

Material Point Methodのエネルギー振動問題に対する抑制手法の提案とその検証

江戸 孝昭¹・松原 仁²

¹学生会員 琉球大学大学院 理工学研究科 (〒903-0213 沖縄県西原町字千原1番地)

E-mail: k128652@eve.u-ryukyu.ac.jp

²正会員 琉球大学准教授 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原1番地)

E-mail: matsbara@tec.u-ryukyu.ac.jp

格子メッシュ等を用いない数値解析手法のひとつに、Material Point Method (MPM) と呼ばれる手法がある。本手法は、ディリクレ型境界条件等を設定する際に曖昧な定義が無く、地すべり等の大変形問題への適用も容易であることから、近年、地盤分野において積極的に適用されている。しかしながら、本手法によって動的解析を実施した場合、得られる弾性エネルギーが大きく振動する等の問題が指摘されており、今後、地震応答解析等への適用を行う場合、大きな欠陥となることから、その振動を抑制する新たな手法の開発が求められている。そこで、本研究では、MPMで定義される粒子のひずみ増分値に対して、近傍粒子のひずみ増分値を用い、移動最小自乗法 (MLS法) によって補間することで、弾性エネルギーの振動を抑える手法を提案する。本論文では、提案手法を定式化することに加え、いくつかの既存手法との比較解析例を示すことによって本手法の妥当性について検討する。

Key Words : *granular material, material point method, landslide, generalized interpolation material point method, moving least squares method*

1. 緒言

土石流や地すべり等の斜面崩壊は、降雨等により地盤内に水が溜り弱面 (すべり面) が形成され、地震等の外力が加わることで抵抗力が弱くなった面から一気に滑り落ちる、マルチフィジックスな現象である。地盤の大変形、崩壊現象を精度よく評価することは、地盤内部の状態を高い精度で把握することが容易ではないことから、極めて困難な問題である。例えば、地すべりや土石流等の地盤の大変形問題の安定性を評価する場合、円弧・非円弧すべり法やニューマーク法等を用いてすべり面を計算により算定し、すべり面の上部に存在する移動層の密度などの材料特性等を考慮し安全率を加え評価されている¹⁾。しかしながら、この方法は極限平衡状態のみに着目しており、地盤等の変形については考慮されず、地震等の外力の影響も考慮されていない。そのため、必ずしも計算による算定通りのすべり面とは成らない場合がある²⁾。また、材料特性が複雑な場合のすべり面の算定は極めて困難となる。今日においては、上記のような突発的な豪雨や地震を起因とする地盤・岩盤の斜面崩壊、土石流や落石等が多発しており、多くの被害をもたらして

おり、今後、これらを定量的かつ定性的な安定評価できる手法が必要不可欠である。

近年、地盤や岩盤の崩壊、変形、移動挙動等の物理特性を定量的かつ定性的に評価するための手法として、数値シミュレーション技術が積極的に適用されている。斜面崩壊等の変形を考慮する手法には、ジョイント要素を用いた有限要素法 (FEM)、有限差分法 (FDM)、個別要素法 (DEM)、不連続変形法 (DDA) などが挙げられる。しかしながら、有限要素法では、要素の大きな変形に伴って計算破綻や精度低下等の問題が生じる場合がある³⁾。また、地すべり現象における移動層 (土塊) の分離現象を再現することは難しく、岩盤崩落等の岩塊が明確に分離する現象を安定的に解くことは極めて困難である。有限差分法に関しては、支配方程式である運動方程式を陽解法にて定式化することにより、安定した解析を行うことは可能であるが、解析対象の形状が複雑形状化するにつれモデル化が困難となるため、岩盤内の先在き裂や微細構造等の複雑形状を考慮することは難しい。個別要素法 (DEM) においては土粒子や岩盤ブロックを剛体と仮定しているため、ブロックの変形を考慮することができず、さらに、ブロック同士の接触に関

して力学的に曖昧な定義が使われているため、土石流を含む流砂のような現象においては粒子間の衝突や回転、エネルギー保存等の問題があり、解の安定性が得られない場合がある⁴⁾。不連続変形法 (DDA) においては、2次元問題に関してはある程度精度の良い結果が得られており、岩盤斜面における地震応答解析の適用⁵⁾も行われているものの、3次元問題においてはブロック同士の接触に関する定式化が極めて複雑であるため⁶⁾、3次元問題への拡張の足かせとなっていると考えられる。さらに、大小様々なブロックを有する問題において、ブロック同士の貫入制御が難しく、ブロック同士の透過やブロックが飛び散るなど実現象では有り得ない挙動が得られる場合もある。以上のように、不連続岩盤の大変形問題を動的に解析するための数値シミュレーション手法は存在するが、未だ確立されていないのが現状である。

一方、計算手法の多様化に伴い、SPH法、MPS法やRKPM等の粒子法やメッシュフリー法等の要素を用いないメッシュレス法に関する研究が盛んに行われ、その簡便さから様々な分野で用いられている。地盤の変形、破壊問題に対しても、例えば、液状化現象に対しては、地盤をビンガム流体とし扱ったSPH解析⁷⁾や側方流動を考慮したEFGM解析⁸⁾などがある。また、MPS法においても、構成則にモール・クーロンモデルやドラッカー・プラガーモデル等の弾塑性構成則を適用することで、地盤の大変形や崩壊現象の解析が行われている⁹⁾。しかしながら、上記の手法は、連続体を粒子の集合体として表現するために、ディリクレ型境界条件の厳密な設定が難しいことが指摘されており¹⁰⁾、地盤の自由表面における解析精度の低下が懸念されている。

以上のような状況下において、地盤解析分野においては、有限要素法等で用いられるEuler型のアプローチと粒子法等で用いられるLagrangian型のアプローチを併用した手法であるMaterial Point Method (MPM) と呼ばれる手法が注目されている¹¹⁾。MPMはPIC (Particle In Cell) 法¹²⁾を固体問題に適用した手法であり、連続体はLagrange粒子群にて表現し、支配方程式は粒子群の背面に設けられるEuler格子にて解く手法である。本手法は、有限要素法をベースとしており、支配方程式をEuler格子で解くことから、SPH法やMPS法とは異なり境界条件を設定する際に曖昧な定義が無く、ディリクレ型境界条件の設定も容易である。また、異なる連続体同士の接触に関しても定式化が行われており¹³⁾、¹⁴⁾、力学的に曖昧な定義はなく、数値解析上安定的に解析することが可能な手法である。地盤解析分野以外においても、破壊力学問題、接触問題、衝突問題等の問題への適用が盛んに試みられており、その有用性が示されている¹⁵⁾。しかしながら、MPMを用いた動弾性解析においても、時間増大に伴いエネルギーが増大または減衰するといったエネルギー振動に関する問

