

# 振動解析に用いるランダム時系列の設定法について

佐藤 忠信<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 東南大学教授 城市工程科学技術研究院 (210096, 中華人民共和国南京市四牌路2)

E-mail:satotdnb@yahoo.co.jp

ナイキスト振動数帯域内でのフーリエ振幅を一定値とし、位相を振動数領域でのランダム系列とした上で、フーリエ逆変換により得られる時系列をランダム時系列と定義し、その数理特性を明らかにする。分散値が一定値となる正規分布を用いて、独立同分布の下で生成されるランダム系列を位相過程とすると、ピンクノイズと称されるランダム時系列が得られるが、この構成法には数理的な問題点の有ることを指摘する。これを解消する一番簡単な方法は位相過程を振動数領域におけるブラウン運動過程とすることであること明示した後、これを包含する確率過程である、非整数ブラウン運動過程を用いてランダム位相過程を表現することを提案する。これを用いて生成されるランダム時系列を入力とする1自由度系の応答特性の評価を通して、提案する方法の有用性を示す。

**Key Words :** *random input time history, white noise, random Fourier phase, Brownian motion, fractional Brownian motion, fractal, Hurst index, random vibration*

## 1. まえがき

ランダム振動解析では、「解析の対象とする構造系の不確実性をどのように設定すべきか？」という問いは、系の動的応答特性を的確に評価するときの本質的問題になるが、それと同時に、「構造系への入力時系列をどのように設定すべきか？」という問いも、振動解析という観点からは重要な課題<sup>1)</sup>となる。特に系の応答が非線形領域に至るような場合に対し、系の動的応答特性を確率的に評価しようとする、多数のサンプル構造系に対し逐一時間領域における振動応答解析を実施するという、モンテカルロ法的手法でその動特性を評価せざるを得ない。そのためには、構造物応答に及ぼす入力時系列の特性が少ないパラメータで規定され、その数理特性が明確であることが要求される。良く用いられるのはホワイトノイズと名付けられる、ランダム時系列である。これは、フーリエ振幅を一定値とし、フーリエ位相を振動数領域におけるランダム系列として与え、フーリエ逆変換により、時系列を生成するものである。よく使われているランダム時系列の生成法であるが、確率過程として見たときの性質を詳しく解説した成書は見当たらない。本論文では、フーリエ位相を振動数領域における離散確率過程とした上で、フーリエ振幅を一定値として、離散フーリエ逆変換で求まる離散時系列をランダム時系列とする立

場に立って、フーリエ位相過程を定義する確率密度関数の設定法によって、生成されるランダム時系列がどのような数理特性を示すのかについて、考察を加えることにする。

## 2. 基礎方程式

ここでは、簡単のため1自由度系について理論展開を行うが、多自由度系に対する展開にもそのまま用いることが可能である。地震動が入力する1自由度系の運動方程式は次式で与えられる

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m g(t) \quad (1)$$

ここに、 $m$ は質点の質量、 $c$ は減衰係数、 $k$ は剛性であり、 $t$ は時間、 $y$ は地盤との相対変位、 $g(t)$ は地盤の加速度時刻歴である。本研究では、これがランダム時系列で定義されるものとする。両辺を質量で割り、減衰比を $h$ とし、固有円振動数を $\omega_0$ とすれば、式(1)は次式のように書き換えられる。

$$\ddot{y}(t) + 2h\omega_s\dot{y}(t) + \omega_s^2 y(t) = -g(t) \quad (2)$$

ここに、 $h$ は減衰比、 $\omega_s$ は固有円振動数である。式(2)をフーリエ変換すれば、次式が得られる。

$$Y(\omega) = \frac{-G(\omega)}{-\omega^2 + 2ih\omega_s\omega + \omega_s^2} \quad (3)$$

ここに、 $Y(\omega)$ は $y(t)$ のフーリエ変換、 $\omega$ は円振動数、

$i = \sqrt{-1}$ ,  $G(\omega)$ は $g(t)$ のフーリエ変換で次式により定義される。

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt = A(\omega) \exp(i\phi(\omega)) \quad (4)$$

ここに、 $A(\omega)$ と $\phi(\omega)$ は $G(\omega)$ の振幅と位相である。いま、次式のように伝達関数 $T(\omega)$ を定義する。

$$T(\omega) = \frac{-1}{-\omega^2 + 2ih\omega_s\omega + \omega_s^2} = A_s(\omega) \exp(i\phi_s(\omega)) \quad (5)$$

ここに、 $A_s(\omega)$ と $\phi_s(\omega)$ は $T(\omega)$ の振幅と位相である。式(4)と(5)を式(3)に代入すれば次式を得る。

$$Y(\omega) = A_s(\omega)A(\omega) \exp\{i(\phi_s(\omega) + \phi(\omega))\} \quad (6)$$

式(6)のフーリエ逆変換でシステムの応答が求められる。式(5)のフーリエ逆変換は良く知られているインパルス応答関数 $f_I(t)$ であり、 $t < 0$ では恒等的にゼロであり、 $0 \leq t$ では、次式で表現される。

$$f_I(t) = \frac{1}{\omega_s \sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega_s t) \sin(\sqrt{1-h^2}\omega_s t) \quad (7)$$

また、構造物の応答 $y(t)$ は、 $f_I(t)$ と $g(t)$ の合成積で次式のように表現される。

$$y(t) = f_I(t) * g(t) \quad (8)$$

ここに、 $*$ は合成積を意味する記号である。

### 3. ランダム時系列を作成するために用いられている最も単純な方法論の問題点

ランダム振動解析に最も用いられるのは、「ホワイトノイズ」名付けられているランダム時系列である。それは、全ての円振動数領域にわたり $A(\omega) \equiv a$ ,  $a$ は任意の一定値、と置き、位相 $\phi(\omega)$ を振動数領域におけるランダム系列とするものである。ファーストフーリエ変換(FFT)を用いた離散フーリエ解析では、フーリエ振幅は離散時間間隔で規定されるナイキスト振動数までしか定義されないで、「ピンクノイズ」と名付けられたランダム時系列になる。ここでは、位相のランダム性が正規分布で与えられるものとし、その平均値がゼロで分散が $\sigma_0^2$ で定義されているものとする。この場合に、 $\phi(\omega)$ を $\phi$ と表すことにすれば、その率密度関数は次式で与えられる。

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (9)$$

ここでは、式(9)に基づいて独立同分布の仮定の下に発生した振動数領域の正規ランダム系列を用い位相過程 $\{\phi(\omega)\}$ を与える。その上で、ナイキスト振動数範囲で $a \equiv 1$ と置き、FFTによる離散フーリエ逆変換によりラン

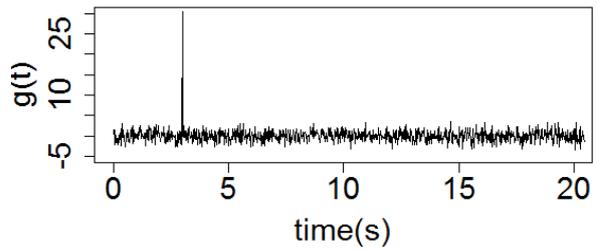


図-1 離散時間間隔を0.02秒,  $\sigma_0 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし、離散点総数を $2^{10}$ としたときの、 $G(\omega)$ を逆変換して求めた $g(t)$ の時刻歴。全体としてランダムな時刻歴になっているが、3秒のところにパルス状の波形が発生している。

