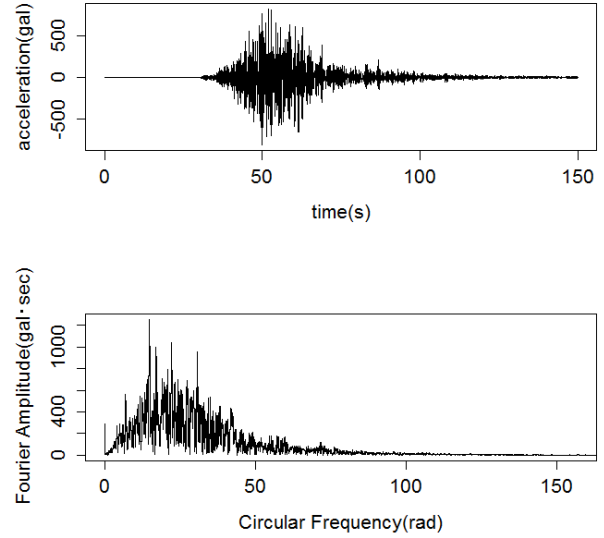


図-1 1993年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された加速度記録のNS成分の時刻歴(上図)とフーリエ振幅の主要部分(下図)。離散時間間隔が $0.02(s)$ であるので、有効振動数は $25Hz$ である。フーリエ振幅は、提供されている時刻歴の後半部にゼロ点を追加し、離散点総数を $M = 2^{26}$ とし、離散円振動数間隔を $d\omega = 100\pi/2^{26}(rad.)$ とした場合のものである。

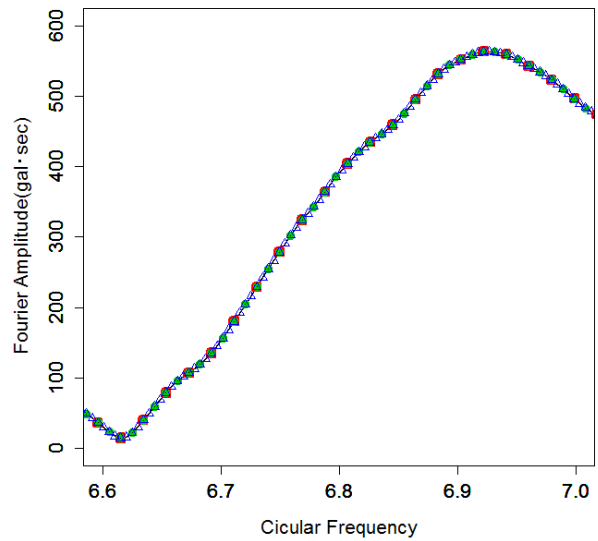


図-2 フーリエ振幅の拡大描画。フーリエ振幅を計算する離散円振動数を $\Delta\omega = 100\pi/2^m(rad.)$ とし、 $m = 26$ の場合を細実線で $m = 14, 16, 18$ の場合を赤太口、緑太口、青△で描画している。各々の点が細実線の上に載っている。

の範囲では、離散フーリエ変換によって求められる離散フーリエ振幅の値は全てが連続フーリエ振幅の曲線上に乗っていると考えることができる。したがって、十分大きな m の値に対して、フーリエ振幅を計算しておけば、このフーリエ振幅データから、小さな m の値に対するフ

ーリエ振幅を抽出して良いことになる。この結果は釧路記録のみならず、解析の後半で用いる、加速度記録のフーリエ振幅についても同様に成立している。

地震動記録のフーリエ振幅は振動数ゼロ近傍ではほぼゼロに近く、振動数が増加するにつれて次第に大きくなり、変動を繰り返しながら、高振動数領域では次第に振幅を減じてゼロに収束するという特性を有している。したがって、地震動のフーリエ振幅は振動数に関して非定常な特性を有していることになる。こうした、フーリエ振幅全体の確率特性を直接抽出することになると、ゼロ近傍のフーリエ振幅データが多量に存在し、フーリエ振幅全体の確率特性が把握しづらくなる。そこで、図-1の上段に示したフーリエ振幅過程の平滑化過程 $g(\omega)$ を算出し、その離散過程 $\{g_i = g(\omega_i)\}$ を用い、フーリエ振幅過程 $\{A_i\} = \{A(\omega_i)\}$ を次式のように標準化した過程 $\{B_i\}$ を定義する。

$$B_i = \frac{A_i}{g_i} \quad (3)$$

平滑化過程 $\{g_i\}$ を求めるには、バンド幅 b のParzenウィンドウを用いる。何度か試行を行って、付録式(a6)で定義されているParzenウィンドウのバンド幅を $b = 0.6\text{Hz}$ と決定した後、求められた平滑化過程 $\{g_i\}$ が図-3上段のフーリエ振幅過程中に太赤点線で書きされている。平滑化過程を求めるには、離散点総数を 2^{26} とした $\{A_i\}$ 過程をフーリエ変換し、Parzenウィンドウの後半にゼロ点を付加し、離散点総数を 2^{26} としたものをフーリエ変換し、両者を乗じた上で、フーリエ逆変換した。なお、Parzenウィンドウを用いた関数の平滑化法の詳細は付録Aに記述した。式(3)で定義した $\{B_i\}$ 過程は図-3下段に描画した。

平滑化過程 $\{g_i\}$ の計算当たっては、バンド幅 b をどの程度に選択すればよいかが問題になる。ここでは、離散点総数 $M = 2^m (m = 14, 15, \dots, 25)$ の全てについて、フーリエ変換により直接フーリエ振幅過程を計算し、それらの平滑過程が、全てほぼ同一の曲線で表現できるようにバンド幅 b を調整し、最終的に 0.6Hz を設定した。図-4に上述の離散点総数 M の全てに対する平滑化過程が上書きされている。図中には、 m の増加に対応して、赤実線・緑破線・青点線・水一点破線・紫破線・黄一点鎖線・灰実線・黒破線・赤点線・緑一点破線・青破線・水一点鎖線の12本の曲線が描画されているが、その全てがほぼ一致しているので見分けがつかず、最後の2種類の曲線の色の違いが識別できるだけである。図-1で見たフーリエ振幅の特性とこのフーリエ振幅の平滑化曲線の特性から、 $M = 2^{26}$ になるような微小な離散円振動数間隔 $d\omega = 100\pi/2^{26}$ で標準化フーリエ振幅を計算しておけば、式(3)で定義される、 $M = 2^m (m = 14, 15, \dots, 25)$ に対する標準化フーリエ振幅過程は、 $M = 2^{26}$ で計算され