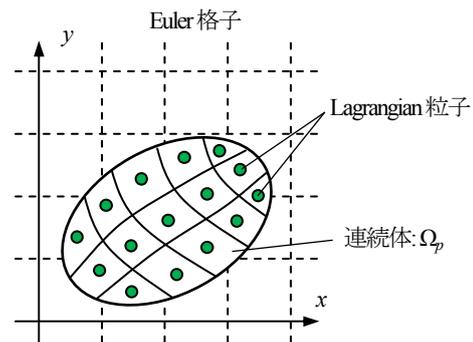


図-1 MPMの概念図

題が指摘されている。すなわち、地震等の外力を考慮した解析 (地震応答解析等) を行う場合、初期の振動時において数値的誤差が蓄積され、弾性状態における挙動に不具合が生じ、塑性状態において理論的ではない挙動が得られることが示唆される。今後、MPMを用いた斜面崩壊等の地盤・岩盤の大変位、大変形問題をを行うにあたり、大きな欠陥となる。勿論、この問題に対しては様々な抑制手法が提案されている¹⁶⁾・¹⁹⁾が、未だその解決には至っていないのが現状である。

そこで本研究では、動弾性解析におけるMPMの解の振動特性を把握し、弾性エネルギーの振動に関する抑制手法を提案することを目的とする。また、MPMの比較対象として、Bardenhagenら¹⁸⁾により提案された、MPMの高精度手法であるGeneralized Interpolation Material Point Method (以下GIMPと記す) の解も同時に検証することとした。

2. MPMおよびGIMPの概要

前述したように、MPMはHarlowにより提案されたPIC (Particle-in-Cell) 法を固体力学に応用した手法であり、連続体をLagrange粒子 (Material Point) 群で離散化し、そして支配方程式の解は、粒子群の背面に設けられるEuler格子を用いて算出する手法である (図-1参照)。そのため、要素のひずみの増加に伴い計算が不能になるといった問題は生じず、また有限要素法等で要求される高度なリメッシング技術の必要が無い手法である。したがって、地すべり問題のような大変形問題に適している手法であると考えられる。なお、時刻歴計算に関しては、一般的に陽解法が採用されている。以下にMPMおよびGIMPの概要を記す。

(1) 支配方程式および弱形式化

MPMおよびGIMPは、粒子が持つ物理量をEuler格子に

おける節点の内挿関数を用いてEuler格子に集約させ、Euler格子にて運動方程式を解き、算出された物理量を再び内挿関数を用いて粒子に集約することで、連続体の変形、移動現象を表現する手法である。このとき、連続体における質量および運動量の保存則は次式で表わされる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (2)$$

ここで、 ρ : 密度、 \mathbf{v} : 速度、 \mathbf{a} : 加速度、 $\boldsymbol{\sigma}$: 応力、 \mathbf{b} : 体積力である。また、ひずみと速度およびひずみと応力は次式のように関連付けられる。

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$: ひずみ、 \mathbf{D} : 応力-ひずみマトリックスであり、上付き添え字Tは転置を意味する。次に、式(2)に任意ベクトル \mathbf{w} (境界上: S でゼロとなるベクトル) を乗じ、Gaussの発散定理を考慮し積分すると、次式のような弱形式化された支配方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_S \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (5)$$

ここで、 Ω : 連続体の領域、 $\boldsymbol{\tau}$: 境界上の応力である。

(2) 支配方程式の離散化

粒子の内挿関数 χ_p を次式にて定義する。

$$\sum \chi_p(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{x} : 空間座標である。この粒子の内挿関数を用いると各粒子の体積 V_p 、質量 m_p 、密度 ρ_p は次式にて表される。

$$V_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (7)$$

$$m_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (8)$$

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} \quad (9)$$

ここで、 Ω_p : 粒子の内挿関数が作用する領域である。また、粒子の運動量 \mathbf{p}_p 、応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ は次式にて表される。

$$\mathbf{p}_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \frac{\chi_p(\mathbf{x})}{V_p} d\Omega \quad (11)$$

したがって式(6)より、連続体の質量、運動量は次式より得られる。

$$\sum_p m_p = \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (12)$$

$$\sum_p \mathbf{p}_p = \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (13)$$

ここで、任意の座標 \mathbf{x} における物理量を $f(\mathbf{x})$ は、粒子の物理量 f_p を用いると、

$$f(\mathbf{x}) = \sum_p f_p \chi_p(\mathbf{x}) \quad (14)$$

となる。したがって、式(5)に式(6)~(14)を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{m_p}{V_p} \mathbf{w} \cdot \dot{\mathbf{v}}_p \chi_p d\Omega = & - \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \boldsymbol{\sigma}_p \chi_p \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega \\ & + \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{m_p}{V_p} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_p \chi_p d\Omega + \int_S \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、 \mathbf{v}_p : 粒子の速度、 \mathbf{b}_p : 粒子の体積力であり、「 \cdot 」は時間積分を意味する。

次に、粒子の背面に設けた N_i 個の節点から成るEuler格子を考える。Euler格子における節点の内挿関数 N_i (有限要素法における形状関数) を用いると、任意座標は次式にて表される。

$$\mathbf{x} = \sum_i^{N_i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i \quad (16)$$

ただし、

$$\sum_i^{N_i} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \quad (17)$$

ここで、 \mathbf{x}_i : 節点 i の座標値である。この時、任意座標同様に任意ベクトルならびに任意ベクトルの空間勾配も、

$$\mathbf{w} = \sum_i^{N_i} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{w}_i \quad (18a)$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{x}} = \sum_i^{N_i} \mathbf{w}_i \frac{dN_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \quad (18b)$$

となるので、式(18)を式(15)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \frac{m_p}{V_p} \dot{\mathbf{v}}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i \chi_p d\Omega \right) \\ = - \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \boldsymbol{\sigma}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{dN_i}{d\mathbf{x}} \chi_p d\Omega \right) \\ + \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \frac{m_p}{V_p} \mathbf{b}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i \chi_p d\Omega \right) \\ + \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\int_S N_i \boldsymbol{\tau} dS \right) \end{aligned} \quad (19)$$

上式を整理すると、

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (20)$$

ただし、

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_p m_p \dot{\mathbf{v}}_p \phi_{ip} \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = -\sum_p \boldsymbol{\sigma}_p V_p \frac{d\phi_p}{d\mathbf{x}} \quad (22)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_p m_p \mathbf{b}_p \phi_p + \int_S N_i \boldsymbol{\tau} dS \quad (23)$$

$$\phi_p = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (24)$$

$$\frac{d\phi_p}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{dN_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (25)$$