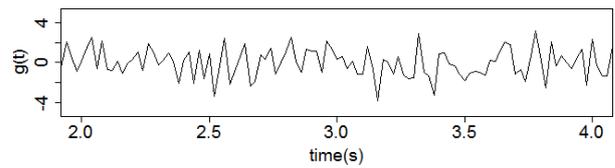
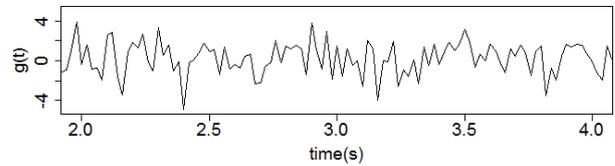
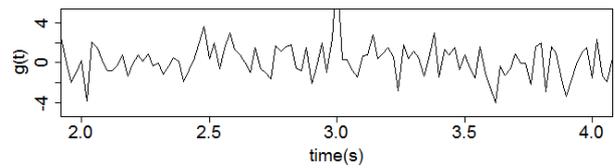
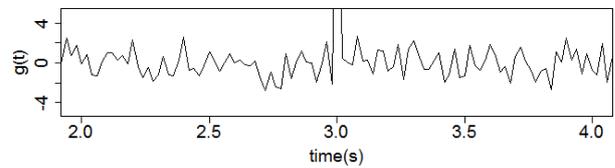


図-2 離散時間間隔0.02秒,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし、離散点総数が $2^{10}$ のときに、 $G(\omega)$ を逆変換して求めた $g(t)$ の時刻歴。ナイキスト振動数は25Hz, 式(7)で正規乱数を発生しそれを $\phi_g(\omega)$ とした。上から式(7)の標準偏差 $\sigma_0 = 1, 2, 4, 10$ としたもの。標準偏差が小さい時は $t_0 = 3(s)$ のところにパルス状の振幅が見えるが標準偏差が有る程度大きくなると、それが無くなり、ランダム時系列として扱えることが分かる。

ダム時系列 $g(t)$ を模擬することにする。 $g(t)$ を $t_0$ だけ時間の進む方向へシフトした関数 $g(t - t_0)$ のフーリエ変換は $G(\omega) \exp(-i\omega t_0)$ と表されるので、その効果を位相に組み込むためには式(9)に基づいて生成された位相過

程 $\{\phi(\omega)\}$ を $\{\phi(\omega) - \omega t_0\}$ と置き換えればよい。

図-1 は離散時間間隔を0.02秒、 $\sigma_0 = 1$ 、 $a = 1$ 、 $t_0 = 3(s)$ とし、離散点総数を $2^{10}$ としたときの、 $G(\omega)$ を逆変換して求めた $g(t)$ を示したものである。時系列としてはランダム性を帯びたものとなっているが、設定した時間シフト量3秒のところでパルス状の大きな振幅が見られる。こうしたパルス状の波形が出現する理由は、 $\sigma_0$ の値が小さい時には、式(9)に基づいて発生するランダム位相 $\phi(\omega)$ の値の多くが平均値ゼロの周りに集中するために、時間シフトの項 $-\omega t_0$ が卓越するためである。ナイキスト振動数内の振幅の全エネルギーが集中するとすれば、このパルスの振幅は50でなければならないが、その6割ほどの値となっている。この図から分かるように、位相を振動数領域における正規ランダム系列としただけでは、ピンクノイズと名付けるランダム時系列は生成できないことが分かる。そこで、他の条件は全く同じで、標準偏差のみを $\sigma_0 = 1, 2, 4, 10$ と変化させた場合の $g(t)$ を示したのが図-2である。図には3秒の前後1秒間の時系列が示されている。図から明らかになるように、標準偏差が有る程度以上大きくなると、パルス状の大きな振幅はなくなり、ランダム時系列と考えても問題の無いような時系列が生成されていることがわかる。フーリエ位相としては $[-\pi, \pi]$ の主値のみが意味を持つので、標準偏差が有る程度大きくなると発生する位相過程は時間シフトの影響 $-\omega t_0$ を無視できる程度に強いランダム性を持つようになるためである。したがって、式(9)の確率密度関数を用いて、位相のランダム系列を発生させ、それを用いピンクノイズとしての時系列を生成するには、確率密度関数を規定する分散の値が有る程度以上であれば問題が無いように見える。

しかし、式(9)から独立同分布で、位相 $\phi(\omega)$ のランダム系列を生成することには、本質的な問題が有る。図-3にその内容が示されている。基本的な条件は図-2のものと同じであるが、 $\sigma_0 = 4$ と固定した上で、離散点総数を上から順に $2^{10}$ 、 $2^{11}$ 、 $2^{13}$ 、 $2^{18}$ と変えたものである。離散時間間隔は0.02秒であるので、離散点総数を多くすることは継続時間を長く取ることと相当しているが、同時に、離散円振動数の離散間隔が $100\pi/2^{10}$ から、その1/2、1/8、1/256と次第に小さくなっている。図から明らかになるように、離散円振動数間隔の設定を変えるとランダム時系列の振幅が変化する。これは、従来の方法で生成したランダム時系列をランダム振動解析に用いることができないことを意味している。同じ条件で $\sigma_0 = 2$ としたものが、図-4に示されている。この場合には離散円振動数間隔が小さくなるにつれて $g(t)$ の時刻歴のランダム成分の振幅が小さくなり、3秒のところに現れるパルスの時間形状が明瞭になってくる。この時のパルスの振幅はナイキスト振動数内の波動の全エネル

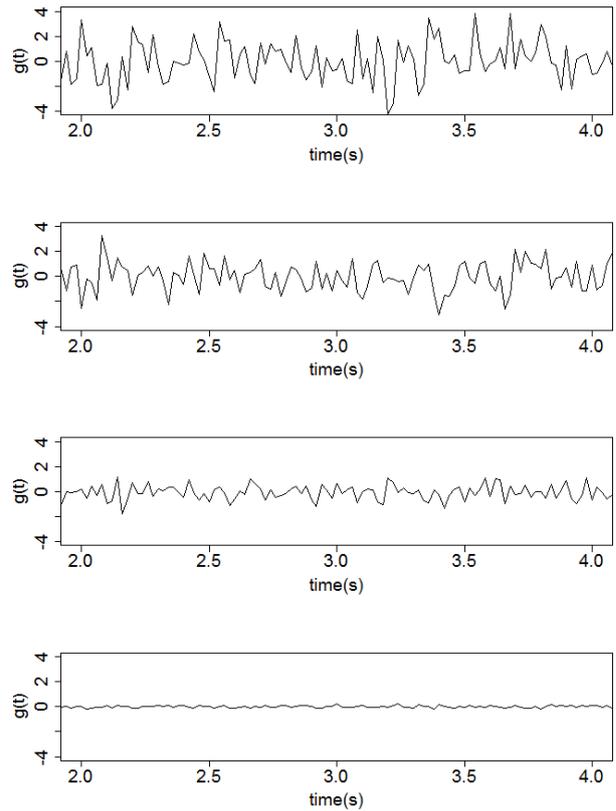


図-3 離散時間間隔を0.02秒、 $\sigma_0 = 4$ 、 $a = 1$ 、 $t_0 = 3(s)$ とし、離散点総数を $2^{10}$ 、 $2^{11}$ 、 $2^{13}$ 、 $2^{18}$ としたときの $g(t)$ の時刻歴。時系列のランダム性状はほぼ同じようであるが、離散点総数を増やすと振幅が次第に小さくなっていくことが分かる。