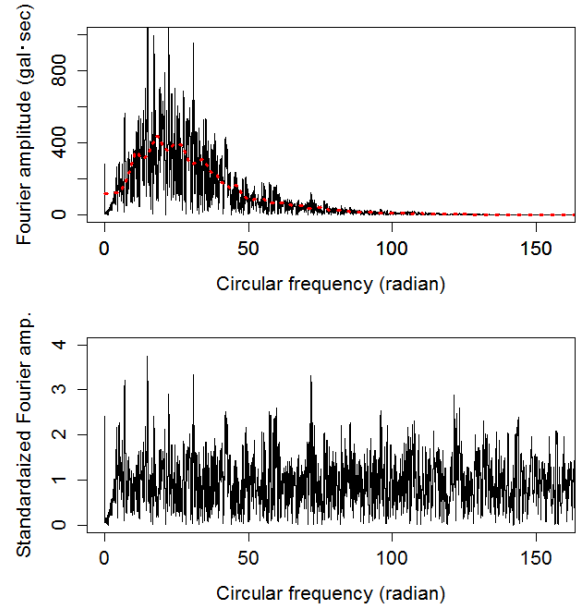


図-3 フーリエ振幅過程のParzenウィンドウを用いた平滑化と、平滑化過程を用いたフーリエ振幅過程の標準化。上段：フーリエ振幅過程(黒細実線)とその平滑化過程(太赤点線)，下段：式(3)で定義した標準化フーリエ振幅過程，フーリエ振幅過程をその平滑化過程で割ったもの。 $d\omega = 100\pi/2^{26}$ 間隔でフーリエ振幅過程ならびにその標準化過程を描画。

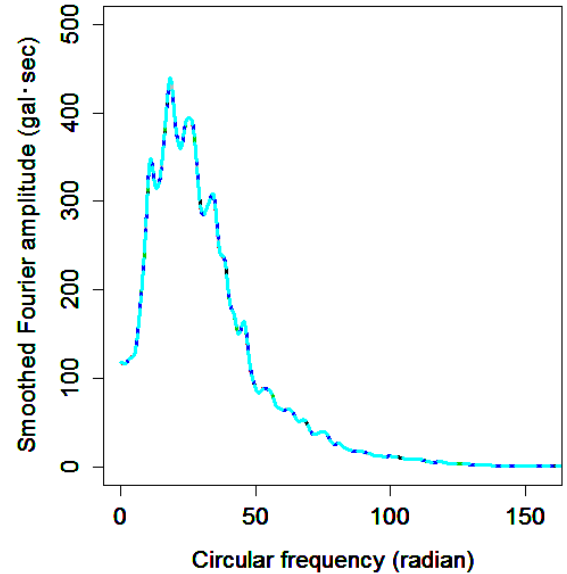


図-4 離散点15000の時系列として提供されている釧路記録の後半にゼロ点を付け加え、離散点総数を $M = 2^m (m = 14, 15, \dots, 25)$ とした時のフーリエ振幅過程をバンド幅 0.6Hz のParzenウィンドウで平滑化した過程。図中には、 m の増加に対応して、赤実線・緑破線・青点線・水一点破線・紫破線・黄一点鎖線・灰実線・黒破線・赤点線・緑一点破線・青破線・水一点鎖線の12本の曲線が描画されているが、その全てがほぼ一致しているので見分けがつかない。最後の2種類の曲線の色の違いが識別できるだけである。

た標準化フーリエ振幅過程の上ののっていると考えることが出来る。

(2) 標準化フーリエ振幅差分の確率特性

以上の事実を前提にした上で、離散円振動数間隔 $\Delta\omega$ で離散化されている円振動数 ω_i と $\omega_i + \Delta\omega$ 間の、標準化フーリエ振幅特性 $B(\omega)$ の差分 ΔB_i を次式で定義する。

$$\begin{aligned}\Delta B_i(\Delta\omega) &= \Delta B(\omega_i, \Delta\omega) \\ &= B(\omega_i + \Delta\omega) - B(\omega_i)\end{aligned}\quad (4)$$

標準化フーリエ振幅差分 ΔB_i の確率特性が差分間隔 $\Delta\omega$ の取り方により、どのように変化するかを明らかにするのがこの節の目的であるので、離散円振動数間隔 $\Delta\omega$ を次式で定義することにする。

$$\Delta\omega = K \cdot d\omega \quad (K = 2^k, k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

式(4)と(5)を考慮すれば、標準化フーリエ振幅差分は次式のように定義できる

$$\Delta B_i(\Delta\omega) = B_{i+K} - B_i \quad (6)$$

以下の解析では、 $\Delta\omega$ を変動させ、 $\Delta B_i(\Delta\omega)$ の確率特性を抽出するが、 $K = 1(k = 0)$ のときの $\Delta B(\Delta\omega)$ を dB_i と表し、それ以外の場合を $\Delta B_i(\Delta\omega) = \Delta B_i$ と表すことにする。

したがって、 $d\omega = 100\pi/2^{26}$ 間隔で計算された標準化フーリエ振幅差分列を $\{dB_i\}$ ($i = 1, 12, \dots, M$)とすれば、式(6)で定義されていた $\Delta\omega$ 間隔でのフーリエ振幅差分 $\Delta B_i(\Delta\omega)$ は、データの重複を許さない場合には、次式で求めることができる。

$$\Delta B_i = \sum_{l=1}^K dB_{K(i-1)+l} \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{M}{K}\right) \quad (7)$$

式(7)で振幅差分を計算する場合には、 K の値が大きくなると、有効な振幅差分のデータ個数が極端に少なくなり、解析精度が保障できなくなる場合がある。そこで、データの重複を許して、振幅差分を計算することを考えると、その場合には、振幅差分を次式で与えることができる。

$$\Delta B_i = \sum_{l=1}^K dB_{i+l} \quad (i = 1, 2, \dots, M - K) \quad (8)$$

以下では、式(8)を用いて標準化フーリエ振幅差分過程 $\{\Delta B_i\}$ を計算し、それを確率過程として、その確率特性を抽出する。

まず、 $\{\Delta B_i\}$ の分散を次式で定義し、

$$\sigma_{\Delta B}^2(\Delta\omega) = \frac{1}{M-K} \sum_{i=1}^{M-K} \Delta B_i^2(\Delta\omega) \quad (9)$$

