

確率過程として見た地震動位相の不可解性

佐藤 忠信¹

¹正会員 東南大学教授 都市工程科学技術研究院 (210096, 中華人民共和国南京市四牌路2)

E-mail:satotdnbseu@yahoo.co.jp

地震動位相を線形位相遅れ部とそれからの変動部に分離し、位相差分の確率特性を明らかにする。差分を取る離散円振動数間隔の大きさを変え、大きさの異なる位相差分を計算し、その分散と自己共分散関数の特性から、位相がフラクタル特性を有していることを示し、位相は円振動数に關していたところ微分不可能な関数になっていることを明らかにする。差分間隔の大きな位相差分は差分間隔の微小な位相差分を足し込むことによって求められるので、差分間隔の異なる位相差分を求め、位相差分の確率特性が、差分間隔の大きさによりどのように変化するかを考察する。差分間隔の増大とともに、位相差分の確率分布特性は正規分布に漸近するが、差分間隔の小さいときには位相差分を裾野の厚い分布関数でモデル化しなければならないことが判明する。

Key Words : Earthquake motion, phase increment, stochastic characteristic, fractal, self-affine- similarity, indeferenciability of phase

1. まえがき

地震動は不規則な媒質中を伝播して来る波動であること、地震動を励起する断層の破壊過程はせん断破壊の現象であり、せん断面上のせん断応力やせん断ひずみの分布は本質的に不規則なので、地震動位相にはこうした不規則性の情報が内在しているはずである。現段階ではこうした不規則性を確定論的に決定した上で、地震動位相の不規則性を評価することは不可能なので、不規則性を不確定性に置き換えて位相過程を円振動数に関する不確定な関数、すなわち、確率過程として取り扱うのが合理的であるとして、地震動位相の確率特性を抽出するための研究を実施してきた。

それらは、地震動位相の位相差分が有している確率特性の一端を抽出し、地震動位相がフラクタル特性を有していることを明らかにした研究¹⁾²⁾、地震動位相が自己アフィン相似性を有していることを見だし、その特性を満たす最も単純な確率過程が非整数ブラウン運動過程であるので、その概念を用いて地震動位相を模擬することを提案した研究³⁾、自己アフィン相似性の仮定のみから誘導した地震動の確率特性を用いて、地震動振幅の減衰特性に言及した研究⁴⁾などである。しかしこれらの研究では確率過程を構成するのに、自己アフィン相似性の特性が表現できる積分核を設定した上で、ブラウン運動過程(ウィナー過程)を積分関数とする、ルベークス

チルシス積分の形式を用いていたため、位相差分の確率分布特性が、差分を取る離散円振動数間隔の大きさに関係なく、正規分布で規定されなければならないと言う基本的な制約が課せられていた。しかし、観測された地震動の位相を解析すると位相差分の確率密度関数は、本論文の第5章で明らかにされるように、差分を取る円振動数間隔に大きく依存している。そこで、地震動位相を確率過程としてモデル化するために、基本的に必要となる位相差分の確率特性とは何かを整理し、まとめ直すことにする。注意してほしいのは、本研究では、群遅延時間の積分で位相を計算せず、位相差分を式(3)に基づいて直接計算していることである。したがって、ここで作成した図-1,2,3の図面は、これまで発表してきた論文¹⁾⁴⁾に掲載されていた図面とおほぼ同であるが、改めて計算し直したものである。なお、第7章「むすび」以外の本文中で、重要な成果となるところには下線を引いて注意を喚起している。

2. 群遅延時間を用いない地震動位相の計算法

地震動の時刻歴が $f(t)$ で与えられるときに、そのフーリエ変換 $F(\omega)$ が次式で表現されるものとする。

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = A(\omega)\exp(i\phi(\omega)) \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 ω は円振動数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $R(\omega)$ と $I(\omega)$ はフーリエ変換の実数部と虚数部、 $A(\omega)$ と $\phi(\omega)$

はフーリエ振幅と位相であり，次式で定義される．

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \\ \phi(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)の第2式で与えられる位相は $[-\pi, \pi]$ の主値のみであるので，本解析で用いる位相では $-\pi$ 近傍の位相を π 近傍の値に接続するアンラップ操作が必要になる．現段階で，このアンラップ操作を合理的に行えるアルゴリズムは無いので，次式で与えられる位相差分 $d\phi(\omega)$ を足し合わせることで位相を求めることにする．

$$d\phi(\omega) = \frac{RdI - IdR}{R^2 + I^2} \quad (3)$$

ここに， dR と dI は式(1)で定義されたフーリエ変換の実数部と虚数部の円振動数 ω における差分を意味している．式(3)に基づいて位相差分を計算すると，実数部と虚数部の円振動数に関する差分が分子に現れるので，その精度が問題になる．ここでは中央差分を用いて，離散円振動数点で dR と dI を計算するが，その精度は円振動数領域における離散点の総数(離散円振動数間隔)に依存している．離散円振動数間隔は，記録の後にゼロを足し込むことにより制御できる．位相差分を足し合わせることで得られる位相の精度は，計算された位相を用い，フーリエ振幅は既知として，時刻歴を再現し，観測された時刻歴の各離散時間点での残差2乗和の平方根が1gal以下になるような離散円振動数間隔を設定することで，保証することにする．以下の解析に用いるのは，1994年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された加速度記録(離散時間間隔 0.02 秒)であり，離散点総数として 2^{24} 個以上あれば精度が保障される． 2^{24} 個の場合の離散円振動数間隔を“微小離散円振動数間隔”として $d\omega$ で表す．

計算された位相 $\phi(\omega)$ をさらに，線形遅れ部とそこからの変動部に分け，以下のように表すことにする．

$$\phi(\omega) = -\omega t_0 + \psi(\omega) \quad (4)$$

ここに， $-\omega t_0$ は線形位相遅れ部， $\psi(\omega)$ はそこからの変動部である．以下の解析では，この位相変動部を円振動数領域における確率過程と見なし，その確率特性を明らかにする．

式(3)によって位相差分を計算し，それを足し合わせて位相 $\phi(\omega)$ を計算する方法は，位相の円振動数に対する連続性は要求するが，その微分可能性を必要としないため，重要な概念になる．従来は，位相の円振動数に関する一階微分として定義される次式の群遅延時間

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{R(dI/d\omega) - I(dR/d\omega)}{R^2 + I^2} \quad (5)$$