ここで、 m_i : 節点の質量、 \mathbf{v}_i : 節点の加速度、 $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ 、 $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$: 節点の内力、外力である。MPMおよびGIMPでは、粒子の内挿関数に関してはそれぞれ次式にて定義されている。

$$\chi_p^{\text{MPM}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) V_p \quad (26)$$

$$\chi_p^{\text{GIMP}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega_p \ (\mathbf{x} < l_p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

ここで、 χ_p^{MPM} 、 χ_p^{GIMP} : それぞれMPMとGIMPにおける粒子の内挿関数、 $2l_p$: 粒子サイズであり、初期の粒子サイズ $2l_p^0$ は格子サイズを格子内の粒子数で除すことで得られる¹⁸⁾。したがって、一次元におけるMPMの内挿関数および内挿関数の空間勾配は、

$$\phi_i(x) = N_i(x) = \begin{cases} 1 + (x - x_i)/L & -L < x - x_i \leq 0 \\ 1 - (x - x_i)/L & 0 \leq x - x_i < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \frac{dN_i(x)}{dx} = \begin{cases} 1/L & -L < x - x_i \leq 0 \\ -1/L & 0 \leq x - x_i < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

となる。また、GIMPにおける内挿関数および内挿関数の空間勾配は次式となる。

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(L + l_p + (x - x_i))^2}{4Ll_p} & -L - l_p < x - x_i \leq -L + l_p \\ 1 + \frac{x - x_i}{L} & -L + l_p < x - x_i \leq -l_p \\ 1 - \frac{(x - x_i)^2 + l_p^2}{2Ll_p} & -l_p < x - x_i \leq l_p \\ 1 - \frac{x - x_i}{L} & l_p < x - x_i \leq L - l_p \\ \frac{(L + l_p - (x - x_i))^2}{4Ll_p} & L - l_p < x - x_i \leq L + l_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{L + l_p + (x - x_i)}{2Ll_p} & -L - l_p < x - x_i \leq -L + l_p \\ \frac{1}{L} & -L + l_p < x - x_i \leq -l_p \\ -\frac{x - x_i}{Ll_p} & -l_p < x - x_i \leq l_p \\ -\frac{1}{L} & l_p < x - x_i \leq L - l_p \\ -\frac{L + l_p - (x - x_i)}{2Ll_p} & L - l_p < x - x_i \leq L + l_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

ここで、 L : 格子サイズである。なお、3次元における内挿関数は次式より得る²⁰⁾。

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x)\phi(y)\phi(z) \quad (32)$$

粒子のひずみ $\boldsymbol{\epsilon}_p$ ならびに応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ は、式(3)、(4)より、

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_i^{N_p} \left\{ \frac{d\phi_{ip}}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i + \left(\frac{d\phi_{ip}}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i \right)^{\text{T}} \right\} \quad (33)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (34)$$

となる。ここで、 Δt : 時間増分である。また、質量保存則 (式(2)) より、次式を得る。

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{\rho_p^t}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_p)} \quad (35)$$

3. エネルギー振動に関する抑制法

ここでは、MPMの動弾性解析における弾性エネルギー振動問題に関する抑制手法を提案する。この問題は、ひずみエネルギーの誤差の蓄積が原因であるとされており、このエネルギー振動に関してBardhagenら¹⁶⁾は、MPMの一般的なアルゴリズムであるMUSL (Modified Update Stress Last)¹¹⁾において、アルゴリズムの最後に行っていたひずみ増分値の算出を先に求めることで、この問題に対応している。また、Nairnら¹⁷⁾は、ひずみ増分値を先に求め、その後節点速度を求め、そしてその節点速度を用いて、ひずみ増分値を求めることで振動を抑えた。すなわち、両者ともにひずみ増分値を求めるアルゴリズムを変えることでエネルギー振動の抑制を行っていることになる。また、Sorenら²¹⁾は節点速度より求めた粒子の応力 (式(34)参照) を、次式に示すように、質量を重みにし、内挿関数を用いて節点の応力を求め、そして再び内挿関数を用いて粒子の応力を求める手法を提案している。

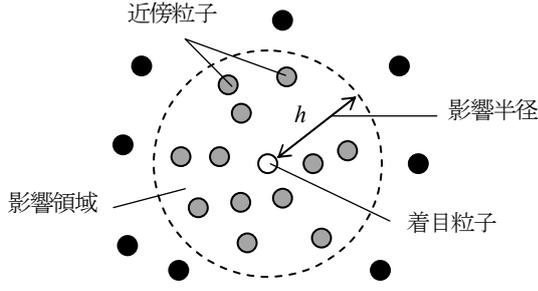


図-2 影響領域の概念図

$$\sigma_i = \sum_{p=1}^n \frac{\sigma_p \phi_p m_p}{m_i} \quad (36)$$

$$\sigma_p^{\text{modified}} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi_{ip} \quad (37)$$

そこで本研究では、粒子のひずみ値に着目し、エネルギー振動の抑制を行うことを試みる。具体的には、着目粒子のひずみ増分値を、移動最小自乗法（MLS法：Moving Least Squares Method）²²⁾を用いて近傍粒子のひずみ増分値で補間することで、誤差の蓄積を抑制する手法である。以下に本手法の詳細について述べる。

(1) Moving Least Squares MPM (MLS-MPM)

a) MLSMにおける評価関数

本研究では、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値を用いて補間することで、エネルギー振動に対する抑制を行った。具体的には、近傍粒子のひずみ増分値を用いて次式の重み付き自乗和を最小にすることで、着目粒子の修正ひずみ増分値 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}}$ が求められる。

$$J = \sum_{I=1}^n W(r_I, h) (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_I)^2 \quad (38)$$

ここで、 J : 残差の自乗和、 n : 影響領域内（図-2に示す円領域）にある粒子数、 r_I : 着目粒子と近傍粒子 I との距離、 h : 影響領域の半径（図-2参照）、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_I$: 近傍粒子 I のひずみ増分値である。なお重み関数 $W(r_I, h)$ に関して、次式に示す3次のスプライン関数²³⁾を用いた。

$$W(r_I, h) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s + 4s^3 & 0 \leq s < \frac{1}{2}, s = r_I / h \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \frac{1}{2} \leq s < 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases} \quad (39)$$

b) 修正ひずみ増分値の導出

前項で示した着目粒子のひずみ増分値 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}}$ を次式にて定義する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} = \mathbf{c}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (40)$$