$d\omega = 100\pi/2^{26}$ として、 $\Delta\omega$ が式(5)で定義されるとき $\sigma_{\Delta B}^2$ と $\Delta\omega$ の関係を示したのが、図-5である。底10の両対数で表示している。図中の赤太丸が、式(5)で $k = 0, 1, 2, \dots, 14$ とした時の $(\log_{10}(\Delta\omega), \log_{10}(\sigma_{\Delta B}^2))$ 値であり、左から順に k の増加に対応している。図中の赤細実線は $k = 0, 1, 2, \dots, 11$ のデータに基づいた回帰直線である。

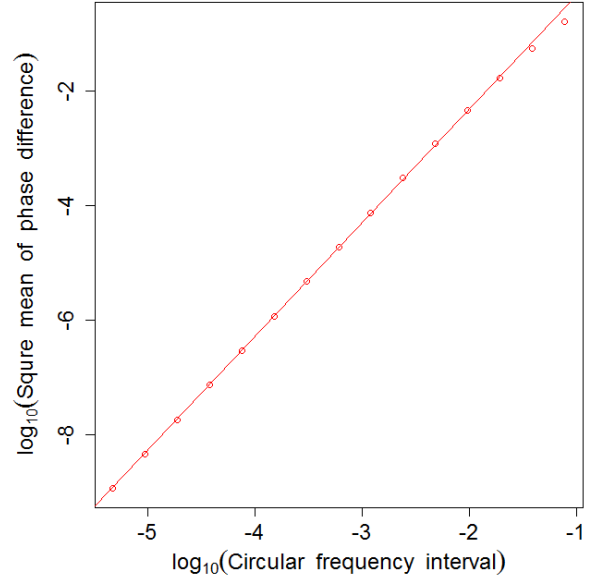


図-5 標準化フーリエ振幅差分の分散値 $\sigma_{\Delta B}^2(\Delta\omega)$ と $\Delta\omega$ の関係図。赤○印が $d\omega = 100\pi/2^{26}$ として $\Delta\omega = 2^k \cdot d\omega$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 14$)とした時の分散値の値。底10の両対数で表示。図中の赤細実線は、 $k = 0, 1, 2, \dots, 11$ のデータを用いた直線回帰で $\sigma_{\Delta B}^2(\Delta\omega) = \sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H}$ の関係を示している。直線近似の結果は $H = 0.9994 \cong 1$ で $\sigma_0 = 7,172$ となった。

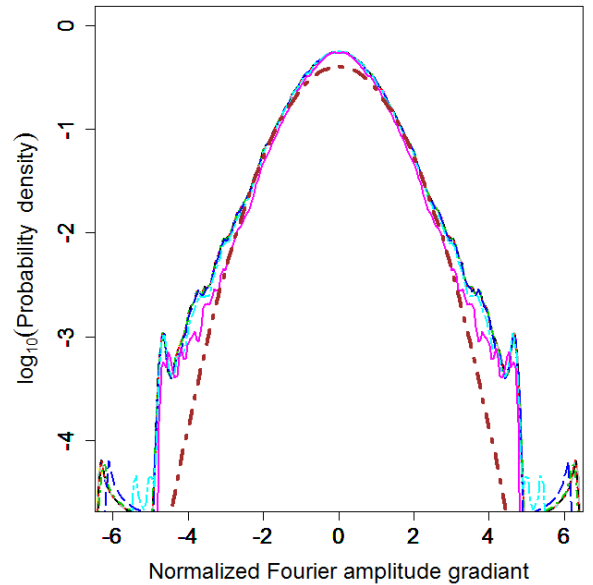


図-6 式(11)で対議される $\{Z_i\}$ の確率分布特性。 $d\omega = 100\pi/2^{26}$ 間隔で計算された標準化フーリエ振幅過程から、差分過程 $\{\Delta B_i\}$ を $\Delta\omega = 2^k \cdot d\omega$ ($k = 0, 1, \dots, 11$)に対して求め、それを式(10)で定義される標準偏差 $\sigma_0(\Delta\omega)^H$ ($H = 1$)で除した確率過程 $\{\Delta B_i/(\sigma_0(\Delta\omega))\}$ の確率密度関数が描かれている。図中には k の増加に対応して、赤実線・緑破線・青点線・水一点破線・紫破線・黄一点鎖線・灰実線・黒破線・赤点線・緑一点破線・青破線・水一点鎖線の12本の曲線が描画され、全てがほぼ一致している。

図から明かなよう標準化フーリエ振幅差分の分散は離散円振動数間隔のベキ乗関数として、次式のように表現できる。

$$\sigma_{\Delta B}^2(\Delta\omega) = \sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H} \quad (10)$$

釧路地震記録の場合に、ベキ則を規定する係数 σ_0^2 や H の値は、図-5の説明文中に与えられている。特に強調しておきたいのは、現象のフラクタル特性⁷⁾を規定するパラメータであるハースト指数⁸⁾の値がほぼ1となっていることである。そこで、 ΔB_i を $\sigma_0\Delta\omega$ で正規化した、次式のように定義される確率変数を考える。

$$Z_i = \frac{\Delta B_i}{\sigma_0\Delta\omega} \quad (11)$$

確率過程 $\{Z_i\}$ を求め、その確率密度関数をヒストグラムとして推定し、それをカーネル法により近似⁹⁾した関数値として描画する。図-6に結果が示されている。図の説明文に記したように、 k の値に対応した12本の各種曲線が描かれているが、ほぼ重なっており、この結果は $\{Z_i\}$ 過程が離散円振動数間隔によらず、ほぼ同一の確率密度関数で表現できることを意味している。今この確率密度関数を $p(Z_i)$ とすれば、 Z_i は正規化変数であるから、 $p(Z_i)$ は正規化された確率密度関数になっている。このことを考慮すると、次式が成立する。

$$Z_i = \frac{\Delta B_i}{\sigma_0\Delta\omega} = \frac{dB_i}{\sigma_0 d\omega} \sim p(Z_i) \quad (12)$$