を円振動数に対して積分することにより位相を求めている．式(3)と(5)の違いは大差のように見えるが，式(5)を用いて位相を求める場合には，少なくとも位相の円振動数に関する1階微分の連続性が保障されていなければなら

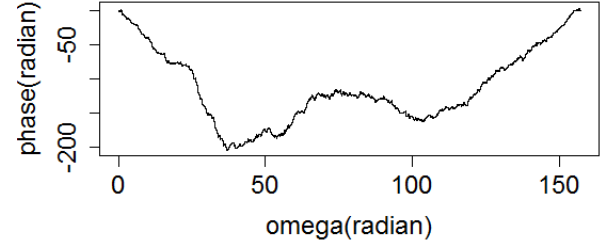


図-1 観測記録の位相から線形位相遅れ部を差し引いた位相変動部．円振動数の離散間隔は基本離散円振動数間隔 $d\omega$ を用いた場合で $d\omega = 100\pi/2^{24}$ ．

ない．位相の微分可能性を前提としなくてよいという基本的な重要な性質が式(3)に内蔵されている．

3. 位相差分過程が有する自己アフィン相似性

図-1は1994年釧路沖地震の際に釧路気象台で観測された加速度記録から，上記の位相変動部 $\psi(\omega)$ を計算したものである．円振動数は $d\omega$ ごとに離散化されているとして，各離散点の円振動数を

$$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l, \omega_{l+1}, \dots, \omega_U\} \quad (6)$$

とする．ここに， ω_U は解析の対象とする上限の円振動数であり，この場合には $U = 2^{24}$ である．また，対応する，位相変動部が以下のように離散化されているものとする．

$$\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l, \psi_{l+1}, \dots, \psi_U\} \quad (7)$$

ここでは，位相変動部の確率特性を直接調べるのではなく，微小離散円振動数間隔の位相差分

$$d\psi_l = \psi_{l+1} - \psi_l \quad (8)$$

を考察の対象とし，以下のような離散系列を考える．これを“微小位相差分過程”と名付けることにする．

$$\{d\psi_1, d\psi_2, \dots, d\psi_l, d\psi_{l+1}, \dots, d\psi_U\} \quad (9)$$

$d\psi_U = \psi_{U+1} - \psi_U$ となり，式(7)の離散系列をはみ出すが， ψ_{U+1} まで有効に計量されているとすれば問題はない．

ここでは，既に発表済みの解析方法³⁾を利用して，位相差分過程が自己アフィン相似性を有しており，フラクタル過程としてモデル化されなければならないことを明らかにする．

式(9)のように計算された微小位相差分過程 $\{d\psi_l\}$ を用いて，その自己相関関数を求める．図-2の一部にその結果が示されている．図中の細実線がそれである．横軸は離散円振動数ではなく，振動数の離散化ステップ点番号になっている点に注意してほしい．なお自己相関関数は60ステップ目が1になるように正規化されている．図から明らかのように， $\{d\psi_l\}$ の相関はかなり長い振動数ス

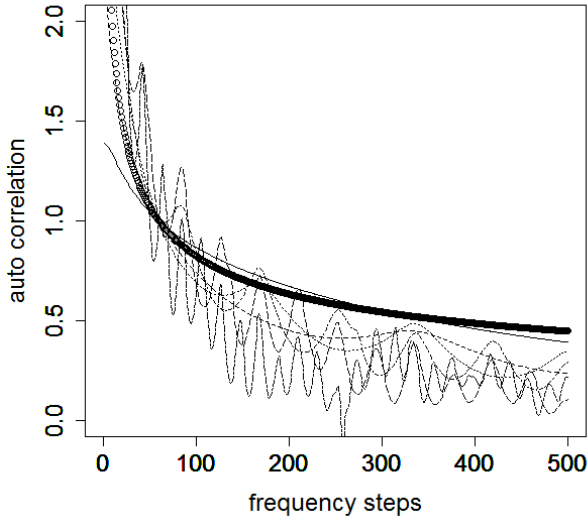


図-2 地震動位相変動部の位相差分の自己相関関数に及ぼす差分間隔の影響。各線の差分円振動数間隔は、細実線： $d\omega = 100\pi/2^{24}$ 、破線： $4d\omega$ 、点線： $8d\omega$ 、一点鎖線： $16d\omega$ 、波破線： $32d\omega$ 、二点破線： $64d\omega$ 、である。○印は式(23)の結果から求まる理論曲線。すべて61ステップ目が1になるように正規化。

テップにわたって続くことが分かる。こうした現象は長期記憶⁹⁾と言われている。これから、微小位相差分過程が離散円振動数点ごとに独立性を有しているという仮定は成立しない事が分かる。また、図中には、その他に、破線、点線、一点鎖線、波破線、二点鎖線が描かれているが、それらは離散円振動数 $\Delta\omega$ の値を微小離散円振動数間隔 $d\omega$ の4, 8, 16, 32, 64倍としたときに求められる位相差分過程 $\{\Delta\psi\}$ に対する自己相関関数を60ステップ目が1になるよう正規化して描いたものである。これらの線群はほぼ似たような形状を示している。位相差分過程の自己相関関数は離散円振動数間隔の大きさによらずほぼ似たような減少傾向を持つ、この性質は地震動位相差分過程が持っている特異的な確率特性である。

この特性の持つ意味を明確にするため、 $\Delta\omega$ 間隔で離散化された円振動数列

$$\{\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_t, \dots, \omega_M\} \quad (10)$$

に対して求められている位相差分列

$$\{\Delta\psi_1(\omega_1), \dots, \Delta\psi_t(\omega_t), \dots, \Delta\psi_M(\omega_M)\} \quad (11)$$

と $\Delta\omega$ の c 倍の間隔 $\Delta\Omega = c\Delta\omega$ で離散化された円振動数列

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_s, \dots, \Omega_t, \dots, \Omega_M\} \quad (12)$$

に対して求められている位相差分列

$$\{\Delta\psi_1(\Omega_1), \dots, \Delta\psi_t(\Omega_t), \dots, \Delta\psi_M(\Omega_M)\} \quad (13)$$

を考えてみる。すると、図-2の関係は、 $\Delta\omega$ 間隔で計算された位相差分の自己相関と $\Delta\Omega$ 間隔で計算された自己相関との間に比例関係が成立していることを示している。