ギーが集中したときの13.8%程度の値になっている。これも従来の方法で定義されるピンクノイズをランダム時系列の候補にすることのできないことを示唆している。

構造物応答の観点から図-4で起こっていることを見直したのが図-5である。構造物は1自由度系を対象とし、固有振動数1Hz、減衰比を0.05とした。 $G(\omega)$ の定義には、離散時間間隔を0.02秒、 $\sigma_0 = 2$ 、 $a = 1$ 、 $t_0 = 3(s)$ を用いた。問題の所在を明らかにするために、離散点総数は $2^{11}$ 、 $2^{15}$ 、 $2^{18}$ 、 $2^{24}$ と変化した。図-5は上から離散点総数の増える順に並べてある。図から明らかになるように、離散点総数が少ない時には $g(t)$ のランダム変動の振幅が大きいため、応答は長時間わたって続くが、離散点総数が大きくなるにつれて、応答の時間形状は式(7)で定義されたインパルス応答関数を3秒間時間の進む方向へシフトして、その振幅を全体的に減少させた時系列に近づいて来る。ちなみに、この時の構造物応答の最大値は0.0200であり、インパルス応答関数の最大値0.1475の約13.5%強である。これらのことは、図-4で離散点総数が大きくなり、 $2^{18}$ 個となった時に、入力時系列 $g(t)$ がインパルス状になること、その振幅がナイ

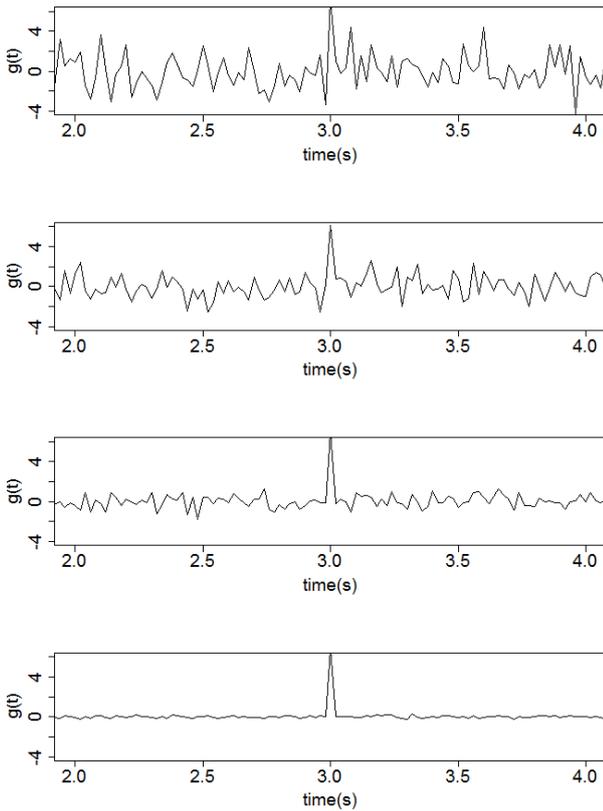


図-4 離散時間間隔を0.02秒,  $\sigma_0 = 2$ ,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし, 離散点総数を $2^{10}$ ,  $2^{11}$ ,  $2^{13}$ ,  $2^{18}$ としたときの $g(t)$ の時刻歴. 3秒のところのパルスのピーク値は順に7.28, 6.15, 7.02, 6.90である. 図-3とは異なり, ランダム部分の振幅は離散点総数を増やすと次第に小さくなっていくが, 3秒のところにあるパルスのピーク値はほぼ変わらないことが分かる. このピーク値はナイキスト振動数範囲の全波動エネルギーがパルスに集中していると考えた場のパルスの振幅50と比較すると, 振幅が13~14%まで減少していることが分かる.

キスト振動数内の波動のエネルギーが集中する場合に比べて13.8%まで減少していたことと, 整合的である. なぜこうしたことが起こるかを以下に説明する.

#### 4. ランダム時系列を作成するのに分散値が一定の正規乱数列で位相過程をモデル化してはいけない理由

図-3に示した現象が起こるのは, フーリエ解析では, 解析の対象とする変数の不連続性は加算個でなければならないとする条件に抵触するのが主な原因である. すなわち, 式(9)に基づいて独立同分布で生成した乱数列を位相過程とすると, 離散円振動数を無限小にすると, 位相過程は円振動数軸上のいたるところでランダムになるので, 位相過程が円振動数に対して完全な不連続関数と

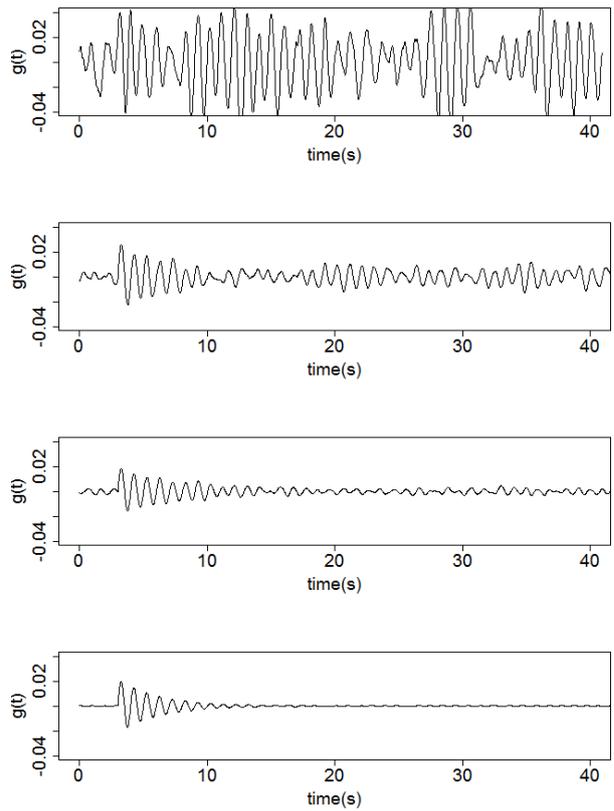


図-5 離散時間間隔を0.02秒,  $\sigma_0 = 2$ ,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし, 離散点総数を $2^{11}$ ,  $2^{15}$ ,  $2^{18}$ ,  $2^{24}$ として $G(\omega)$ を計算し, 式(6)のフーリエ逆変換により構造物の応答を求めた. 固有振動数1Hzで減衰比0.05とした. 上から順に離散点総数が多くなる. 離散点総数が少ない時は, 入力時系列のランダム性のため, 応答も長時間継続するが, 離散点総数が多くなると, 構造物の応答時間履歴は全体的に振幅が減衰したインパルス応答関数とほぼ似た形状を示すようになる. この時の構造物応答の最大値は0.0200であり, 式(7)から求められる最大値0.1475の約13.5%強である.