ここに、 $\sim$ は確率密度関数の等号性を表す記号であり、この式の意味するところは、標準化フーリエ振幅差分の確率過程としての変動特性が確率的に見て離散円振動数間隔によらず同形であることを意味しており、標準化フーリエ振幅差分過程が自己アフィン相似性を有するフラクタル過程であることの根拠を与えている。なお、 $\Delta B_i/\Delta\omega$ は標準化フーリエ振幅勾配に相当するものであるので、 $\Delta B_i/\Delta\omega$ が確率的に見て有限値に収まるのかどうかは、ひとえに確率密度関数 $p(Z_i)$ の特性に依存している。もし、 $p(Z_i)$ が有限の分散値を有するような確率特性を有しておれば、 $\Delta B_i/\Delta\omega$ は確率的に見て有限値に収まるが、もし分散が定義できない確率密度関数なら $\Delta B_i/\Delta\omega$ は確率的に見て発散するので、標準化フーリエ振幅過程は確率的に見て微分不可能な確率過程になる。

なお、図中には、標準正規分布の確率密度曲線が褐色太一点鎖線で記入されている。釧路記録の場合には、裾野の部分の乱れた部分を除いて、確率過程 $\{Z_i\}$ の確率密度関数はほぼ標準正規分布で近似することが可能に見える。

(3) 異なる地震記録に対する標準化フーリエ振幅差分の確率分布特性

式(11)のように正規化した標準化フーリエ振幅差分が、釧路記録以外の地震動記録に対して、どのような確率分

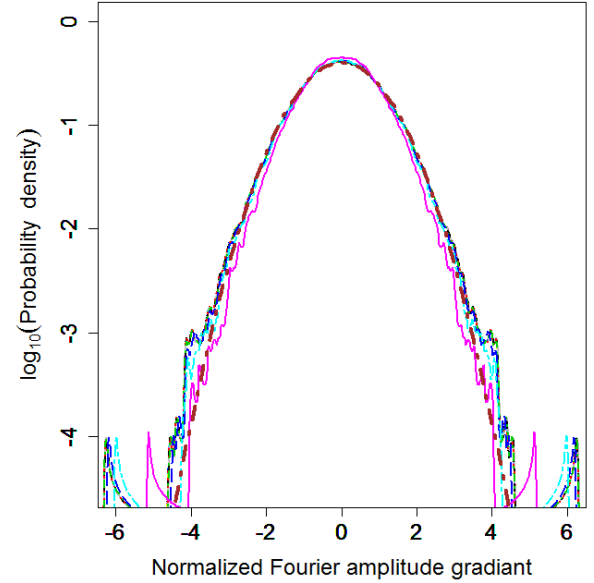


図-7 寿都記録から求まる、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数。 $k = 0, 1, \dots, 12$ に対する13本の曲線が描かれている。図-6の説明文に現れる曲線群以外に、紫色の実線が付け加えられている。いずれの場合もほぼ標準正規分布(褐色太一点鎖線)で表現できるようである。 k の値として11までの分散値で決定した式(10)の回帰曲線の係数は、 $H = 0.9991 \cong 1$ で $\sigma_0 = 13,947$ である。 k の値大きくすると、図-5と同じように求まる回帰直線からの○印のずれが下方に大きくなるので、式(11)で定義した $\{Z_i\}$ の確率密度分布は、図の色付きの曲線群からは大きくずれる。

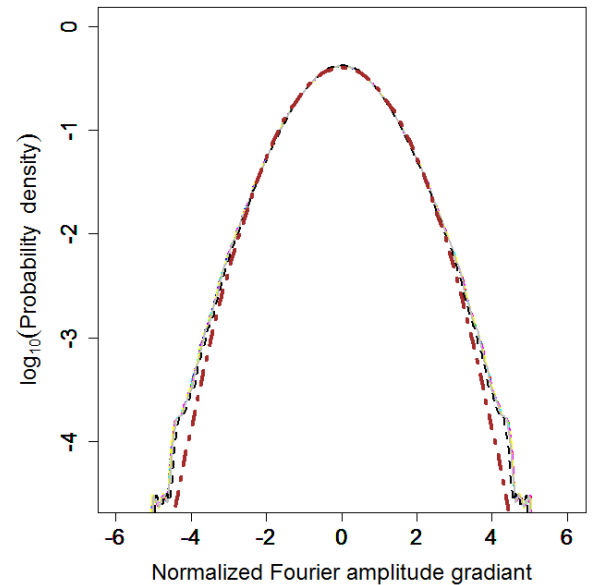


図-8 根室記録から求まる、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数。 $k = 0, 1, \dots, 8$ に対する9本の曲線が描かれている。いずれの曲線群も標準正規分布(褐色太一点鎖線)とおぼ一致しており、この記録の正規化フーリエ振幅勾配の確率特性が正規分布で表現できることがわかる。式(10)に基づく回帰曲線の係数は、 $H = 0.9905 \cong 1$ で $\sigma_0 = 32,968$ である。

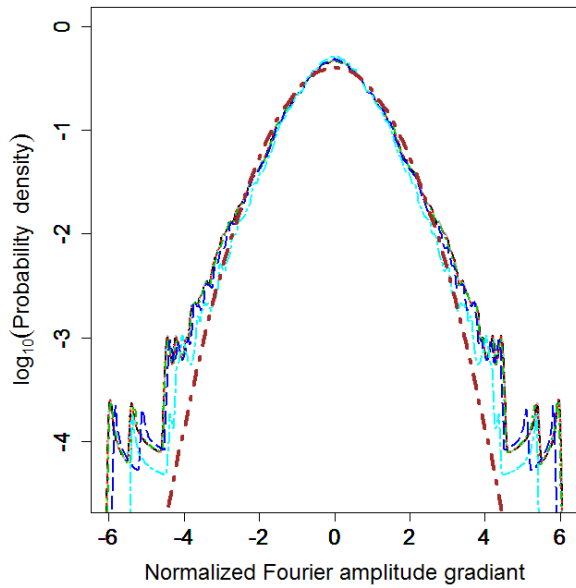


図-9 ノースリッジ地震の際に、マンハッタンビーチで記録された加速度記録を用いて、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数. $k = 0, 1, \dots, 12$ に対する13本の曲線群が描かれている. いずれの曲線群もほぼ一致しているが、それらが標準正規分布(褐色太一点鎖線)と一致しているとは言い難い. 式(10)に基づく回帰曲線の係数は、 $H = 0.9999 \cong 1$ で $\sigma_0 = 5.1533$ である.