したがって、式(11)の過程列から求められる自己相関 $\gamma_{\Delta\psi}(\omega)$ と式(13)の過程列に基づく自己相関 $\gamma_{\Delta\psi}(\Omega)$ の間に、次式の関係が成立しなければならない。

$$\gamma_{\Delta\psi}(\Omega) = \gamma_{\Delta\psi}(c\omega) = \lambda \gamma_{\Delta\psi}(\omega) \quad (14)$$

ここに、 λ は比例定数である。式(14)の関係は、離散円振動数間隔の大きさを c 倍にすると、その自己相関の値は元の離散円振動数間隔での自己相関と相似になることを意味している。この値が c の関数として定義されると、位相差分過程が自己アフィン相似性⁹⁾を有することになる。自己アフィン相似性を有する確率過程はフラクタル特性⁷⁾を有している。フラクタルの概念はフランスの数学者 Mandelbrot⁹⁾により導入された幾何学の概念であり、簡単に言うと複雑な図形であり、いくら細部を拡大しても複雑さを保つ図形のことをいう。図形の一部を抜き出すと全体と似た形になる図形を自己相似性のある図形と言うが、自己アフィンと言う概念は縦横の相似率が異なっている図形一般を指している。

λ の値を決定するために、微小円振動数間隔を $d\omega$ を $100\pi/2^{24}$ としたときの位相変動部の差分過程にエルゴード性を仮定し、円振動数 $\omega + \Delta\omega$ と ω との間の位相差分を

$$\Delta\psi(\Delta\omega, \omega) = \psi(\omega + \Delta\omega) - \psi(\omega) \quad (15)$$

で定義し、 $\Delta\omega$ を一定に保ったまま、次式で定義される $\Delta\psi(\Delta\omega, \omega)$ の円振動数に対する2乗和平均を求め、その確率的性質を調べてみる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\psi}^2(\Delta\omega) &= \frac{1}{\omega_M - \Delta\omega} \int_0^{\omega_M - \Delta\omega} \Delta\psi(\Delta\omega, \omega)^2 d\omega \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 ω_M は $\psi(\omega)$ の与えられている円振動数の上限である。得られた結果が図-3に示されている。

図から明らかなように $\sigma_{\Delta\psi}^2(\Delta\omega)$ は $\Delta\omega$ のべき乗関数として表現されている。 $\Delta\omega$ のべき乗指数を $2H$ としたときに最小二乗法で決定した H の値が図の説明文中に与えられている。 H はHurst指数⁹⁾と名付けられているフラクタル現象を特徴づけるパラメータである。位相変動部の位相差分過程の分散が離散円振動数間隔のべき関数になるというこの性質も、地震動位相が保持している特異的な確率特性の一つである。したがって、位相差分過程の分散は次式のように与えられることになる。

$$\sigma_{\Delta\psi}^2(\Delta\omega) = \sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H} \quad (17)$$

σ_H^2 の値は $\Delta\omega \rightarrow 0$ の極限での位相差分過程の分散値を規定する係数である。

いま、式(7)で定義された離散円振動数点に対する位相の離散確率過程を以下のように書き変え、

$$\{\psi_1, \dots, \psi_s, \dots, \psi_t, \dots, \psi_M\} \quad (18)$$

改めて $\Delta\omega = \omega_t - \omega_s$ と置き、 $\Delta\psi = \psi_t - \psi_s$ とすれば、式(17)は以下のように書き換えることができる。

$$E[(\psi_t - \psi_s)^2] = |\omega_t - \omega_s|^{2H} \sigma_H^2 \quad (19)$$

式(19)で $\omega_1 = 0$ で $\psi_1 = 0$ であることを考慮すれば,

$$E[(\psi_t - \psi_1)^2] = E[\psi_t^2] = |\omega_t|^2 \sigma_H^2 \quad (20)$$

と置けるので、次式が得られる。

$$E[(\psi_t - \psi_s)^2] = \sigma_H^2 \{ |\omega_t|^{2H} + |\omega_s|^{2H} - 2\gamma(\psi_t, \psi_s) \} \quad (21)$$

ここに、 $\gamma(\psi_t, \psi_s)$ は ψ_t と ψ_s の自己共分散であり、式(19)を再度利用すれば、これは次式のように与えられる。

$$\gamma(\psi_t, \psi_s) = \frac{\sigma_H^2}{2} \{ |\omega_t|^{2H} + |\omega_s|^{2H} - |\omega_t - \omega_s|^{2H} \} \quad (22)$$

さらに、 $\omega_k = \omega_{t+k} - \omega_t = k\Delta\omega$ として、 ψ の差分過程 $\Delta\psi_t = \psi_{t+1} - \psi_t$ に対する自己共分散 $\gamma_{\Delta\psi}(\omega_k)$ を求めると

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta\psi}(\omega_k) &= \text{Cov}(\Delta\psi_t, \Delta\psi_{t+k}) \\ &= E[(\psi_{t+1} - \psi_t)(\psi_{t+k+1} - \psi_{t+k})] \\ &= \gamma(\psi_{t+1}, \psi_{t+k+1}) - \gamma(\psi_{t+1}, \psi_{t+k}) \\ &\quad - \gamma(\psi_t, \psi_{t+k+1}) + \gamma(\psi_t, \psi_{t+k}) \end{aligned}$$

となるので、これに式(22)を代入すれば

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta\psi}(\omega_k) &= \frac{1}{2} \sigma_H^2 \{ |\omega_{k+1}|^{2H} - 2|\omega_k|^{2H} + |\omega_{k-1}|^{2H} \} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_H^2 (\Delta\omega)^{2H} \{ |k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H} \} \end{aligned} \quad (23)$$

が求められる。これは k のみの関数となるので $\{\Delta\psi_t\}$ は定常過程となる。また式(23)より、 $\gamma_{\Delta\psi}(\omega_k)/\sigma_H^2(\Delta\omega)^{2H}$ は k (振動数ステップ)のみの関数となり、 $\Delta\omega$ に関係しないことが、 $\{\Delta\psi_t\}$ 過程の特徴になっていることが分かる。ここで得られた結果は図-2の結果と整合的である。図中の○印が式(23)の結果を示している。また、式(17)を求めるときに $\Delta\psi(\omega)$ に ω に関する定常性を仮定したことへの保証を与えている。