なってしまう, フーリエ逆変換に現れる積分値が計算できなくなるためである. この問題点は以下のようにすれば解決できる.

いま, 円振動数間隔 $\Delta\omega$ で離散化されているフーリエ振幅と位相から, 時間間隔 $\Delta t$ で離散化された時系列が, 離散フーリエ逆変換により次式のように与えられているものとする.

$$g(k\Delta t) = \sum_{j=-M_0/2+1}^{M_0/2} A_j \exp\{i(\phi_j - \omega_j t_0)\} \exp(i\omega_j k\Delta t) \Delta\omega \quad (10)$$

ここに $M_0$ はフーリエ逆変換の積分を有限領域で打ち切るための2のべき乗からなる整数,  $A_j$ と $\phi_j$ は離散点番号 $j$ でのフーリエ振幅と位相,  $\omega_j$ は離散点番号 $j$ での円振動数,  $t_0$ は関数 $g(t)$ を時間の進む方向にシフトする時

間量である。今、式(10)の表現がリーマン積分の形式で表されているものとして、 $\Delta\omega \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty$ のとき、式(10)がフーリエ逆変換の真値に収束することを仮定（この仮定が成立するかどうかは問題であるが、以下の記述から誘導される結果を認めれば、真値への収束が保証される）できれば、 $\Delta\omega$ を十分小さく取った状態では、離散点 $j$ と $j+1$ の間で、 $A_j \exp(i\omega_j k \Delta t - i\omega_j t_0)$ は一定値として取り扱うことができる。そこで、 $\Delta\omega$ を $m$ 等分した微小な離散円振動数間隔( $\Delta\omega/m$ )で、式(10)の和の $j$ 番目の項に現れる $\exp(i\phi_j)\Delta\omega$ の表現を、離散点 $j$ と $j+1$ の間で書き直すと、次式が得られる。

$$\left\{ \exp(i\phi_{j_1}) + \exp(i\phi_{j_2}) + \dots + \exp(i\phi_{j_m}) \right\} \frac{\Delta\omega}{m} \quad (11)$$

式(10)では単一項であった $\exp(i\phi_j)$ の表現が、 $\Delta\omega$ を $m$ 等分した式(11)の表現では、その離散点ごとに、式(9)の正規分布から独立に生成したランダム位相 $\phi_{j_l}$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) からなる $\exp(i\phi_{j_l})$ の列が加えられた形式、 $\{ \}$ の形式、に書き直されている。式(10)の単一項との整合性を考えるのなら、 $\phi_{j_1} = \phi_j$ とすればよい。式中の

$$\frac{1}{m} \left\{ \exp(i\phi_{j_1}) + \exp(i\phi_{j_2}) + \dots + \exp(i\phi_{j_m}) \right\} \quad (12)$$

は、ランダム位相列に関する期待値になっている。 $m$ を十分に大きくして行けば(離散点 $j$ と $j+1$ の間では $A_j \exp(i\omega_j k \Delta t - i\omega_j t_0)$ を一定値と取り扱うので、 $m$ はいくらでも大きくできる)、 $\phi$ の確率密度関数が式(9)で与えられるときには、 $\exp(i\phi)$ に対して式(9)を用いて期待値計算をすれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left\{ \exp(i\phi_{j_1}) + \exp(i\phi_{j_2}) + \dots + \exp(i\phi_{j_m}) \right\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\phi) p(\phi) d\phi = \exp(-\sigma_0^2/2) \end{aligned} \quad (13)$$

$j$ と $j+1$ の間の式(12)に基づく位相のランダム性が $\exp(-\sigma_0^2/2)$ で評価できたということは、 $j$ の全ての値に対して同じことが言える。すなわち、離散円振動数間隔を無限小にしたときの位相のランダム性の効果は $\exp(-\sigma_0^2/2)$ で評価できる。したがって、図-3と4に示した関数 $g(t)$ は、離散円振動数間隔を無限小にすると、そのランダム性が消失して、以下のような関数として表現されなければならないことになる。

$$g(t) = \exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2}\right) \delta(t - t_0) \quad (14)$$

この式を式(8)に代入すれば、構造物の応答は $t < t_0$ でゼロであり、 $t_0 \leq t$ では次式で表現されることになる。

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma_0^2}{2}\right)}{\omega_s \sqrt{1 - h^2}} \\ \cdot \exp(-h\omega_s(t - t_0)) \sin\left(\sqrt{1 - h^2} \omega_s(t - t_0)\right) \end{aligned} \quad (15)$$

今、 $\sigma_0 = 2$ とすれば $\exp(-\sigma_0^2/2) = 0.1353$ となり、図-4と5で説明していた振幅の減衰特性内容は、ここで導

かれた減衰項でうまく説明できる。

ここで得られた結論の大事なことは、ランダム時系列を生成するために、位相のランダム系列を分散が一定値の正規乱数列として作成すると、入力時系列の継続時間を十分大きく(離散円振動数間隔を十分小さくすることに相当)取れば、入力時系列のランダム性は減衰項を有するデルタ関数として表現され、時系列の評価が式(14)で与えられことである。これは構造物の応答特性とは無関係に独立に評価されるので、構造物の応答が線形であろうと非線形であろうと、時間関数をデルタ関数として構造物の応答計算を行って、その振幅を $\exp(-\sigma_0^2/2)$ すれば、従来の方法で生成したランダム時系列を入力とする構造物の応答特性が評価できることを意味している。構造物の応答が非線形状態に至るような、一般的な、構造物のランダム振動解析では、入力時系列のランダム特性、ここでは位相のランダム特性と言い換えても良い、が構造物の非線形応答特性に大きな影響を及ぼすはずである。こうした現象を解析的に研究しようとする立場からは、従来の方法でランダム時系列を生成し、それをランダム振動解析のための入力時系列に用いてはいけなことが分かる。以下に、この問題点の解決を図る。

## 5. ランダム時系列作成に用いることのできる位相の確率過程

ランダム時系列と考えられているピンクノイズを設定するために、分散が一定値を取る正規分布関数から独立同分布で発生したランダム列を位相とすると、3、4章で述べたような問題が起こり、ランダム時系列を発生できないことが分かった。この問題は、独立同分布で発生させた乱数列では、離散円振動数間隔を無減少にすると、ランダム位相列は円振動数のいたるところ不連続な関数となり、フーリエ逆変換がリーマン積分の形式では計算できなくなることが直接の原因であった。したがって、ランダム時系列を発生させるのに用いる位相過程としては、円振動数領域のいたるところで連続関数となるような、確率過程を用いればよいことになる。この条件を満たす最も単純な確率過程はブラウン運動過程<sup>2)</sup>であるので、位相過程をブラウン運動過程で模擬すればよい。しかし、最近の地震動位相の確率特性に関する研究<sup>3),4),5)</sup>に基づく、地震動位相は自己アフィン相似<sup>6)</sup>を有しており、フラクタル過程<sup>7)</sup>としてモデル化されなければならないことが分かってきているので、ランダム時系列を発生させる位相過程として、非整数ブラウン運動過程<sup>8)</sup>を用いることを提案する。これは、ブラウン運動過程を包含する確率過程となっている。位相過程をこれらの確率過程で定義したときに得られるランダム時系列の数理特徴について、以下に考察を加える。