ここで、 \mathbf{c} : 未定係数、 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$: 任意の多項式である。式

(40)を式(38)に代入し、 J 値の停留条件より式を整理すると、未定係数 \mathbf{c} は次式によって得られる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (41)$$

ただし、

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n W(r_I, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_I) \mathbf{F}^T(\mathbf{x}_I) \quad (42)$$

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) = \{W(r_1, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_1), \dots, W(r_n, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)\} \quad (43)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_I = \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n\}^T \quad (44)$$

である。したがって、式(41)を式(40)に代入すると、

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (45)$$

が得られる。ただし、

$$\Phi_I = \sum_{I=1}^m \mathbf{F}_I(\mathbf{x}) \{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})\}_{II} \quad (46)$$

である。ここで、 $m: \mathbf{F}(\mathbf{x})$ における多項式の項数である。したがって、本研究では式(45)を着目粒子のひずみ増分値とし解析を行うものとする。

(2) MLS-MPMのアルゴリズム

MPMにおけるアルゴリズムに関して、一般的にMUSL (Modified Update Stress Last)¹¹⁾、USF (Update Stress First)¹⁶⁾、MUSLとUSFの平均的なアルゴリズムであるUSA VG (Update Stress Avaraged)¹⁷⁾の3つの手法があるが、本研究では、提案手法の有用性を示すために、Sulskyらによって示されたMUSLをベースとした。

初めに粒子 p の座標を用いて、前節に示した内挿関数および内挿関数の空間勾配を求める。そして、粒子の質量 m_p を用いて、各節点の質量 m_i を求める。

$$m_i^k = \sum_p m_p^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (47)$$

ここで、 k はステップ数を表わす。そして式(22)、(23)より、粒子の応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ 、体積力 \mathbf{b}_p を用いて、節点の外力および内力を求め、節点の加速度 \mathbf{a}_i を求める。

$$\mathbf{a}_i^k = \frac{\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}}{m_i^k} \quad (48)$$

節点加速度を用いて、節点の速度を更新する。

$$\mathbf{v}_i^L = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^k \Delta t \quad (49)$$

そして、節点速度を用いて、粒子の速度ならびに座標を更新する。

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (50)$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^L \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (51)$$

このとき、運動量保存則より、 $k+1$ ステップにおける節

点速度を求める.

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} m_p^k \mathbf{v}_p^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (52)$$

そして, $k+1$ ステップにおける節点速度を用いて, 粒子のひずみ増分値を求める.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T \right\} \quad (53)$$

このとき, 式(45)より, 着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値で補間する.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified},p}^{k+1} = \sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{x}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_l^L \quad (54)$$

そして, 修正したひずみ増分値を用いて, 粒子の応力と密度を更新する.

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified},p}^{k+1} \quad (55)$$

$$\rho_p^{k+1} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified},p}^{k+1})} \quad (56)$$

このときGIMPにおいて, 粒子サイズは次式にて更新される¹⁹⁾.

$$l_p^{k+1} = \mathbf{G}_p^{k+1} l_p^0 \quad (57)$$

ただし,

$$\mathbf{G}_p^{k+1} = (1 + \nabla \mathbf{v}_p \Delta t) \mathbf{G}_p^k \quad (58)$$

である. なお以下に示す解析結果においては, 式(57)を満たすGIMPを“cpGIMP”とし, 次式を満たすGIMPを“uGIMP”としている.

$$l_p^{k+1} = l_p^0 \quad (59)$$

図-3にMLS-MPMのフローチャートを示す. なお, 通常のMPMのアルゴリズム (MUSL) は, 同図に示す「着目粒子のひずみ増分値の補間 (MLS法)」の項目が無い. また, MPMは陽解法であるため, 時間増分はCourant条件²⁴⁾により制限される. したがって本研究では, 時間増分値に関して, 次式を満足するように時間増分値を決定した.

$$\alpha = \frac{c \Delta t}{L} \quad (:\alpha < 1.0) \quad (60)$$

ここで, α : クーラン係数, c : 弾性波速度である.

4. 数値解析例

本章では, 従来のMPMならびにGIMPと提案手法との比較検証を行い, 得られる解について考察する. また,

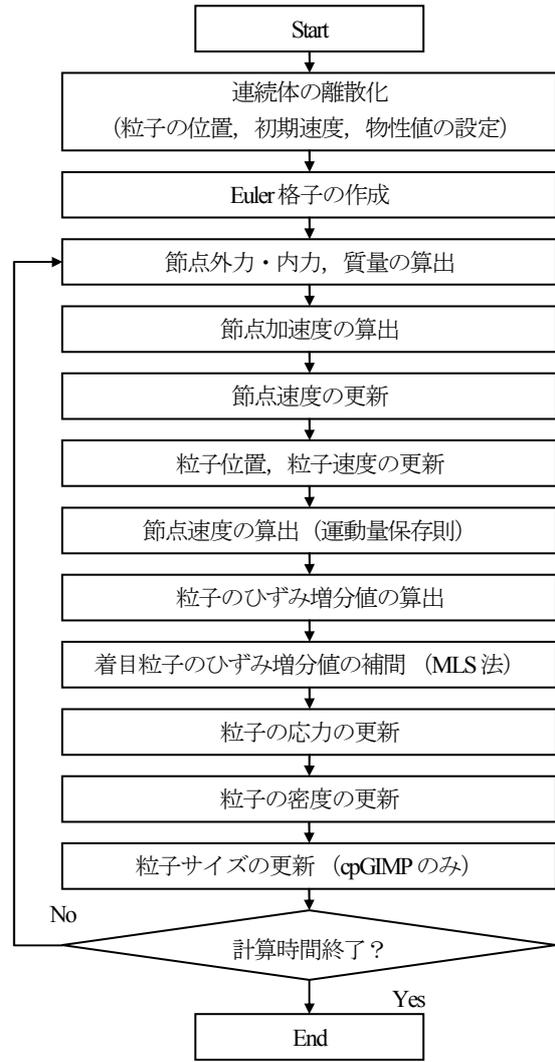


図-3 MLS-MPMのフローチャート

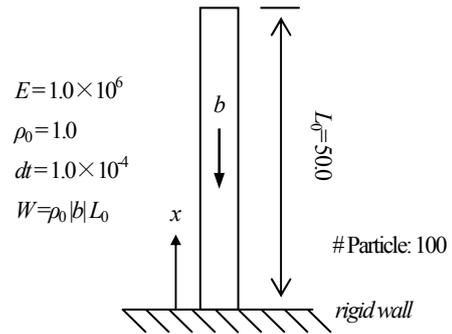


図-4 棒の準静的圧縮問題

式(40)に示す関数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は3次多項式とし, 計算の破綻を防ぐために影響領域内に4つ以上の粒子が存在しない場合, その着目粒子のひずみ増分値の補間は行わないものとした. なお, 影響半径は格子サイズに任意の定数を乗じ決定した.