式(23)の関係を式(14)に代入し、 $\omega_k = k\Delta\omega$ であること、式(23)に Ω_k を代入しても、式(23)の関係式が成立することと $\Omega_k = k\Delta\Omega$ ならびに $\Delta\Omega = c\Delta\omega$ であることを考慮すれば、式(14)の λ の値が次式のように決定できる。

$$\lambda = c^{2H} \quad (24)$$

また、 $\Omega = c\omega$ であることと式(19)ならびに式(24)を考慮すれば、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} E[(\psi_t(\Omega) - \psi_s(\Omega))^2] &= c^{2H} |\omega_t - \omega_s|^{2H} \sigma_H^2 \\ &= E[(c^H(\psi_t(\omega) - \psi_s(\omega)))^2] \end{aligned} \quad (25)$$

これから、円振動数の計測縮尺を c 倍にすると、位相差分の計測縮尺が c^H 倍に成り、円振動数の相似率と位相差分のそれとが異なるという自己アフィン相似性を位相差分が有していることが明らかになる。自己アフィン相似性を有する確率過程はフラクタル特性を有しているので^{10,11)}、地震動の位相差分はフラクタル特性を有する確率過程としてモデル化されなければならないことが、式(14)と(24)の結果から要請される。

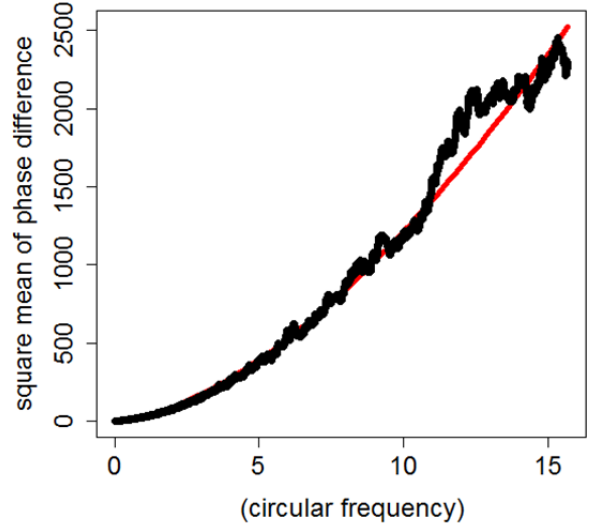


図-3 位相差分の二乗和平均 $\sigma_{\Delta\phi}^2(\Delta\omega)$ (縦軸)と円振動数差 $\Delta\omega$ (横軸)の関係。実線：最小二乗近似曲線で $\sigma_{\Delta\phi}^2 \sim \sigma_H^2 \Delta\omega^{2H}$ で近似；●点：観測値から求められるデータ；同定された値： $H = 0.80990$, $\sigma_H^2 = 29.36$

4. 地震動位相の微分不可能性について

第3章で地震動位相変動部がフラクタル特性を有していることを示した。フラクタル特性を有する関数はいたるところ微分不可能な関数として定義されるので、位相の円振動数に関する1階微分である群遅延時間が定義できないこと¹²⁾は明らかであるが、ここでは、もう少し具体的にその内容を解説することにする。

これまで発表してきた成果に基づいて、第3章で得られた位相変動部 $\psi(\omega)$ のフラクタル特性を、最も簡単に表現できる確率過程が非整数ブラウン運動過程¹³⁾であるので、それで $\psi(\omega)$ をモデル化し次式を得た⁴⁾。

$$\psi(\omega) - \psi(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\omega} K(\omega - \tau) dW(\tau) \quad (25)$$

ここに、 $\psi(0)$ は初期値、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数で、 $dW(\tau)$ は τ 点でのブラウン運動増分過程(ワイナー増分過程)であり、積分核は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K(\omega - \tau) &= \begin{cases} (\omega - \tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2} & (\tau < 0) \\ (\omega - \tau)^{H-1/2} & (0 \leq \tau \leq \omega) \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

式(25)の表現は位相過程を連続確率過程としたものであるが、このままでは、その数理特性を簡潔に把握することが困難なので、式(25)を離散円振動数間隔 $d\omega$ で離散化した、次式のような離散確率過程を考えることにする。

$$\psi_j - \psi_0 = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \sum_{l=-\infty}^{j-1} K_{jl} dW_l \quad (27)$$

ここに、 $\omega_j = j \cdot d\omega, \tau_l = l \cdot d\omega = \omega_l, \psi_j = \psi(\omega_j), K_{jl} = K(\omega_j - \tau_l)$ であり、 dW_l は離散化されたブラウン運動増分過程であり、次式で定義される。

$$dW_l = \sqrt{d\omega} \sigma_b \eta_l \quad \eta_l \sim N(0,1) \quad (28)$$

σ_b^2 はブラウン運動過程を規定する分散の円振動数に対する比例係数で有限な一定値であり、 η_l は標準正規分布から独立に生成される乱数列である。式(27)を用いて ω_j 点における位相変動部の位相差分 $d\psi_j$ を計算すると

$$d\psi_j = \psi_{j+1} - \psi_j = a(d\omega)^H \sigma_b \eta_j + a \sum_{l=-\infty}^{j-1} (K_{j+1,l} - K_{j,l}) dW_l \quad (29)$$

が得られる。 $a = 1/\Gamma(H + 1/2)$ であり、 $H = 1/2$ のときには $a = 1$ となる。また、 $K_{j+1,j} = K(\omega_j + d\omega - \omega_j) = (d\omega)^{H-1/2}$ であることを用いた。さらに、 $\tau < \omega$ の全領域に渡り次式が成立すること

$$K_{j+1,l} - K_{j,l} = K(\omega_j + d\omega - \tau_l) - K(\omega_j - \tau_l) = \{(j+1-l)^{H-1/2} - (j-l)^{H-1/2}\} (d\omega)^{H-1/2} \quad (30)$$

$$= B_{jl} (d\omega)^{H-1/2}$$

を用い、式(28)の関係を考慮すれば、式(29)は次式となる。

$$d\psi_j = a(d\omega)^H \sigma_b \eta_j + a(d\omega)^H \sigma_b \sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl} \eta_l \quad (31)$$

式(31)の両辺を $d\omega$ で割れば、群遅延時間の表現形式として次式が得られる

$$\frac{d\psi_j}{d\omega} = a(d\omega)^{H-1} \sigma_b \sum_{l=-\infty}^j B_{jl} \eta_l \quad (32)$$

式(32)の右辺の表記法が式(31)と異なるのは、式(31)の右辺第1項を $B_{jj} = 1$ を考慮して、和記号の中に組み入れたからである。注意してほしいのは $1/2 \leq H < 1$ であるから、 $d\omega \rightarrow 0$ の極限で $(d\omega)^{H-1} \rightarrow \infty$ となることである。一方、 η_l は正規乱数であるので、群遅延時間は $d\omega \rightarrow 0$ の極限で、いたるところ不連続な関数となることが分かる