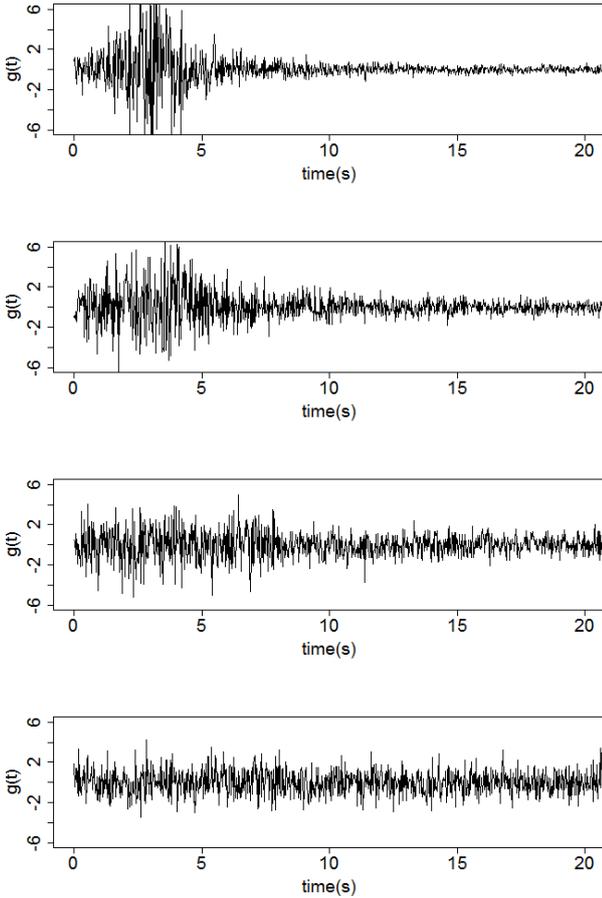


図-6 離散時間間隔を0.02秒,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし, 離散点総数を $2^{11}$ としたときの,  $G(\omega)$ を逆変換して求めた $g(t)$ の時刻歴. 上から順に標準偏差を $\sigma_w = 1, 2, 3, 5$ と変化させたものである.

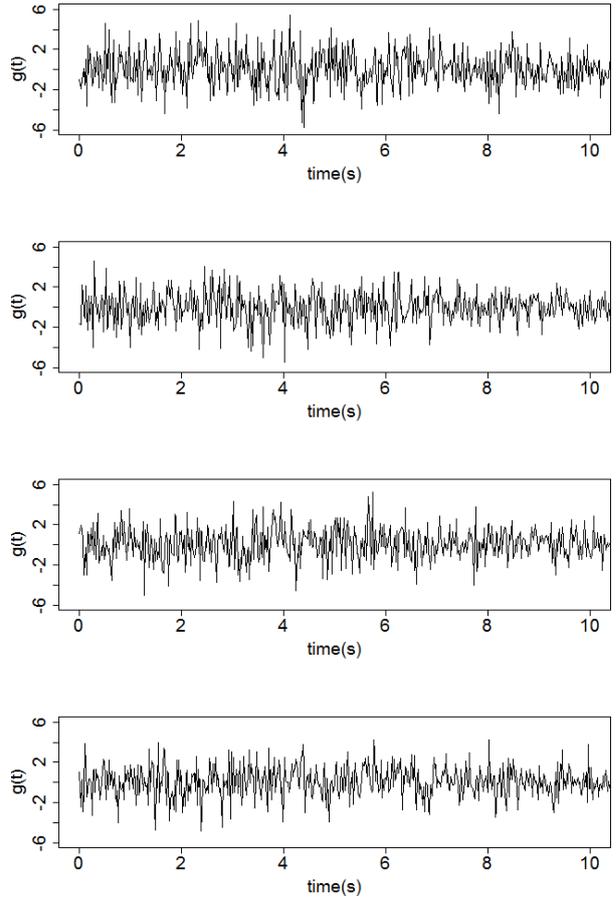


図-7 位相過程をブラウン運動過程で模擬した場合. 離散時間間隔を0.02秒,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし,  $\sigma_w = 3$ とした時の $g(t)$ の時刻歴. 離散点総数上から順にを $2^{10}, 2^{14}, 2^{19}, 2^{24}$ と変化させたもの. 離散点総数を変えても, ランダム時系列の形状や振幅に大きな変化のないことが分かる.

### (1) 位相過程をブラウン運動過程とする場合

この場合には, 円振動数 $\omega + \omega_0$ と $\omega_0$ との間の位相差分を $\Delta\phi = \phi(\omega + \omega_0) - \phi(\omega_0)$ と定義すれば, その確率密度関数は平均値をゼロとして, 次式のように定義される.

$$p(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\sigma_w}} \exp\left(-\frac{(\Delta\phi)^2}{2\omega\sigma_w^2}\right) \quad (16)$$

ここに,  $\sigma_w^2$ はブラウン運動過程を定義する分散値である. 位相差分の取り方は任意であるので,  $\omega_0 = 0$ とし,  $\phi(\omega_0) \equiv 0$ と置けば, 式(16)は次式のようにも表現できる.

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\sigma_w}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\omega\sigma_w^2}\right) \quad (17)$$

ここでは,  $\phi(\omega)$ を $\phi$ と表した. この式と, 式(9)との基本的な違いは分散値が $\sigma_0^2$ から $\omega\sigma_w^2$ に変わった点である.

円振動数間隔 $\omega$ の取り方も任意であるので,  $\omega = \Delta\omega$ と置き直し, 式(17)を書き直す

$$p(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\omega\sigma_w}} \exp\left(-\frac{(\Delta\phi)^2}{2\Delta\omega\sigma_w^2}\right) \quad (18)$$

となるので, この式を用い, 独立同分布の下で位相差分過程 $\{\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \dots, \Delta\phi_i, \dots, \Delta\phi_j, \dots, \Delta\phi_M\}$ を生成すれば, 離散円振動数の任意点 $\omega_j$ での位相 $\phi_j$ は位相差分の和として, 次式のように与えられる.

$$\phi_j = \sum_{i=1}^j \Delta\phi_i \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (19)$$

ここに,  $M$ は離散点総数である. この位相を用いて, 生成されるランダム時系列 $g(t)$ を時間量 $t_0$ だけ進む方向にシフトするためには位相系列 $\{\phi_j\}$ を系列 $\{\phi_j - \omega_j t_0\}$ に置き換えればよい.  $\omega_j$ は離散点 $j$ における円振動数であり,  $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ と表される.