(1) 棒の準静的問題

ここでは, 図-4に示す試験体に, 体積力 (重力加速度

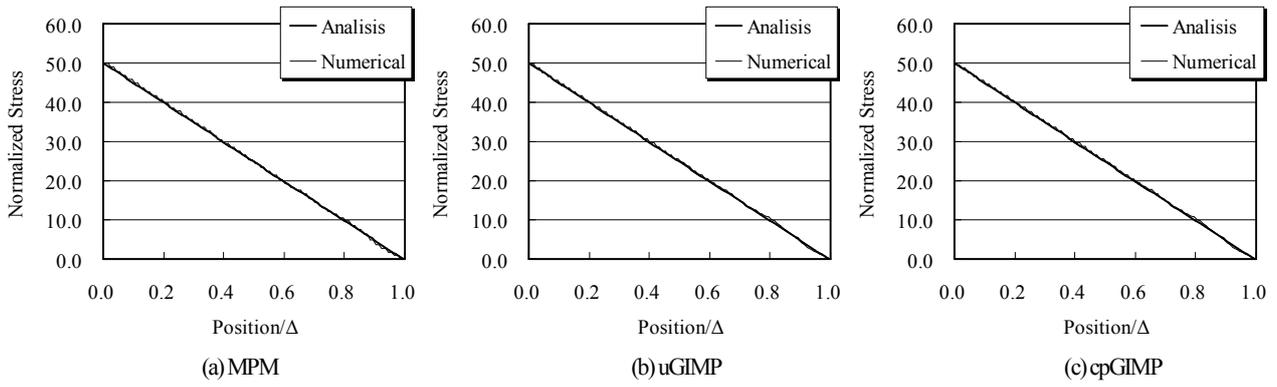


図-5 $W=1000$ 時における軸応力分布

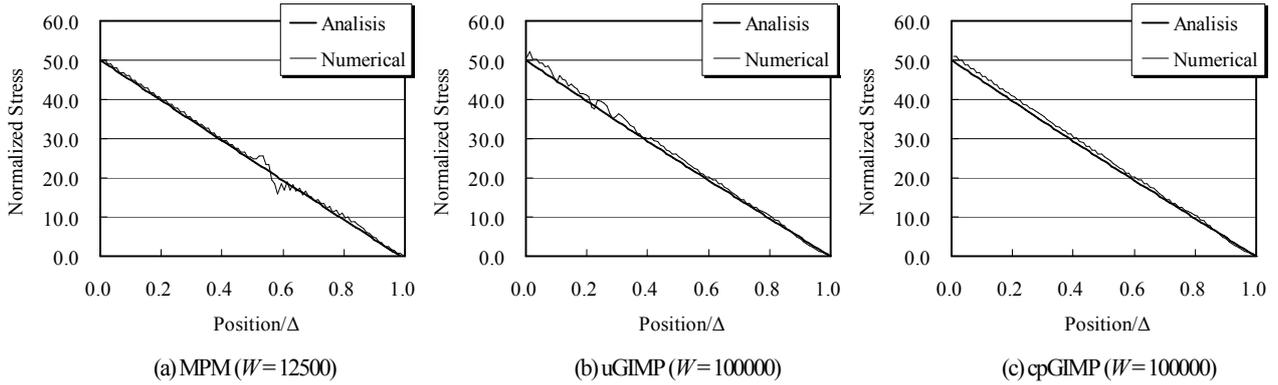


図-6 軸応力分布（移動最小自乗法の適用なし）

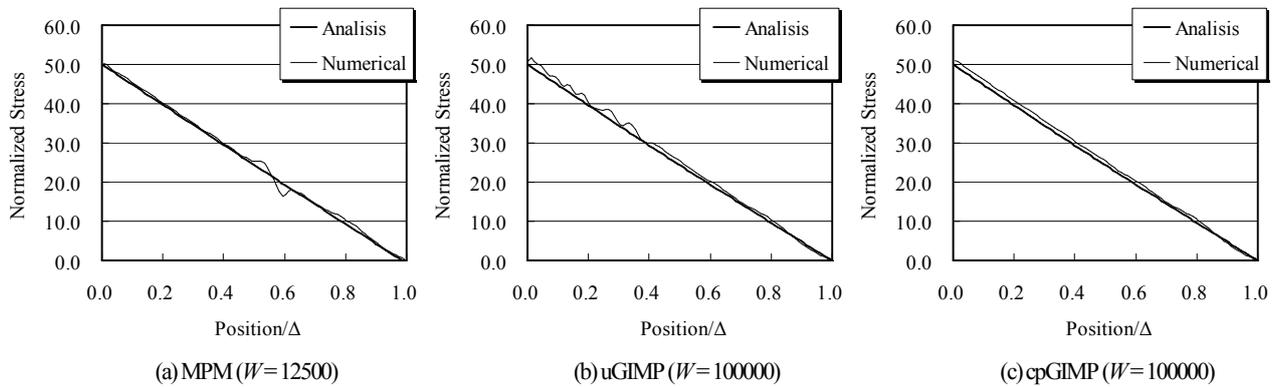


図-7 軸応力分布（移動最小自乗法の適用あり）

等）が作用する一次元準静的圧縮問題¹⁸⁾を対象とし、次式に示す応力の理論解との比較を行った。

$$\sigma(x) = E \left\{ \sqrt{\frac{2\rho_0 b}{E}(\Delta - x) + 1} - 1 \right\} \quad 0 \leq x \leq \Delta \quad (61)$$

ただし、

$$\Delta = L_0 + \frac{\rho_0 b}{2E} L_0^2 \quad (62)$$

ここで、 E ：弾性係数、 b ：体積力、 Δ ：試験体の長さである。境界条件は同図に示すように、試験体の底部（ $x = 0.0$ ）において完全固定とした。本問題における材料特性は、Bardenhagenら¹⁸⁾同様に、弾性係数は 1.0×10^6 、初期

密度は1.0、初期の試験体の長さは50、試験体の断面積は1.0、時間増分値は 1.0×10^{-4} （クーラン係数：0.1）、粒子数は100とした。

図-5～7に、粒子の座標を試験体長さ Δ で除した値と、応力を $s_0 (= bm/A : m$ ：質量、 A ：断面積)で除した正規化応力との関係を示す。なお、同図は初期試験体長さを弾性波速度で除した時間における結果であり、Euler格子の格子サイズは1.0とした。