式(31)を用いて、 $(d\psi_j)^2$ を求めると次式のような3項からなる表現が得られる。

$$(d\psi_j)^2 = a^2 (d\omega)^{2H} \sigma_b^2 (\eta_j)^2 + 2a^2 (d\omega)^{2H} \sigma_b^2 \eta_j \left(\sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl} \eta_l \right) + a^2 (d\omega)^{2H} \sigma_b^2 \left(\sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl} \eta_l \right)^2 \quad (33)$$

式(33)の右辺第3項の括弧の中が以下のように展開

$$\left(\sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl} \eta_l \right)^2 = \sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl}^2 \eta_l^2 + 2 \sum_{k=-\infty}^{j-1} \sum_{l=k+1}^{j-1} B_{jk} B_{jl} \eta_k \eta_l$$

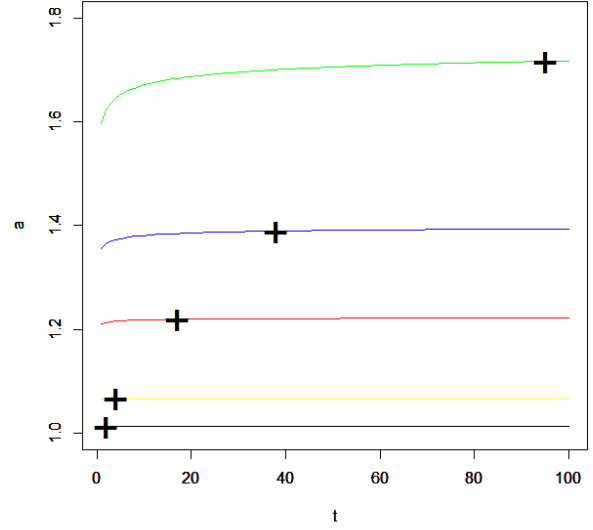


図4 式(35)中に現れる $a = 1 + \sum_{l=-L}^{j-1} B_{jl}^2$ 項の収束性に関する図。縦軸はその値であり、横軸は $L + j = 1000t$ としたときの t の値である。下から黒、黄、赤、青、緑の実線が示されているが、それぞれハースト指数の値が $H = 0.6, 0.7, 0.8, 0.85, 0.9$ に対応している。図中の+印は各々の H の値に対し、 a の値の誤差が $t = \infty$ とした時の値の1%以下になる点である。

できること、さらに、 η_j が標準正規乱数であるので、次式の関係が成立すること、

$$E[\eta_j] = 0, E[\eta_k \eta_l] = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (34)$$

を考慮した上で、式(33)の両辺の期待値を取れば、次式が得られる。

$$E[(d\psi_j)^2] = a^2 (d\omega)^{2H} \sigma_b^2 \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl}^2 \right) \quad (35)$$

式(35)で、 $\sigma_b^2 = a^2 \sigma_b^2 (1 + \sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl}^2)$ とし、 $d\psi_j$ を円振動数 $\omega = \omega_j$ における $d\psi$ に置き換え、 $d\omega$ を $\Delta\omega$ に置き換えれば、式(35)が式(17)と同等になる。したがって、非整数ブラウン運動過程でモデル化した位相差分の分散特性は、観測記録から求められる分散特性と一致する。 $1 + \sum_{l=-\infty}^{j-1} B_{jl}^2$ の値が、 $1/2 \leq H < 1$ の範囲で、有限な一定値になることは、数値計算で明らかにできる。この和の計算では、 l に関して $-\infty$ から足し込まなければならないが、 j の値の3~30倍の値に負符号を付けた値を l の下限值とすれば、 $H = 1$ の近傍以外では、安定した値が求められる。図4は l の下限値を $-L$ とした時に、 H によって $1 + \sum_{l=-L}^{j-1} B_{jl}^2$ と $L + j$ の関係がどのように変化するかを図示したものである。図から明なように、ハースト指数の値が大きくなるにつれて、 $L + j$ の値は急速に大きくなる事が分かる。

観測地震動記録から求まる位相をそのまま用いて、直接その微分不可能性を検証することは困難であるが、非整数ブラウン運動過程としてモデル化した位相確率過程の表現⁴⁾を用いると、式(32)のように地震動位相過程の微分不可能性が説明できる。このモデル化に当たっては、観測地震動記録から求められる位相の確率特性を、現時点で可能な限り忠実に反映したモデルとなっているので、式(32)に基づいて位相が微分不可能な確率過程になるという結論に矛盾はないと考えている。なお、冒頭にも述べたが、実際の観測記録から求まる位相差分の分散特性と自己相関関数の解析から、位相にフラクタル性があることが明らかにされているので、間接的には、位相の微分不可能性は検証されていると言える。

5. 観測記録から判明する地震動位相の確率特性の特異性

観測された地震動から求められる図-1の位相変動部から式(8)で定義されるような微小位相差分過程を求めるとその平均値は、式(4)の定義から、ゼロとなるので、その分散 $\sigma_{d\psi}^2$ を数値的に求め、位相差分 $d\psi_l$ を

$$z_{d\psi l} = d\psi_l / \sigma_{d\psi} \quad (l = 1, 2, \dots, U) \quad (36)$$

と正規化した上で、 $z_{d\psi l}$ を確率密度関数の形式で図示したのが図-4である。黒塗りの棒グラフで示されている。図中には、標準正規分布の密度関数 $N(0,1)$ 以外に、標準偏差を0.5とした正規密度関数 $N(0,0.5)$ も同時に示している。図から明らかなように、正規化された微小位相差分過程の分布特性は原点对称であり、歪度が小さく尖り度の大きい分布特性を有している。また、正規分布では表現しきれない特性を有していることも分かる。この確率密度関数を、カーネル法¹⁴⁾を用いて、近似する。カーネル法で近似曲線を求めるとき、式(36)で求められる正規化変数 $z_{d\psi l}$ の値の範囲が問題になる。この場合には、 $z_{d\psi l}$ の最小値と最大値は-273.85と77.085であり、正規化変数の変域が広すぎるので、それを[-8,8]に限定したうえで、この領域より外に出る $z_{d\psi l}$ の値は無視した(この場合は無視したデータの割合は0.098%である)上で、カーネル法で図-4の確率密度関数を近似する関数形を決定した。関数形は数値で与えられ、正規化確率変数の有効範囲を512等分した各点で確率密度関数値が与えられている。この点を結んだのが図中の黄実線である。