図-6は離散時間間隔を0.02秒,  $a = 1$ ,  $t_0 = 3(s)$ とし, 離散点総数を $2^{11}$ としたときの $g(t)$ を示したものである. 上から順に $\sigma_w = 1, 2, 3, 5$ と変化させた.  $\sigma_w$ が小さいうちは, 位相差分値としてゼロ近傍のものが多数生成される

ので、位相もゼロ近傍の値が多くなり、時間シフト量 3 秒付近のランダム時系列の振幅が大きくなるが、 $\sigma_w$  の値が大きくなるにつれて、位相のランダム性が大きくなるので、全時間帯にわたって、一様な振幅を有するランダム時系列となることが分かる。さらに、離散点総数の変化により時系列の形状や振幅がどのように変化するかを調べたのが図-7 である。基本的情報は図-6 と同じで、 $\sigma_w = 3$  に固定した上で、離散点総数を  $2^{10}, 2^{14}, 2^{19}, 2^{24}$  と変化させた結果が 0~10 秒間だけ表示されている。図-4 の場合と比較すると、位相過程をブラウン運動過程列とすれば、ランダム振動解析に利用できるランダム時系列が生成できそうなことが分かる。これは、ブラウン運動過程がフラクタル特性<sup>7)</sup>を有してしており、ミクロな縮尺(離散円振動間隔が小さい)で見たときの位相の確率特性とマクロな縮尺(離散円振動数間隔が大きい)で見たときの位相の確率特性に相似性が有るため、位相過程が連続関数として定義されるためである。別の言い方をすれば、式(19)の分散が  $\Delta\omega\sigma_w^2$  で定義されているので、 $\Delta\omega$  が小さくなれば、 $\Delta\omega\sigma_w^2$  の値も小さくなるので、式(17)より独立同分布で生成される位相差分の値も小さくなっていくため、位相過程に不連続性が発生しなくなることを意味している。この辺のことをもう少し詳しく、以下に解説する。

位相差分過程の確率密度関数が式(18)で定義されるとし、再び、式(10)のリーマン積分で表現された、フーリエ逆変換の式に戻り、 $\Delta\omega$  を  $m$  等分した微小な離散円振動数間隔 ( $\Delta\omega/m$ ) での離散点  $j$  と  $j+1$  の間の式(10)の和の  $j$  番目の項で定数として扱い以外の  $\exp(i\phi_j)\Delta\omega$  の表現を書き直し整理すると、式(12)の表現は  $\phi_{j_1} = \phi_j$  を考慮して、次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \{ \exp(i\phi_j) + \exp(i\phi_j + i\Delta\phi_{j_2}) + \dots \\ & + \exp\left(i\phi_j + i \sum_{k=2}^l \Delta\phi_{j_k}\right) + \\ & + \exp\left(i\phi_j + i \sum_{k=2}^m \Delta\phi_{j_k}\right) \} \end{aligned} \quad (20)$$

$\Delta\phi_{j_k}$  は式(18)から独立に生成された乱数で次式のように表現される。

$$\Delta\phi_{j_k} = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{m}} \sigma_w \eta_{j_k} \quad (21)$$

ここに  $\eta_{j_k}$  は  $N(0,1)$  の正規乱数。  $\Delta\omega$  を十分微小に取れること、 $m$  がいくらでも大きくできること、 $E[\eta_{j_k}] = 0$  であることを考えれば、式(21)から明らかなように、 $\Delta\phi_{j_k}/m \rightarrow 0$  と  $(l/m) \cdot \sum_{k=2}^l \Delta\phi_{j_k}/l \rightarrow 0$  が保障されるので、結局式(20)の値は  $\exp(i\phi_j)$  に一致して、式(10)の表現形式が離散円振動間隔の取り方に影響を受けないことになる。したがって、図-3 と 4 で示したような劇的な振

幅減少は見られなくなる。ブラウン運動過程は微分不可能であるが、連続性が保障されていること、その増分過程の分散が  $\Delta\omega$  に一次比例していることから、こうした結果が得られることになる。

## (2) 位相過程を非整数ブラウン運動過程とする場合

地震動位相過程の確率特性を満たす最も単純な確率過程が、非整数ブラウン運動過程で表現できることが分かっている<sup>3,4,5)</sup>ので、ここでは、この確率過程を位相過程として生成するランダム時系列の数理特性を解明する。

Hurst指数<sup>8)</sup> $H$ の非整数ブラウン運動過程は、以下の条件を満たすガウス過程 $\phi$ として定義<sup>10)</sup>される。

- (i) 確率1で、 $\phi(\omega)$ は連続かつ $\phi(0) = 0$
- (ii) 全ての  $\omega_0 \geq 0$  と  $\omega > 0$  に対して、差分  $\Delta\phi = \phi(\omega + \omega_0) - \phi(\omega_0)$  は平均0で分散  $\omega^{2H}\sigma_w^2$  の正規分布に従う。すなわち、その確率密度関数は次式で与えられる。

$$p(\Delta\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^H\sigma_w}} \exp\left(-\frac{\Delta\phi^2}{2\omega^{2H}\sigma_w^2}\right) \quad (22)$$

非整数ブラウン運動過程を定義する積分形式は次式で与えられる<sup>10)</sup>。

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\omega} K(\omega - \tau) dW(\tau) \quad (23)$$

ここに、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数であり、

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-\tau) \tau^{x-1} d\tau$$

と表される。 $dW$  は平均値ゼロのブラウンノイズ過程(ブラウン運動増分過程)なので、その確率特性は  $dW$  を計算する離散円振動数間隔を  $d\omega$  とすれば、次式で与えられる。

$$p(dW) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d\omega\sigma_w}} \exp\left\{-\frac{(dW)^2}{2d\omega\sigma_w^2}\right\} \quad (24)$$

ここに、 $d\omega\sigma_w^2$  は分散である。また、式(23)の積分核は以下のように定義される。

$$K(\omega - \tau) = \begin{cases} (\omega - \tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2} & (\tau < 0) \\ (\omega - \tau)^{H-1/2} & (0 \leq \tau \leq \omega) \end{cases}$$

式(24)の定義によれば、確率過程  $\{\phi(\omega)\}$  はブラウンノイズ過程  $\{dW\}$  の全履歴に関係することが分かる。また、 $dW$  の確率密度関数は式(18)で、 $\Delta\omega = d\omega$  と置いた式に相当し、ブラウン運動過程として求められた位相が式(23)の積分関数になっている。非整数次ブラウン運動過程を式(23)から、直接シミュレートする方法は各種のものが提案されているが<sup>11)</sup>、離散的な過程の場合には Voss が提案しているランダム中点置換法によるアルゴリズム<sup>12)</sup>で、簡単に模擬できる。なお、Hurst指数を  $H = 1/2$  にすると、非整数ブラウン運動過程はブラウン運動過程に一致する。図-8は離散時間間隔を0.02秒、