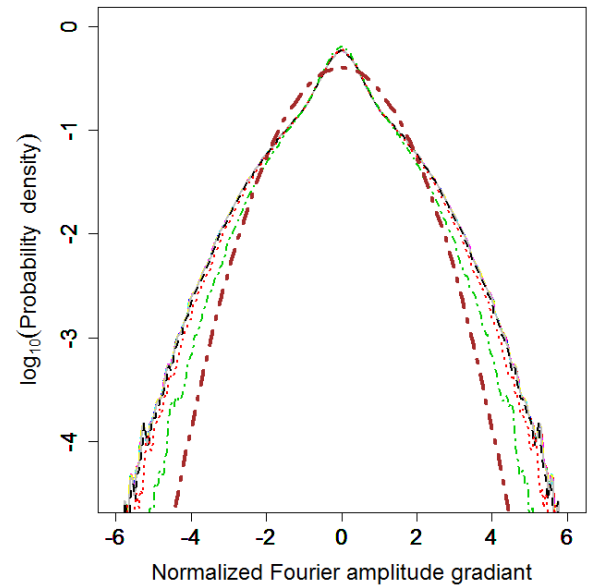


図-11 台湾集集地震の際にCHY034観測点で記録された加速度記録を用いて、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数. $k = 0, 1, \dots, 10$ に対する11本の曲線群が描かれている. 最初の10本まではほぼ一本の同一曲線状に乗っているが、11本目の曲線は内側へ縮小している. 確率密度関数は標準正規分布では表現しきれないこと、特に原点近傍での特性が特徴的である. 式(10)に基づく回帰曲線の係数は、 $H = 0.9984 \cong 1$ で $\sigma_0 = 31.749$ である.

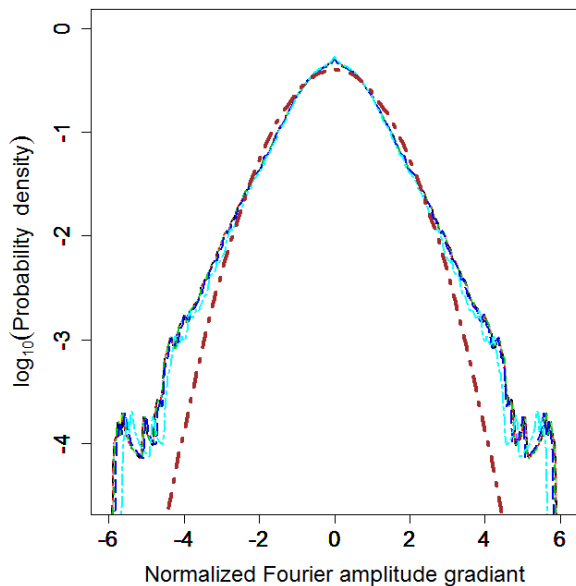


図-10 神戸記録から、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数. $k = 0, 1, \dots, 12$ に対する13本の曲線群が描かれている. いずれの曲線群もほぼ一致しているが、それらが標準正規分布(褐色太一点鎖線)と一致しているとは言い難い. 式(10)に基づく回帰曲線の係数は、 $H = 0.9997 \cong 1$ で $\sigma_0 = 5.5718$ である.

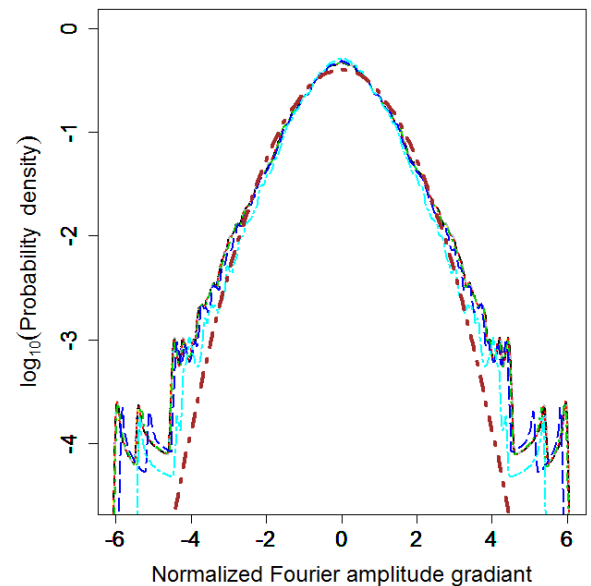


図-12 紀伊半島沖地震の際に亀岡観測点で記録された加速度記録から、式(11)で定義される $\{Z_i\}$ の確率密度関数 $k = 0, 1, \dots, 12$ に対する13本の曲線群が描かれている. いずれの曲線群もほぼ一致しているが、それらが標準正規分布(褐色太一点鎖線)と一致しているとは言い難い. 式(10)に基づく回帰曲線の係数は、 $H = 0.9983 \cong 1$ で $\sigma_0 = 15.1780$ である.

布特性を示すかを明確にするために、1993年北海道南西沖地震(M=7.8)の際に寿都町新栄で観測されたEW成分の加速度記録(離散時間間隔0.02秒)、1994年北海道東方沖地震(M=8.2)の際に根室市弥栄で観測されたEW成分の加速度記録(離散時間間隔0.02秒)、1994年ノースリッジ地震(M=6.69)の際にManhattan Beach観測点で観測された加速度記録(離散時間間隔0.01秒)、1995年兵庫県南部地震(M=7.3)の際に神戸気象台で観測されたNS成分の加速度記録(離散時間間隔0.02秒)、1999年台湾集集地震(M=7.62)の際にCHY034観測点で観測された加速度記録(離散時間間隔0.04秒)、2004年9月5日紀伊半島沖地震(M=7.4)の際に亀岡観測点で観測された加速度記録(離散時間間隔0.01秒)に対して、同様な解析を行った。上記の地震記録の順に結果が図-7～12に示されている。いずれの図も、離散時間間隔 dt の観測記録として提供されている離散時系列の後半にゼロ点を足し込んで、離散点総数を 2^{26} とし、微小円振動数間隔を $d\omega = 2\pi/(dt \cdot 2^{26})$ とした上で、フーリエ振幅を計算し、それを基にして、離散円振動数間隔 $\Delta\omega = K \cdot d\omega$ ($K = 2^k, k = 0, 1, 2, \dots$)で計算した標準化フーリエ振幅差分を、式(11)のように正規化した確率過程 $\{Z_i\}$ を求め、その確率密度関数を図示したものである。各図には $k = 0, 1, 2, \dots$ の値に対する、 $\{Z_i\}$ の確率密度関数が色付きの各種曲線描かれているが、 k の値が有る程度の大きさまでは、いずれの曲線もほぼ一致しており、式(11)のように正規化された標準化フーリエ振幅差分の確率密度関数は離散円振動数間隔 $\Delta\omega$ に一次比例する、いわゆるジップ則¹⁰⁾の成立することが判明する。これは、位相差分の有しているフラクタル特性¹¹⁾と同じ性質のものである。また、全ての図中に、標準正規分布の確率密度関数を描画したが、式(11)のように正規化された標準化フーリエ振幅差分の確率密度関数は、正規分布では表現しきれない特性を有していることが分かる。