この微小位相差分過程のデータを用いて、 n 個飛ばしに n 個づつ足し合わせて得られる、次式で定義されるような、差分間隔を大きく取った位相差分過程を考えてみる。

$$\Delta\psi_j = \sum_{i=1}^n d\psi_{n(j-1)+i} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (37)$$

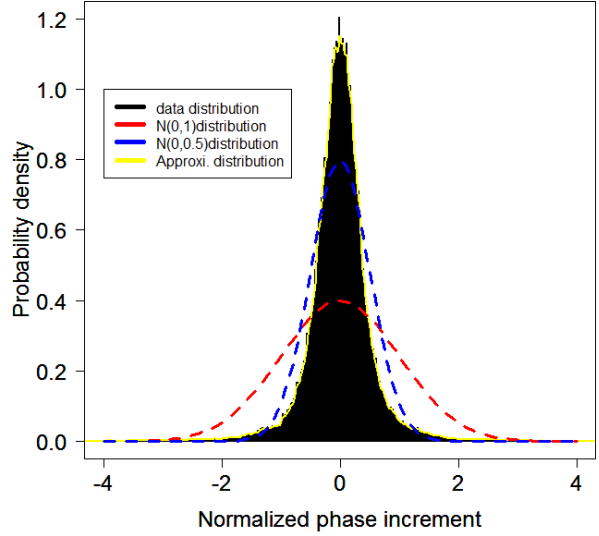


図-4 微小離散円振動数間隔 $d\omega (= 100\pi/2^{24})$ ごとに位相変動部の位相差分 $d\psi$ を求め、それを式(36)に基づいて正規化した値の確率密度分布(黒塗の棒グラフ)。それをカーネル法で近似した曲線(黄実線)。位相差分列の個数は 2^{24} 個。

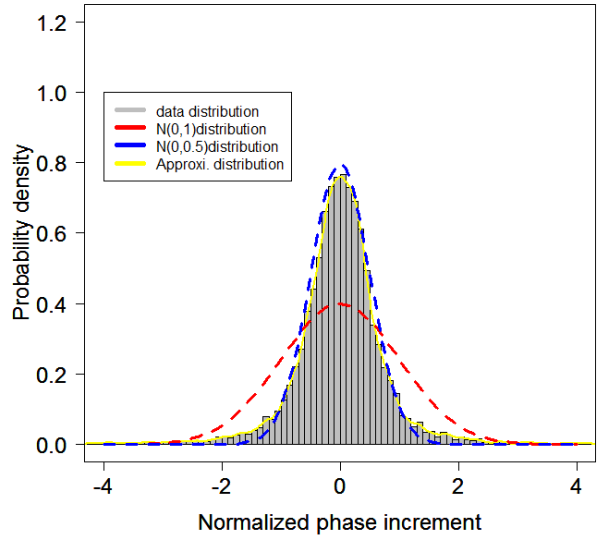


図-5 図-4に与えられている位相差分を 2^{10} 個足し合わせ、離散円振動数間隔 $\Delta\omega = 2^{10}d\omega$ 間隔での位相差分 $\Delta\psi$ を計算し、その正規化確率密度(灰色棒グラフ)を描いたもの。黄実線はカーネル法による近似曲線。

ここに、 $M = U/n$ であり、差分間隔を大きく取ったときの離散点総数である。この場合は位相差分過程の離散円振動数間隔を $\Delta\omega$ とすれば、次式が成立している。

$$\Delta\omega = n \cdot d\omega \quad (38)$$

当然、 $\omega_U = U \cdot d\omega = M \cdot \Delta\omega = \omega_M$ となっている。

図-5は $n = 2^{10}$ ($M = 2^{14}$)として計算した $\Delta\psi_j$ を正規化

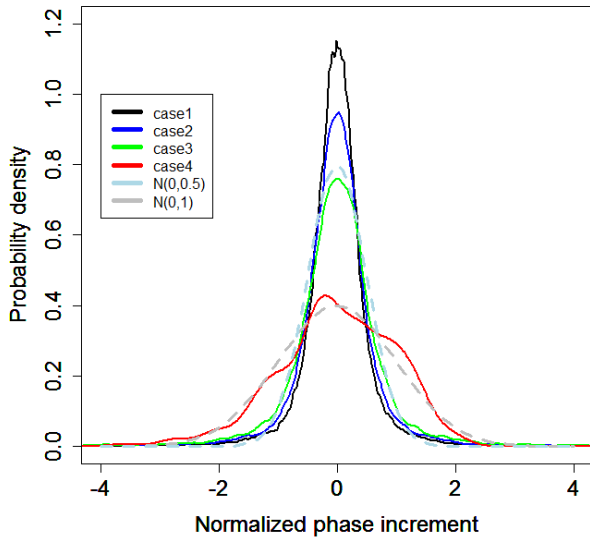


図-6 微小円振動数間隔 $d\omega$ で離散化された位相差分 $d\psi$ を足し合わせて求められる差分間隔の大きな位相差分 $\Delta\psi$ の正規化確率密度関数の近似関数をカーネル法により求めたもの。cas1は微小位相差分そのもの(黒実線)、case2は微小位相差分を 2^8 個足し合わせたもの(青実線)、case3は微小位相差分を 2^{10} 個足し合わせたもの(緑実線)、case4は微小位相差分を 2^{14} 個足し合わせたもの(赤実線)である。薄青色波線は正規分布 $N(0,0.5)$ を灰色波線は標準正規分布 $N(0,1)$ を表している。位相差分の確率分布特性が差分間隔の取り方によって変わることを、微小位相差分の足し込み数によらずその歪度はほぼゼロであるが、足し込み数を大きくすると尖り度が次第に小さくなり、 $n = 2^{14}$ 程度まで大きくすると、正規化された位相差分の確率密度関数は標準正規分布で表現可能になることなどが分かる。