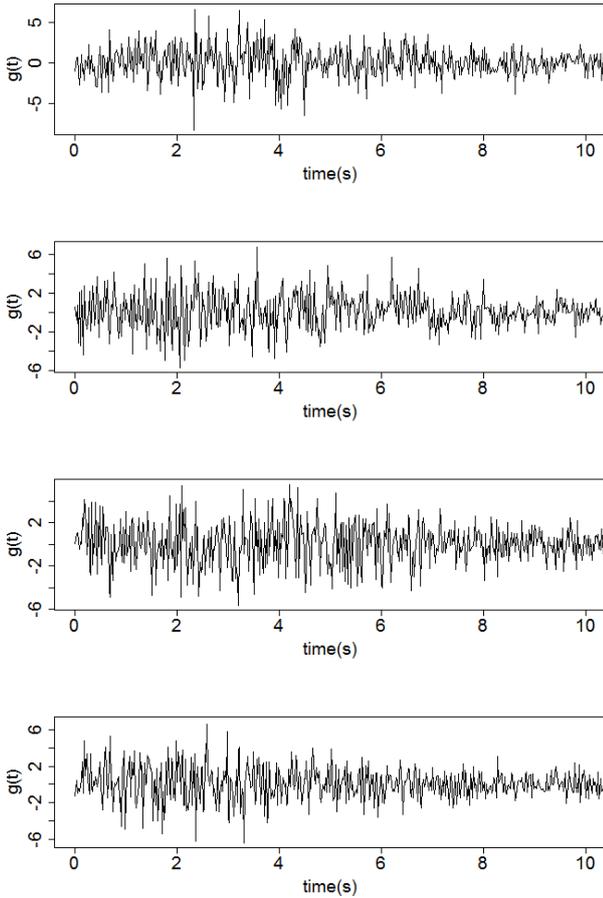


図-8 位相過程を非整数ブラウン運動過程で模擬した場合。離散時間間隔を0.02秒、 $a = 1$ 、 $t_0 = 3(s)$ 、 $H = 0.7$ 、 $\sigma_w = 3$ とした時の $g(t)$ の時刻歴。上から順に離散点総数を $2^{10}$ 、 $2^{14}$ 、 $2^{19}$ 、 $2^{24}$ と変化させたもの。離散円振動数間隔を相当小さくしても、ランダム時系列の形状や振幅に大きな変化のないことが分かる。

$a = 1$ 、 $t_0 = 3(s)$ とした上で、 $H = 0.7$ 、 $\sigma_w = 3$ と設定した場合の $g(t)$ を示したものである。上から順に離散点総数を $2^{10}$ 、 $2^{14}$ 、 $2^{19}$ 、 $2^{24}$ と変化させた。図-7の結果は $H = 0.5$ とした場合に相当している。 $H$ が大きくなると位相の長期記憶<sup>13)</sup>が強くなるが、両者を較べても、時刻歴を見る限りあまり大きな差はないように見える。

## 6. 非整数ブラウン運動過程で位相過程を生成したランダム時系列を入力とする構造物の応答特性について

位相差分の間隔の取り方は任意であるので、式(22)で $\omega_0 = 0$ と置き、 $\phi(0) = 0$ であることを考慮すれば、式(22)は次式のように書き直せる

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^H\sigma_w}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\omega^{2H}\sigma_w^2}\right) \quad (25)$$

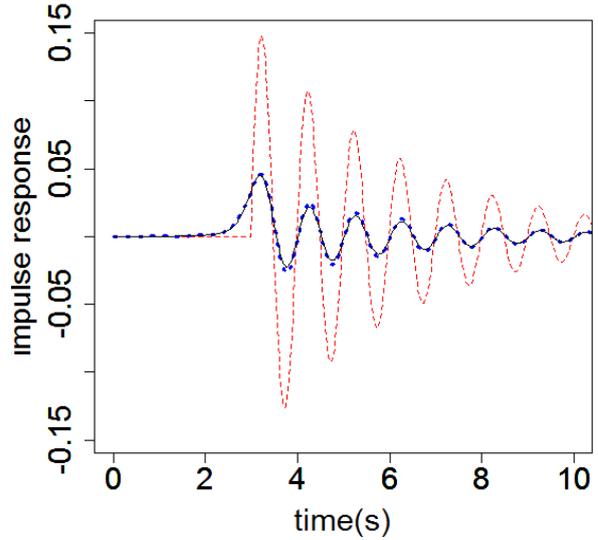


図-9 1000サンプルの平均操作の結果を青点線で表示。離散点総数は $2^{12}$ で、 $H=0.7$ 、 $\sigma_w = 0.5$ の場合。細実線は平均応答の理論解(式(26)に基づく)、赤波線(式(7)に基づく)は位相のランダム性に基づく減衰の無い場合の理論解。

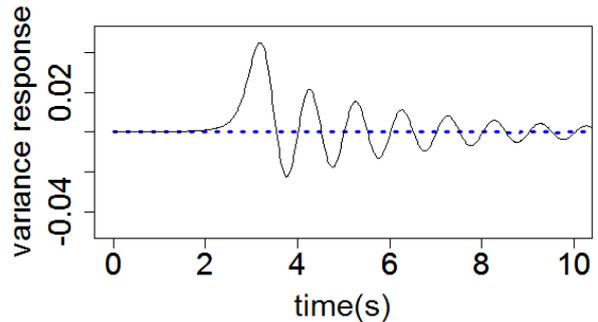


図-10 振動数領域での分散応答をフーリエ逆変換して求めた時系列。理論解(式(27)に基づく)はゼロになる、図-9の計算に用いた1000個のデータから計算した結果(青点線で表示)もゼロになっている。細実線は平均の応答の理論解(式(26)に基づく)。

構造物の応答が線形の場合には、振動数領域における変位応答 $Y(\omega)$ は式(6)で与えられていたので、式(25)を用いて $Y(\omega)$ の期待値を計算すれば次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} E_\phi[Y(\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} A_s(\omega)A(\omega)\exp\{i(\phi_s(\omega) \\ &\quad + \phi)\}p(\phi)d\phi \\ &= A_s(\omega)A(\omega)\exp(i\phi_s(\omega)) \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\phi) \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^H\sigma_w}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\omega^{2H}\sigma_w^2}\right) d\phi \quad (26) \\ &= A_s(\omega)A(\omega)\exp\left(-\frac{\omega^{2H}\sigma_w^2}{2}\right)\exp(i\phi_s(\omega)) \end{aligned}$$