3. フーリエ振幅差分のモデル化について

(1) 正規化フーリエ振幅差分が正規分布の場合

図-6～12に示された正規化された標準化フーリエ振幅差分の確率密度関数が標準正規分布で近似できるとすれば、式(12)は次式のように表現できる。

$$\frac{\Delta B_i}{\sigma_0 \Delta\omega} = \frac{dB_i}{\sigma_0 d\omega} \sim N(0,1) \quad (13)$$

ここに、 $N(0,1)$ は標準正規確率密度関数である。

式(13)に基づいて標準化フーリエ振幅差分過程 $\{\Delta B_i\}$ を模擬するも最も簡便な方法は $N(0,1)$ から、独立同分布の仮定の基に無限個の乱数列 $\{\xi_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$)を生成

し、 ΔB_i を次式で与えることである。

$$\Delta B_i = \sigma_0 \Delta\omega \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (14)$$

しかし、この方法による $\{\Delta B_i\}$ の生成は不可能であることが、以下のようにして証明できる。

まず、微小な円振動数間隔 $d\omega$ のときの ΔB_i を dB_i とせば、式(14)と同様に、 dB_i は次式で表現できる

$$dB_i = \sigma_0 d\omega \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (15)$$

ここに、 $\{\eta_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$)は $N(0,1)$ から独立同分布で生成された正規乱数で $\{\xi_i\}$ とは独立のものと考えて良い。一方、式(5)から $\Delta\omega$ は $d\omega$ の K 倍であったことから ΔB_i は式(7)に示すように dB_i を K 個足し合わせて生成されるので、式(7)を満たす ΔB_i の分散を $\Sigma_{\Delta B}^2$ とし、 dB_i の分散を σ_{dB}^2 すれば、 dB_i の独立同分布性から、 $\Sigma_{\Delta B}^2$ は次式で与えられなければならない。

$$\Sigma_{\Delta B}^2 = K \cdot \sigma_{dB}^2 = K \sigma_0^2 (d\omega)^2 = \frac{1}{K} \sigma_0^2 (\Delta\omega)^2 \quad (16)$$

一方、式(14)は ΔB_i の分散が $\sigma_{\Delta B}^2 = \sigma_0^2 (\Delta\omega)^2$ で与えられることを意味しており、

$$\Sigma_{\Delta B}^2 \neq \sigma_0^2 (\Delta\omega)^2 = \sigma_{\Delta B}^2 \quad (17)$$

となり、 ΔB_i の発生に、独立同分布の仮定を適用すると、分散の計算に矛盾をきたすことになり、独立同分布の仮定の基では、式(13)を満たすように標準化フーリエ振幅増分を模擬できないことが分かる。これは、 ΔB_i と ΔB_j が $i \neq j$ のときに無相関にならないこと意味している。確率変数 ΔX の分散 $\sigma_{\Delta X}^2$ が次式のように、離散円振動数間隔 $\Delta\omega$ のベキ乗関数として、次式のように表現されるとき

$$\sigma_{\Delta X}^2 = \sigma_0^2 (\Delta\omega)^{2H} \quad (18)$$

の、最も単純な ΔX の確率密度関数は、次式のような正規分布で表現されるものである。

$$p(\Delta X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0\Delta\omega}} \exp\left(-\frac{(\Delta X)^2}{2\sigma_0^2(\Delta\omega)^{2H}}\right) \quad (19)$$

この場合には確率変数 X からなる確率過程は非整数ブラウン運動過程¹²⁾となり、 ΔX はその増分過程として定義される。したがって、 $\{\Delta B_i\}$ は、ハースト指数 H が $H = 1$ となるケースについて模擬すればよいことになる。問題は、 $H = 1$ となる場合には、非整数ブラウン運動過程の収束性が極端に悪くなることである。この問題点は、 $\{\Delta B_i\}$ の相関係数から求められる、相関減衰特性を考慮することによって解決できるが、その具体的な方法論については、別途論文としてまとめて発表することにする。

(2) 正規化フーリエ振幅差分が正規分布でない場合

図-6～12に示された正規化された標準化フーリエ振幅差分の確率密度関数には標準正規分布からの乖離が裾野部分で見られるので、その問題の解決法を模索することにする。問題は、図から分かるように、微小な離散円振動数間隔 $d\omega$ の下で計算された標準化フーリエ振幅差分過

程 $\{dB_i\}$ を足し込んで求められる円振動数間隔の大きな標準化フーリエ振幅差分過程 $\{\Delta B_i\}$ を正規化したものが、足し込数によらず同一の確率密度関数に収斂しているという性質である。さらにその収斂先が標準正規分ではないことである。こうした条件を満たす、確率分布族は安定分布族と言われるが、ここでは、こうした条件を満たす"切頭レヴィ分布関数⁽⁶⁾⁽¹³⁾(truncated Levy distribution function)"を用いて、正規化された標準化フーリエ振幅差分過程の確率密度関数を表現できるかどうかについて考察を加える。

平均値ゼロの確率変数 X に対する裾切レヴィ分布関数の陽な表現は与えられていないが、そのフーリエ変換形は次式で定義される⁽¹⁴⁾。

$$\varphi(t, \alpha, \gamma, c) = \exp \left\{ -\gamma^\alpha \frac{f(t, \alpha, c)}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right\} \quad (20)$$

$$f(t, \alpha, c) = (c^2 + t^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos \left(\alpha \tan^{-1} \left(\frac{|t|}{c} \right) \right) - c^\alpha$$