した値の確率密度分布を示している。図中の灰色棒グラフがそれである。図から明らかなように、微小位相差分をかなりの数足し込むと、正規化された位相差分過程の尖り度は微小位相差分過程のそれよりかなり小さくなるが、それでも、その正規化分布特性を、標準正規確率密度関数で近似することは困難である。この場合には、正規化された位相差分過程は $N(0,0.5)$ の正規確率密度関数(青破線で表示)でほぼ近似できている。この場合の確率密度関数をカーネル法で近似した曲線が黄実線である。微小位相差分を足し込んで求まる差分間隔の大きな位相差分を正規化した確率密度関数が足し込み数によってどのように変化するかを示したのが図-6である。図中にcase1~4に分けて、黒・青・緑・赤実線で示されているのがそれである。黒実線は図-4の黄実線($n = 1$)を、緑実線は図-5の黄実線($n = 2^{10}$)をそのまま写したもので

あり、青実線は $n = 2^8$ とした場合を、赤実線は $n = 2^{14}$ とした場合である。図中には、 $N(0,0.5)$ が薄青波線で、 $N(0,1)$ が灰色波線で示されている。図から明かなように、足し合わせる微小位相差分の数を大きくして行くと、正規化された位相差分の確率密度関数は尖り度が次第に小さくなり、足し合わせの個数を 2^{14} 程度にすると、ほぼ標準正規分布で近似できるようになる。このように、位相差分を計算する差分間隔を変えるとその確率分布特性が異なるという事実が、地震動位相の持つ特異性である。正規化された微小位相差分の尖り度が大きくなる主な原因は、微小位相差分の分布の裾野が厚いため、微小位相差分値に対してその分散値が相対的に大きくなり、微小位相差分値を大きな標準偏差で正規化することにある。一方、位相差分を計算する差分間隔が大きくなると、その分布の裾野が薄くなり、正規分布に近づくために、微小位相差分を多数足し合わせた位相差分の分布が正規分布に一致するようになる。したがって、地震動位相を模擬するためには、離散円振動数間隔の取り方により、位相差分の確率密度関数の裾野の厚みが異なる、という確率特性が適切に表現できる確率密度関数が必要になる。

足し合わせる確率変数に独立同分布の仮定が許される場合には、足し合わせる数を大きくすれば、足し合わせて定義される確率変数は正規分布に近づくというのが中心極限定理の述べるところである。微小位相差分を足し合わせて、差分間隔の大きな位相差分を模擬するアルゴリズムでは、独立同分布の仮定が破城することは、簡単な思考によって示すことができる。それは、微小な差分間隔を考えたとしても、その間隔をさらに多数の超極微小間隔に分割しその各々の分割点に独立同分布で発生した超極微小位相差分を割り当てた上で、それを足し込んで微細差分間隔での位相差分にすることを考えてみることである。位相は連続関数であるから、極微小差分間隔はいくらでも小さくすることができ、足し合わせる極微小位相差分を無限に大きくすることが可能である。すると中心極限定理から、位相差分の確率分布特性は、差分間隔の取り方によらず、正規分布でなければならないということになる。一方、第3章での議論から、位相差分には相関性があり、独立分布の仮定が破城していることは分かっているので、同分布の仮定を設けずに、位相の確率特性を定義できるような理論体系が必要になってくる。次章はこの問題に対する現状分析である。

6. 確率過程として位相をモデル化するための議論

位相を確率過程としてモデル化するためには、その表現形式を与えなければならない。ここでは、ルベーグスチルシス型の積分方程式でそれを表現することにし、式(25)の形式を保持した次式でそれを定義することにする。

$$\psi(\omega) - \psi(0) = a \int_{-\infty}^{\omega} K(\omega - \tau) d\zeta(\tau) \quad (39)$$

第5章での議論に基づけば、積分核の部分は位相差分の相関特性を表現するものであるので、式(26)の表現をそのまま用いても問題が無いものとする。問題は $d\zeta(\tau)$ の定義である。ここでは、これを図-6のような特性を表現できるように、離散円振動数間隔 Ω の関数として定義される複数のパラメータ $\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega$ からなる確率密度関数 $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ を考え、それから独立同分布で生成されるサンプル列 $\{\eta_l\}$ を考え、式(28)と同じように微小円振動数間隔 $d\omega$ で離散化した $d\zeta(\tau)$ を次式のように定義することにする。

$$d\zeta_l = \sqrt{d\omega} \sigma_s \eta_l \quad \eta_l \sim S(\alpha_{d\omega}, \beta_{d\omega}, \gamma_{d\omega}) \quad (40)$$

ここでは、 $\Omega = d\omega$ となっている。

解決したい問題は、 η_l を $S(\alpha_{d\omega}, \beta_{d\omega}, \gamma_{d\omega})$ から独立同分布で生成したサンプル値であるとしたときに、 σ_s と $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ をどのように定義すれば、図-6に示したような特性が表現できるかということである。以下に、 $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ が満たさなければならない条件を明らかにする。議論を分かりやすくするために、式(39)を離散化したものを用いて、微小円振動数間隔での位相差分を求めると、式(31)の誘導と同じように次式が得られる。

$$d\psi_j = a(d\omega)^H \sigma_s \sum_{l=-\infty}^j B_{jl} \eta_l \quad (41)$$

ここで、式(41)で表現される位相差分 $d\psi_j$ を k 個足し合わせて得られる離散ステップ間隔の大きな位相差分 $\Delta\psi_j$ ($J = k \times j$) の表現形式について考察する。この場合、 $\Delta\psi_{j+1}$ は次式のように表現されなければならない。

$$\Delta\psi_{j+1} = d\psi_j + d\psi_{j+1} + \dots + d\psi_{j+k-1} \quad (42)$$

計算過程は省略するが、式(41)を(42)に代入し整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{j+1} &= a(d\omega)^H \sigma_s \sum_{l=-L}^{j-1} (\kappa_{j+k-l} - \kappa_{j-l}) \eta_l \\ &\quad + a(d\omega)^H \sigma_s \sum_{l=j}^{j+k-1} \kappa_{j+k-l} \eta_l \\ &= \psi_{j+k} - \psi_j \end{aligned} \quad (43)$$

一方、 $\Delta\psi_j$ ($J = k \times j$) については、離散円振動数間隔が $d\omega$ から $\Delta\omega$ に変更されるだけであるから、式(41)と同じように次式が成立しなければならない

$$\Delta\psi_{j+1} = a(\Delta\omega)^H \sigma_s \sum_{l=-\infty}^{j+1} B_{jl} H_l \quad (44)$$

この場合、 H_l は次式を満たしていなければならない。

$$H_l \sim S(\alpha_{\Delta\omega}, \beta_{\Delta\omega}, \gamma_{\Delta\omega}) \quad (45)$$