図-5に W 値($=\rho_0 b L_0$)が10000の場合の結果を示す。Bardenhagenらと同様に、MPMならびGIMPともに、理論解と同程度の値が得られた。しかしながら、図-6に示すように、MPMにおいて $W=12500$ の時、試験体内部におい

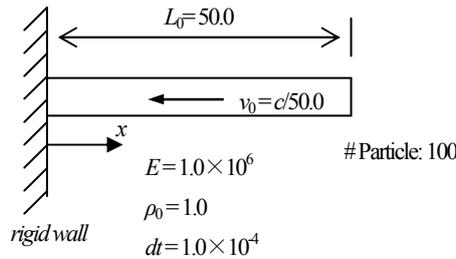


図-8 動的圧縮問題

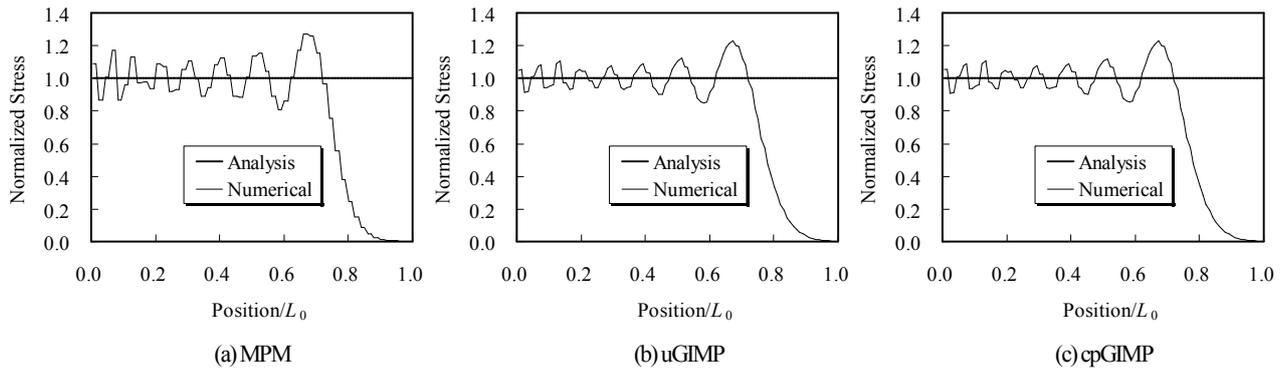


図-9 正規化応力分布 (移動最小自乗法の適用なし)

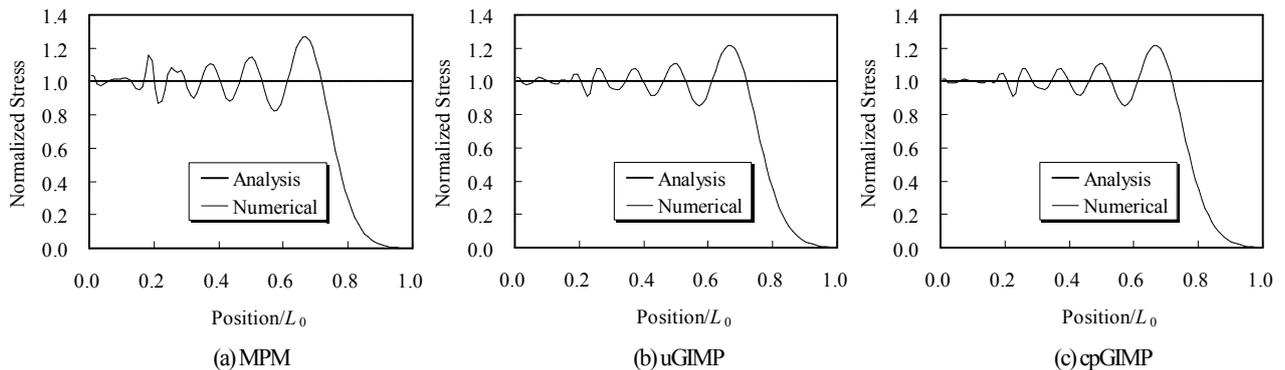


図-10 正規化応力分布 (移動最小自乗法の適用あり)

て高い応力値が得られ、試験体全体において応力値の振動が見られた。また、位置が0.6付近において、隣合う粒子の応力値が急激に変化している様子も見られる。GIMPにおいては同図に示すように、 $N=100000$ の時、uGIMP (同図(b)参照) では試験体の境界側で応力値の振動が見られ、MPM同様に、隣合う粒子同士の応力値が急激に変化している箇所も存在する。cpGIMP (同図(c)参照) では、uGIMPに比べ応力値の振動は少ないものの、試験体全体において微小な振動が見られた。図-7に、MLS-MPMの結果を示す。同図に示すように、移動最小自乗法を導入すると、全ての手法において解の振動が抑えられ、応力値が滑らかになり、隣合う粒子の応力値の急激に変化する箇所も少なくなる結果となった。したがって、準静的問題において本手法は妥当であると考えら

れる。

(2) 棒の動的問題

ここでは、図-8に示す試験体に初速度を与えた場合の試験体内部における応力の精度検証を行う。このとき、応力の理論解¹⁸⁾は次式となる。

$$\sigma = E \left(\frac{ct - v_0 t}{ct} - 1 \right) \quad (63)$$

ここで、 c : 弾性波速度、 v_0 : 初期速度である。なお、本問題において、 $v_0 = c/50$ とした。試験体の材料特性は上記の問題と同様な値を用いており¹⁸⁾、本問題においても、Euler格子の格子サイズは1.0とした。