ここに、 α と γ はレヴィ分布を規定するパラメータであり、 c はレヴィ分布の裾野を切り取るパラメータであり、 c^{-1} の値が裾野を切り取る確率変数の指標値になる。この確率密度関数 $p(X, \alpha, \gamma, c)$ は式(19)のフーリエ逆変換として次式のように与えられる。

$$p(X, \alpha, \gamma, c) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \exp(iXt) dt \quad (21)$$

この分布関数を用いて、次式の関係が成立する可能性があるかどうかを以下に考察する。

$$Z_i = \frac{\Delta B_i}{\sigma_0 \Delta \omega} \sim p(Z_i, \alpha, \gamma, c) \quad (22)$$

図-13は式(19)で定義された、裾切レヴィ分布関数のパラメータを $\alpha = 1.6$, $\gamma = 0.8$, $c = 0.24$ とした時の確率密度関数 $p(Z_i, \alpha, \gamma, c)$ を描画したものである。図中の青破線が計算結果である。褐色太一点鎖線は標準正規分布の確率密度関数である。図-6・9・10・12などの分布特性を見れば、確率過程 $\{Z_i\}$ の確率密度関数が、パラメータを適切に選べば、裾切レヴィ分布関数を用いて、それなりに表現可能なことが分かる。

現時点で、裾切レヴィ分布関数から独立同分布のサンプル列を模擬するためのアルゴリズムは開発できていないが、レヴィ分布に従う独立同分布のサンプル生成にはChambersのアルゴリズム⁽¹⁵⁾が有るので、それを準用することにより、サンプルの生成は可能であると考えている。なお、裾切レヴィ分布関数のパラメータ、 α と c が同一の値を持ち、 γ の値のみが異なる互いに異なる確率密度関数 $p_i(X_i, \alpha, \gamma_i, c)$ から、独立に生成された n 個の確率変数 X_i の和からなる確率変数 X を、次式のように定義すると、

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (23)$$

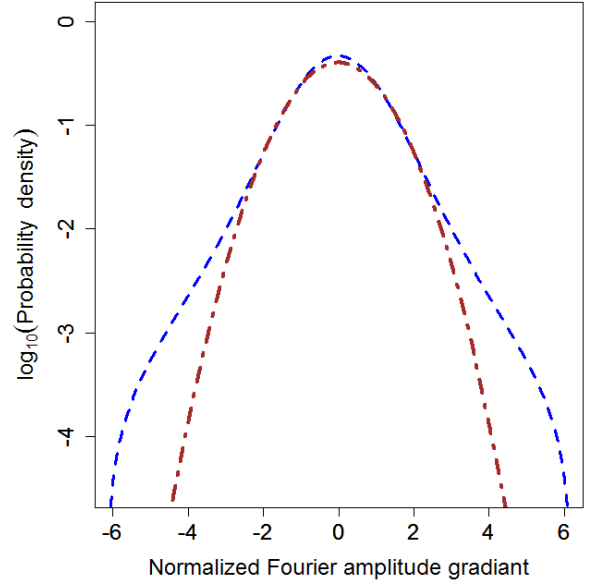


図-13 裾切レヴィ確率密度関数の描画。式(19)に定義される分布関数を規定するパラメータを、 $\alpha = 1.6$, $\gamma = 0.8$, $c = 0.24$ とした時の確率密度関数を青破線で示している。褐色一点鎖線は標準正規分布の確率密度関数。図-6・9・10・12などに示されている、正規化フーリエ振幅差分過程 $\{Z_i\}$ の確率密度関数を近似できる可能性を秘めた分布関数と言える。

X の確率密度関数は、次式を満たす γ_X

$$\gamma_X^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha + \cdots + \gamma_n^\alpha \quad (24)$$

とパラメータ、 α と c を用いて、 $p(X, \alpha, \gamma_X, c)$ と表現できる(証明は付録Bに与える)。このことから、裾切レヴィ分布関数から独立同分布で生成された乱数列の和の確率密度関数は裾切レヴィ分布関数に収斂するので、裾切レヴィ分布関数は安定分布(stable distribution)属になっていることが分かる。式(22)をさらに一般的にし、確率変数 X を確率変数 X_i の重み w_i 付き和からなる、次式の場合を考える。

$$X = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n \quad (25)$$

この場合には、式(23)は次式のように書き直せる。

$$\gamma_X^\alpha = w_1^\alpha \gamma_1^\alpha + w_2^\alpha \gamma_2^\alpha + \cdots + w_n^\alpha \gamma_n^\alpha \quad (26)$$

式(26)の関係が成立しているので、裾切レヴィ分布関数から、独立同分布で生成された乱数列を用いて、式(22)を満たすような ΔB_i の生成アルゴリズムを構築できる可能性が見えて来る。

4. むすび

本論文は、地震動のフーリエ振幅を円振動数に関する連続確率過程と捉え、その確率分布特性を明確にするこ

とを目的としたものである。得られた結果は以下のように要約される。

- 地震動のフーリエ振幅を円振動数に関する確率過程と見なし、その非定常特性を、バンド幅0.6HzのParzenウインドウで平滑化することにより、抽出した。離散円振動数間隔を $100\pi/2^m$ ($m = 26, 25, \dots, 14$) と変化させても、平滑化過程は同一の曲線で表現できることが判明し、平滑化に用いているバンド幅が適切に選択されていることを確認した。
- フーリエ振幅過程をその平滑化過程で割った過程を、標準化フーリエ振幅過程と命名し、その差分過程の確率特性を講究した。差分間隔の異なる差分過程の分散が離散円振動数間隔のべき乗則に従うことを見出し、そのべき指数を決めるハースト指数の値が1になることを明らかにした。
- この結果を用いて、標準化フーリエ振幅差分を離散円振動数間隔で割った変数を、正規化フーリエ振幅差分と命名し、その確率密度関数をカーネル法を用いて同定したところ、差分間隔の取り方によらず、同一の確率密度関数で表現されることを発見した。
- この確率密度関数が裾切レヴィ分布関数でモデル化できることを明らかにした後、裾切レヴィ分布関数が安定分布群になることを明示し、その特性を利用して、フーリエ振幅差分の模擬法が開発できる可能性のあることに言及した。

謝辞：本研究は科学研究費補助金(基盤研究(c)課題番号26420470)の一部を使用して実施したものである。また、使用した加速度記録は気象庁と防災科学研究所のK-NETが提供しているもの、ならびに、米国PEERがNGAデータベースとして提供しているものである。併せて謝意を表す。