式(43)と(44)の右辺は同じものであるから、式(43)と(44)の左辺が確率的に同じものになるように、 $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ が定義されていなければならないことになる。別の言葉でいえば、確率密度関数 $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ を規定するパラメータ $\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega$ が離散円振動数間隔 Ω の関数として表現されることが必須になる。現状では $S(\alpha_\Omega, \beta_\Omega, \gamma_\Omega)$ として、どのような確率密度関数を選べば式(43)と(44)の右辺が同じ確率過程になるかを明確にすることができないが、少なくとも位相を確率過程としてモデル化するための条件が明らかにできたと考えている。

7. むすび

本研究は地震動位相が有している確率特性について、位相差分を足し込むことにより位相が求められるとする基本概念を前提として、位相差分の確率特性に考察を加えたものである。地震動位相を線形遅れ部とそこからの変動部に分け、変動部の位相差分過程を考察の対象とした。この位相差分過程を円振動数領域における確率過程と考え、確率変数の和を取り扱うときの基本定理である、中心極限定理が、位相差分過程の確率特性を規定するのにどのような制約を要請するのかを明確にした。まず、観測地震動記録から求められる位相差分過程の確率特性を明らかにした。次に、位相過程をルベークステルシス型の積分方程式で表現できるとし、中心極限定理の基本概念である独立同分布の仮定を、確率過程を定義する積分関数に設定すると、それから自然に導出される位相差分過程の確率特性では、観測記録のそれを説明できないことを明確にした。さらに、独立同分布の仮定を積分関数に保持したまま、観測記録が持つ特異的な確率特性を表現するために必要となる、積分関数の確率的制約について考察を加えた。得られた結果を要約すると以下のようである。

- 観測記録から求められる位相を線形遅れ部と、そこからの変動部に分けた上で、位相変動部の位相差分を計算すると、位相差分の分散特性が離散円振動数間隔のべき関数として表現されることが、そのべき乗指数の値が 1~2 の範囲に入ることを再確認した。
- 更に、位相差分の自己相関関数の形状から、位相差分は長期記憶を有している確率過程であること、自己相関関数の形状は離散円振動数間隔には依存しないことから、位相差分過程が自己アフィン相似性を有しており、フラクタル過程であることを明確に表示した。

- (c) その結果として、地震動位相変動部は円振動数に対する連続確率過程であるが、微分不可能な確率過程となっていることを明示した。
- (d) 観測された位相差分過程が保持している確率特性の基本的性質として、位相差分過程の確率分布特性が位相差分を計算する離散円振動数間隔の大きさにより変わること明らかにした。まず、微小な円振動数間隔($100\pi/2^{24}$)で微小位相差分過程を計算し、それを標準偏差で正規化した確率過程の確率密度関数は、原点对称であるが、歪度が小さく尖り度が大きく、標準正規分布とは全く異なっていること示した。その後、微小位相差分過程の成分を 2^{10} 個づつ足し合わせて得られる、円振動数間隔が $100\pi/2^{14}$ となる位相差分過程を検討の対象とし、それを正規化した確率密度関数も標準正規分布では表現できないことを示した。
- (e) 位相をルベーグスチルシス型の積分方程式で表現する場合に、積分核が位相差分の長期記憶特性を表現し、積分関数が位相の確率特性を担っていることを明示した。その上で、上記の位相差分の確率特性を説明できるようにするために、積分関数が保持しなければならない必要条件を明らかにした。

参考文献

- 1) Sato, T. : Fractal characteristics of phase spectrum of earthquake motion, *Journal of Earthquake and Tsunami*, 7(2), 1350010-1-17, 2013.
- 2) 佐藤忠信, 吉田郁政, 大島義信 : 位相のモデル化について, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol. 70, No.4(地震工学論文集第 33 巻), 1-273-1-284, 2014.
- 3) 佐藤忠信 : 地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol. 70, No. 2, pp.295-305, 2014.
- 4) 佐藤忠信 : 自己相似仮説から導出される地震動位相の確率特性と地震動振幅の減衰, Vol.70, No.3, pp.463-473, 2014.
- 5) 松葉育雄 : 長期記憶過程の統計, 自己相似な時系列の理論と方法, 共立出版社, 2007.
- 6) 本田勝也 : フラクタル, シリーズ非線形科学入門, 第 5 版, 朝倉書店, 2009.
- 7) Mandelbrot, B. : *The Fractal Geometry of Nature*, W H Freeman & Co, 1982.
- 8) Mandelbrot, B. B. and Van-ness, W. J. : *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*, SIAM Review, Vol.10, No. 4, 422-437.
- 9) Hurst, H. E., Black, R.P. and Simaika, Y. M.: *Long-term stage: an experimental study*, London, Constable, 1965.
- 10) Voss, R.F. : Fractals in nature: from characterization to simulation, *The Science of Fractal Image*, Chap.1, 21-70, (H.O. Peigen and D.Saup, eds.), Springer-Verlag, New York, 1988.
- 11) Kenneth F. : *Fractal Geometry; Mathematical Foundation and Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd, The Artium, Southern Gate, Chichester, 2003.
- 12) Karatzas, I. and Shreve, S. E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.
- 13) Biagini, F., Hu, Y. Oksendal, B. and Zhang T. : *Probability and Its Applications, Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer-Verlag London Limited, 2008.
- 14) Scott, D. W. : *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization*, Wiley, 1992.

(2015.9.11 受付)

MISTERY OF EARTHQUAKE MOTION PHASE FEATURED AS STOCHSTIC PROCESS

Tadanobu SATO

Decomposing the earthquake motion phase into a linear delay part and a fluctuation part, we investigated stochastic characteristics in the discrete phase difference process of fluctuation part. Because the observed earthquake motion phase has the long memory with respect to the circular frequency and results in the self-affine similarity characteristic of phase difference process, it therefore must be expressed by a stochastic process with the fractal nature. Under the premise that the earthquake motion phase is calculated by summing up a discrete stochastic process of phase difference, we assume that the earthquake motion phase can be expressed by a Lubesgue-Stieltjes type integral equation in which the kernel covers a long memory characteristic of earthquake motion phase and the integration function expresses its stochastic characteristic. We also assume the identically independent distribution characteristic on the stochastic nature of integration function. If it has fixed variance and mean values, based on the requirement from the Central Limit Theorem, the stochastic process of earthquake motion phase is turned to the fractional Brownian motion process but it cannot clearly express the observed earthquake motion phase characteristics. We therefore examine the necessary stochastic condition on the integral function