図-9、10に、応力波が試験体の8割を通過した時にお

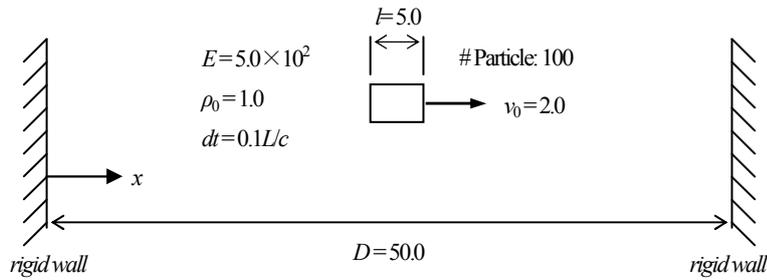


図-11 物体の平行移動問題

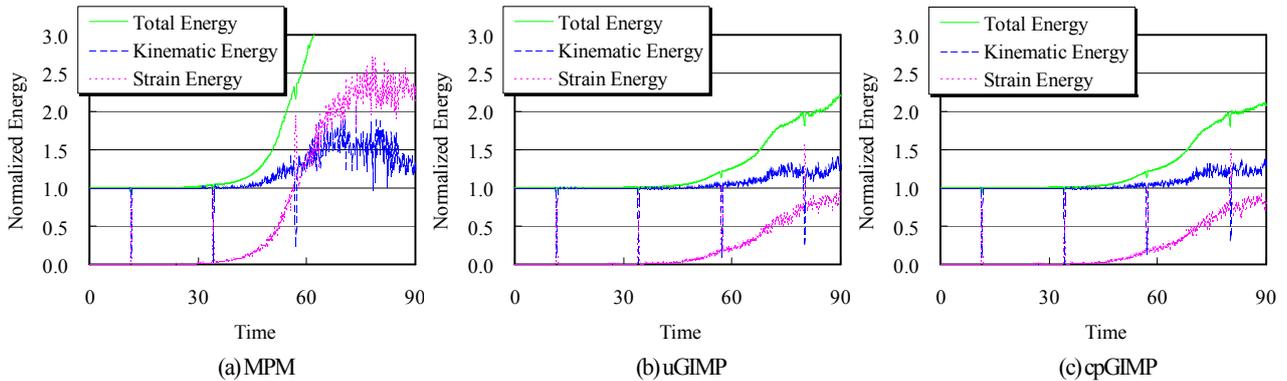


図-12 正規化エネルギーの推移 (移動最小自乗法の適用なし)

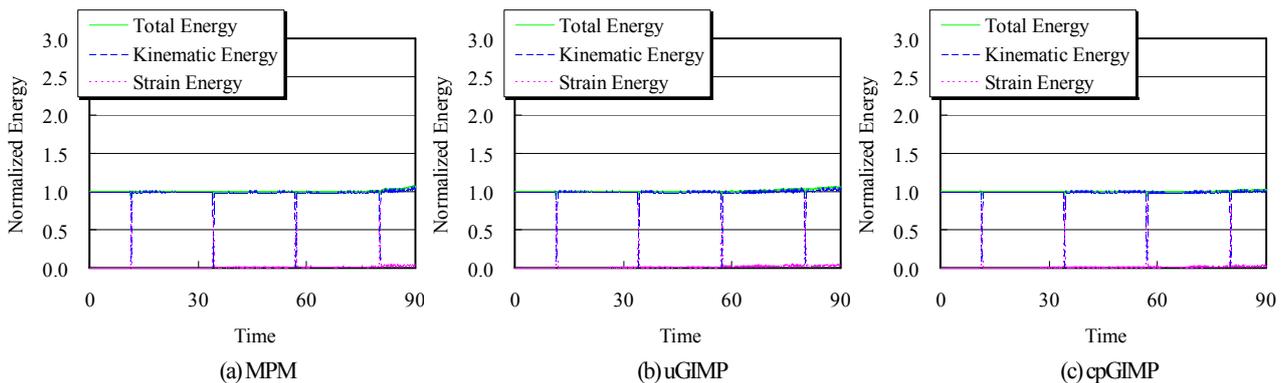


図-13 正規化エネルギーの推移 (移動最小自乗法の適用あり)

ける粒子の座標を初期試験体長さで除した値と、得られた応力を理論解で正規化した正規化応力との関係を示す。図-9より、どの手法においても応力波が伝播している様子が見られるが、MPMにおいては、試験体内部の応力より境界付近における応力が高い結果となった。また、本問題における応力波は、通常滑らかになるものの、応力波が角張る結果となった。これは、MPMにおいては粒子の内挿関数にDiracのデルタ関数を用いているためだと考えられる。また、GIMPは粒子の内挿関数に粒子サイズを用いているため、従来のMPMに比べ内挿関数に幅が生じ、その結果MPMに比べ滑らかな応力波が得られているものの、解が若干振動している様子が見られた。図-10にMLS-MPMの結果を示す。同図より、MPMならびにGIMPに実装した場合ともに、境界に近づくにつれ応力波が減衰している様子が見られ、さらに極

めて滑らかな応力波が得られる結果となった。したがって、本例題においても提案手法の妥当性を確認することができた。

(3) 物体の平行移動問題

ここでは、図-11に示す試験体の平行移動問題を対象として、弾性エネルギーの振動について検討する。平行移動の空間を $D = 50$ とし、試験体の初期位置を空間の中心($x = 25$)とし、初期条件として初期速度 $v_0 = 2.0$ を与えた。材料特性は、同図に示すように、試験体長さは5.0、弾性係数は500、密度は1.0とした。本問題における、格子サイズは0.5としており、時間増分値に関して、クーラン係数を0.1として決定した。

図-12, 13に、時間と初期のエネルギーで正規化した正規化エネルギーとの関係を示す。図-12より、MPMに

において、試験体が $x=50.0$ に位置する壁に到達し、壁に跳ね返り $x=0.0$ に位置する壁に到達すると（同図(a)の30秒付近）、ひずみエネルギーが徐々に上昇し、その結果、エネルギー保存則が成り立たなくなっている。また、3回目の壁への衝突の時（同図(a)の60秒付近）にひずみエネルギーが高くなり、その後運動エネルギーが大きくばらつく結果となった。GIMPにおいては、uGIMPならびにcpGIMPともにMPMに比べ安定した解を得ているが、2回目の壁への衝突を機にひずみエネルギーが増加する結果となった。図-13にMLS-MPMの結果を示す。MPMにおいては、4回目の壁への衝突後（同図の90秒付近）、若干エネルギーの振動があったものの、どの手法も壁の衝突後におけるひずみエネルギーが安定しており、エネルギー保存則が成り立つ結果となった。すなわち、着目粒子の応力値を近傍粒子で補間することで、各粒子におけるひずみ増分値の誤差が少なくなり、連続体のひずみエネルギーの誤差を抑えることが可能であることがわかった。

以上より、MPMならびにuGIMPでは、連続体に作用する荷重により応力値が高く評価される場合があるが、cpGIMPではMPM、uGIMPにくらべ安定した応力が算出される。しかしながら、cpGIMPにおいても応力値が振動するため、MLS法と併用する必要があることがわかった。よって、MLS法とcpGIMPを併用することで、応力値が高く評価されることを抑え、安定した解析を行うことが可能であると考えられる。