付録A 関数の平滑化とParzenウインドウ

関数 $f(x)$ をウインドウ関数 $p(x)$ を用いて平滑化した関数を $\bar{f}(x)$ と置けば、次式の関係が成立する。

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-\tau) f(\tau) d\tau \quad (\text{a1})$$

式(a1)の両辺をフーリエ変換すると次式を得る。

$$\bar{F}(\xi) = P(\xi)F(\xi) \quad (\text{a2})$$

ここに、 $\bar{F}(\xi)$ 、 $P(\xi)$ と $F(\xi)$ は、各々、 $\bar{f}(x)$ 、 $p(x)$ と $f(\tau)$ のフーリエ変換であり、何れも次式と同じ形式で表現されるものである。

$$P(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-i\xi x} dx \quad (\text{a3})$$

式(a2)の逆変換で、 $\bar{f}(x)$ は次式で与えられる。

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{a4})$$

本論文の解析に用いたParzenウインドウは次式で定義される。

$$p(x) = \frac{3}{4} u \left(\frac{\sin A}{A} \right)^4 \quad (\text{a5})$$

この式中のパラメータ u と A は次式で与えられる。

$$u = \frac{280}{151b}, \quad A = \frac{\pi u x}{2} \quad (\text{a6})$$

ここに、 b はバンド幅(Hz)であり、関数 $f(x)$ の平滑化の程度を決めるパラメータである。

付録B 裾切レヴィ分布の和法則について

n 個の互いに独立な確率密度関数 $p_i(X_i)$ から、独立に生成された n 個の確率変数 X_i の和からなる確率変数 X を、次式のように定義する。

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{b1})$$

この場合、確率変数 X の確率密度関数 $p(X)$ は次式で定義される。

$$p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n-1} p_i(X_i) p_n \left(X - \sum_{i=1}^{n-1} X_i \right) dX_1 \dots dX_{n-1} \quad (\text{b2})$$

ここで取り扱う確率密度関数が、裾切レヴィ確率密度関数で表現されるものとして、 $p(X)$ のフーリエ変換を $\varphi(t, \alpha, \gamma_X, c)$ とし、各確率変数 $p_i(X_i)$ のフーリエ変換を $\varphi_i(t, \alpha, \gamma_i, c)$ とすれば、式(b2)の両辺をフーリエ変換することにより、次式が得られる。

$$\varphi(t, \alpha, \gamma_X, c) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(t, \alpha, \gamma_i, c) \quad (\text{b3})$$

いま、本文中の式(19)の関係をを用いれば、式(b3)は次式のように書き直せる。

$$\exp\{-\gamma_X^\alpha g(t)\} = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^\alpha\right) g(t)\right\} \quad (\text{b4})$$

ここに、関数 $g(t)$ は次式で表現される、裾切レヴィ分布関数のパラメータ γ とは無関係な関数である。

$$g(t) = \frac{f(t, \alpha, c)}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$

式(b4)の関係から、裾切レヴィ分布関数のパラメータに関する和公式が次式のように決定される。

$$\gamma_X^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha + \dots + \gamma_n^\alpha \quad (\text{b5})$$

参考文献

- 1) Sato, T. : Fractal characteristics of phase spectrum of earthquake motion, *Journal of Earthquake and Tsunami*, 7(2), 1350010-1-17, 2013.

- 2) 佐藤忠信：地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol. 70, No. 2, pp.295-305, 2014.
- 3) 佐藤忠信：自己相似仮説から導出される地震動位相の確率特性と地震動振幅の減衰, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol.70, No.3, pp.463-473, 2014.
- 4) 佐藤忠信：確率過程として見た地震動位相の不可解性, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol.72, No.4(地震工学論文集第 35 巻), pp.I_831-I_841, 2016.
- 5) 大崎順彦：新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 第 9 刷, 2008.
- 6) Mantegna R. N. and Stanley H. E. : Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: the truncated Levy flight, Phys. Rev. Lett. Vol.73, pp.2946-2949,1994.
- 7) Mandelbrot, B. B. and Van, J. W. : Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SAIAM Review*, Vol.10, pp.422-437, 1968.
- 8) Hurst, H. E., Black, R.P. and Simaika, Y. M.: *Long-term stage: an experimental study*, London, Constable, 1965.
- 9) Scott, D. W. : *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*, Wiley, 1992.
- 10) Gabaix, X. : Zipf's law for cities: an explanation, *The Quarterly Journal of Economics*, August, 739-767, 1999.
- 11) 佐藤忠信：観測記録に見る位相勾配の特異な確率特性, 日本地震工学会・大会 2016, P4-36(8 ページ概要), 高松 2016・9 月.
- 12) Biagini, F., Hu, Y., Oksendal, B. and Zhang, T. : *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, London, 2008.
- 13) Mantegna, R. N. and Stanley : *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- 14) Voit, J. : *The Statistical Mechanics of Financial Market*, Third Edition, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, p.120-p.129, 2010.
- 15) Chambers, J. M., Mallows, C. L. and Stuck B. W. : A Method for Simulating Stable Random Variables, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.71, No.354, pp.340-344, 1976.

(2016.9.2 受付)

STOCHASTIC CHARACTERISTICS OF FOURIER AMPLITUDE IN OBSERVED EARTHQUAKE MOTIONS

Tadanobu SATO

We investigated the stochastic characteristics of Fourier amplitude of observed earthquake motion which is assumed as a stochastic process of the circular frequency. First we extracted the nonstationary characteristic of Fourier amplitude by calculating a smoothed Fourier amplitude using Parzen window filter. Dividing the Fourier amplitude by this smoothed one we could standardize the Fourier amplitude. The main theme of this paper was to discuss the stochastic characteristic of this standardized Fourier amplitude. We investigated the variance of the incremental difference of this standardized Fourier amplitude with different circular frequency interval and obtained that the variance was expressed as a power function of circular frequency interval. Based on this result we defined the normalized standard Fourier amplitude increment by dividing the standard Fourier amplitude increment with respect to the circular frequency interval. We found that the probability distribution characteristic of this increment could be modeled by the truncated Levy distribution. Because this distribution possesses the stable nature we discussed a possibility developing an algorithm to generate a Fourier amplitude process as a stochastic process.