5. 結語

本研究では、粒子法の一つであるMaterial Point Method (MPM) に関して、動弾性解析時における解の振動特性を把握し、弾性エネルギーの振動に関する抑制手法を提案した。具体的には、移動最小自乗法 (MLS法: Moving Least Squares Method) に基づき、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値で補間することで、エネルギー振動の抑制を行った。本研究で得られた結果を以下に列記する。

- (1) MLS法に基づき、MPMの着目粒子のひずみ増分値を補間するMLS-MPMを提案した。
- (2) 棒の準静的問題において、MPMならびにGIMPともに理論解と同程度の解があるものの、 W 値($=\rho_0 b L_0$)が高くなると理論解から離れ、応力値が振動することがわかった。また、uGIMPに比べてcpGIMPは解の振動が少ないことがわかった。そして、MLS法を導入することで応力値の振動を抑えることができる結果となった。
- (3) 棒の動的問題において、MPMでは角張った応力波

が得られ、GIMPにおいてはMPMにくらべ滑らかな応力波となったものの、角張った箇所が見られる応力波となった。そして、MLS法を導入することで、MPMならびにGIMPともに応力波が滑らかになり、境界に近づくにつれ、応力波の減衰も見られる結果となった。

- (4) 物体の平行移動の問題においては、MPMおよびGIMPともに壁への衝突後、ひずみエネルギーが高くなりエネルギー保存則が成立しなくなった。一方、MLS法を導入することで、壁への衝突後のエネルギー振動が抑えられ、エネルギー保存則を満たすことが可能となった。

本研究では、MPMのエネルギー振動問題に対する抑制手法の提案を行い、弾性体の準静的、動的、平行移動問題にて精度検証を行った。今後は、地震時等における地盤、岩盤の崩壊、変形、移動挙動への本手法の更なる発展が期待できる。

謝辞：本研究は科学研究費補助金 (26790079) の助成を受けた。ここに記して感謝の意を表す。

参考文献

- 1) 土田孝, 湯怡新: 港湾構造物における最適な円弧すべりの安全率, 土木学会論文集, No.596/III-43, pp.295-306, 1998.
- 2) 菊沢正裕, 長谷川高士, 内田一徳, 片平辰義: 層状斜面の延伸模型実験と安定解析, 土木学会論文集, No.430/III-15, pp.49-58, 1991.
- 3) Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, 1994.
- 4) 藤岡奨, 牛島省: エネルギーの保存性を考慮したDEMにおける接触力の評価法, 水工学論文集, Vol.49, No.1, pp.751-756, 2005.
- 5) 小山 倫史, 赤尾 悟史, 西山 哲, 大西 有三: 岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法 (DDA) の適用に関する研究, 土木学会論文集C, Vol. 65, No. 3, pp. 644-662, 2009.
- 6) Wu, J. H., Juang, C. H. and Lin, H. M.: Vertex-to-face contact searching algorithm for three-dimensional frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.63, pp.876-897, 2005.
- 7) Naili, M., Matsushima, T. and Yamada, Y.: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, *Journal of applied mechanics, JSCE*, Vol.8, pp.591-599, 2005.
- 8) 佐藤忠信, 松丸貴樹: メッシュフリー法による地盤の液状化・流動解析, 土木学会論文集C, Vol.813, pp.89-101, 2006.

- 9) 吉田郁政：MPS法を用いた地盤構造物の地震時破壊挙動解析のための基礎的検討，土木学会論文集A2（応用力学），Vol.67, No.1, pp.93-104, 2011.
- 10) 井島聖也，入部綱清，仲座栄三：MPS法における圧力ポアソン方程式のディリクレ境界条件判定の改善，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol.68, No.1, pp.17-28, 2012.
- 11) Sulsky, D., Zhou, S. J. and Schreyer, H. L.: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, Vol.87, pp.236-252, 1995.
- 12) Harlow, F. H.: PIC and its progeny, *Computer Physics Communications*, Vol.48, pp.1-10, 1988.
- 13) Bardenhagen, S. G., Brackbill, J. U. and Sulskyc, D.: The material-point method for granular materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.187, pp.529-541, 2000.
- 14) Huang, P., Zhang, X., Ma, S. and Huang, X.: Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol.85, pp. 498-517, 2011.
- 15) Beuth, L., WiReckowski, Z. and Vermeer, P. A.: Solution of quasi-static large-strain problems by the material point method, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.35, pp.1451-1465, 2011.
- 16) Bardenhagen, S. G.: Energy Conservation Error in the Material Point Method for Solid Mechanics, *Journal of Computational Physics*, Vol.180, pp.383-403, 2002.
- 17) Naim, J. A.: Material Point Method Calculations with Explicit Cracks, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.4, No.6, pp.649-663, 2003.
- 18) Bardenhagen, S. G. and Kober, E. M.: The generalized interpolation material point method, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.5, pp.477-495, 2004.
- 19) Wallstedt, P. C. and Guilkey, J. E.: An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method, *Journal of Computational Physics*, Vol.277, pp.9628-9642, 2008.
- 20) Steffen, M., Wallstedt, P. C. and Kirby, R. M.: Examination and Analysis of Implementation Choices within the Material Point Method (MPM), *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.31, No.2, pp.107-127, 2008.
- 21) Søren, A. and Lars, A.: Analysis of Stress Updates in the Material-point Method, *Proceedings of the Twenty Second Nordic Seminar on Computational Mechanics*, pp.129-134, 2009.
- 22) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.
- 23) Chaniotis, A. K. and Poulidakos, D.: High order interpolation and differentiation using B-splines, *Journal of Computational Physics*, Vol.197, pp.253-274, 2004.
- 24) Belytschko, T. and Mullen, R.: Explicit integration of structural problems, *Finite elements in nonlinear mechanics*, Vol.2, pp.697-720, 1977.

(2015.9.*受付)

DEVELOPMENT AND VERIFICATION OF ENERGY SUPPRESSION SCHEME FOR THE MATERIAL POINT METHOD

Taka-Aki EDO and Hitoshi MATSUBARA

Material Point Method (MPM) is one of a mesh-free or grid-free numerical method. In recent years, the MPM method has been applied to geotechnical field under intense investigation because we can easily simulate large deformation phenomena of ground with exact Dirichlet boundary conditions by using this method. However, it is well known in the MPM simulation that physical bodies often undergo inexplicable fluctuation of elastic energy in some dynamic deformation analyses. In this paper we propose a novel numerical technique in order to suppress the energy fluctuation. In this technique the Moving Least Squares Method is applied to the strain field of particles as a smoothing interpolation scheme. In order to verify the proposed scheme, we showed some comparison analyses on elastic energy in dynamic problems.