ここに、 $E_\phi$ は $\phi$ に対して期待値を取ることを強調するためである。この式は、「非整数ブラウン運動過程を用いてランダム位相過程を発生し、フーリエ振幅を一定値としてフーリエ逆変換によりランダム時系列を作成する場合、それを入力とする構造物の線形応答では、応答のアンサンブル平均は、理論的に求められる応答フーリエ振幅を $\exp(-\omega^{2h}\sigma_w^2/2)$ だけ減衰させるだけで評価でき、応答のフーリエ位相特性は変化しない。」ことを意味している。このことを検証したのが図-9である。構造物の固有振動数を1Hz、減衰比を0.05とし、離散時間間隔を0.02秒、 $a=1$ として、式(6)の $A_s(\omega)$ 、 $A(\omega)$ 、 $\phi_s(\omega)$ を決定した上で、 $t_0=3(s)$ とし、 $H=0.7$ 、 $\sigma_w=0.5$ の値を用いて、 $\phi(\omega)$ を1000個発生した上で、1000個の $Y(\omega)$ の平均値を求めた。それをフーリエ逆変換してインパルス応答関数の形式で示したのが図中の青点線である。黒細実線は式(26)のフーリエ逆変換から求められるものである。サンプル数が1000個であるので両者が完全には一致していないが、アンサンブル平均値が期待値計算より求められる結果をよく説明できていることが分かる。赤の波線は式(7)を3秒間だけ時間の進む方向にシフトした結果である。同様にして、フーリエ位相の不確実性が振動数領域の分散応答に及ぼす影響も次式を用いて評価することができる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y(\omega)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (Y(\omega) - E_\phi[Y(\omega)])^2 p(\phi) d\phi \\ &= E_\phi[Y(\omega)^2] - (E_\phi[Y(\omega)])^2 \\ &= H^2(\omega)A^2(\omega)\exp(2i\phi_s)E[\exp(2i\phi)] \\ &\quad - H^2(\omega)A^2(\omega)\exp(2i\phi_s)\exp(-\omega^{2h}\sigma_w^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

振動数領域における分散応答がゼロであるので、それをフーリエ逆変換した分散応答の時系列も当然ゼロになるはずである。図-10に1000個のサンプルから求めた振動数領域の分散をフーリエ逆変換して求まる時刻歴を青点線で示した。この事実も、一定のフーリエ振幅と正規分布で規定される位相のランダム系列を用いて、フーリエ逆変換により求められるランダム時系列を用いたときに得られる構造物応答特性の特徴である。

なお、位相の不確実性を考慮した場合の時間領域での分散応答は、ここで定義した関数 $g(t)$ を用いて式(8)で与えられる時間領域の応答 $y(t)$ と式(26)の逆変換から求まる時間関数 $y_m(t)$ を用いて次式で定義される。

$$\text{Var}(y(t_k)) = \frac{1}{N} \sum_k^N (y(t_k) - y_m(t_k))^2 \quad (28)$$

ここに、 $t_k$ は離散時間点、 $N$ はサンプル数である。当然のことであるが、式(27)のフーリエ逆変換で求められる時刻歴は、式(28)で定義されるものとは全く異なっているので注意しなければならない。

## 7. むすび

本研究は、フーリエ振幅一定の下で、フーリエ位相をランダム確率過程として定義し、離散フーリエ逆変換によって得られる時系列を構造系への入力ランダム時系列とする場合を対象として、その数理特性を確率過程の立場から明らかにしようと試みたものである。得られた結論を列挙すれば以下のようである。

- 分散が一定値の正規分布から独立同分布で生成した乱数列をフーリエ位相列とすると、離散円振動数間隔を無減少としたときのフーリエ位相はいたるところ不連続な関数となり、ランダム時系列を規定する離散フーリエ逆変換の積分がリーマン積分の意味で定義できなくなることを明らかにした。
- 離散円振動数間隔を無減少にする操作と、フーリエ位相に関する期待値操作とを併用することにより、上記の問題点を克服した上で、離散フーリエ逆変換を可能にし、ランダム時系列を求めると、それはランダム時系列ではなくなり、時間シフトしたデルタ関数の振幅を減衰させた時間関数となることを明らかにした。振幅の減衰量は位相の乱数列を規定する分散値の半分に負符号をつけた指数関数値で評価できることも明らかにした。
- フーリエ位相は $[-\pi, \pi]$ での主値しか意味を持たないので、正規分布の分散値を大きくしたうえで、独立同分布で生成される乱数列を、フーリエ位相のランダム過程とすると、これは $[-\pi, \pi]$ での一様乱数列と同等となる。したがって、フーリエ振幅一定で、位相を一様乱数から独立同分布で生成し、そのフーリエ逆変換でランダム時系列が生成できるとされていた従来の方法では、上記の成果を考慮すると、離散円振動数間隔を無減少とした極限では、時系列の振幅がいたるところでゼロとなり、ランダム時系列として意味のないものになることを明らかにした。
- これらの問題点を解決できる最も単純なフーリエ位相は、振動数領域で定義されるブラウン運動過程から生成される確率過程を位相のランダム過程とすることであることを示した。その理由として、ブラウン運動過程から生成される位相過程は離散円振動数間隔の大きさによらず、いたるところ連続な過程として定義できること、その数理特性がブラウン運動過程のフラクタル特性に基づいていることなどを明示した。
- さらに一般性の有る確率過程として、ブラウン運動過程を包含する非整数ブラウン運動過程で位相のランダム過程列を定義することを提案した。この定義に基づいてフーリエ振幅一定の下で、フーリエ逆変換により生成されるランダム時系列の数理特性を、1自由度

系の応答評価の観点から考察し、位相のランダム性に基づく平均応答過程や分散応答過程について解析解を誘導した上で、モンテカルロシミュレーションに基づきそれらの結果を検証した。

以上が本研究成果の概要であるが、線形系の応答に限れば、位相過程の不確定性が構造物応答に及ぼす影響を期待値として解析的に評価できるが、応答が非線形領域に至るような場合には、応答値の確率的な評価はモンテカルロ的手法によらざるを得ない、ここで提案したランダム時系列の構成法は、構造物の非線形応答評価に用いてこそ、その真価を発揮するものと考えるが、それは今後の課題である。

#### 参考文献

- 1) Nigam, N. C. : *Introduction to Random Vibration*, MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
- 2) Karatzas, I. and Shreve, S. E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.
- 3) Sato, T. : Fractal characteristics of phase spectrum of earthquake motion, *Journal of Earthquake and Tsunami*, 7(2), 1350010-1-17, 2013.
- 4) 佐藤忠信, 吉田郁政, 大島義信 : 位相のモデル化について, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol. 70, No.4(地震工学論文集第 33 卷), 1-273-1-284, 2014.
- 5) 佐藤忠信 : 地震動位相差分の確率特性とその数理的解釈, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol. 70, No. 2, 295-305, 2014.
- 6) 本田勝也 : フラクタル, シリーズ非線形科学入門, 第 5 版, 朝倉書店, 2009.
- 7) Kenneth, F. : *Fractal Geometry; Mathematical Foundation and Application*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Ltd, The Artium, Southern Gate, Chichester, 2003
- 8) Biagini, F., Hu, Y. Oksendal, B. and Zhang T. : *Probability and Its Applications, Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer-Verlag London Limited, 2008.
- 9) Hurst, H. E., Black, R.P. and Simaika, Y. M.: *Long-term storage: an experimental study*, London, Constable, 1965. H
- 10) Mandelbrot, B. B. and Vanness, W. J. : *Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications*, *SIAM Review*, Vol.10, No. 4, 422-437, 1968.
- 11) Voss, R.F. : *Fractals in nature: from characterization to simulation, The Science of Fractal Image*, Chap.1, 21-70, H.O. Peigen and D.Saup, editors., Springer-Verlag, New York, 1988.
- 12) Voss, R. F. : *Random fractal forgeries, Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, R.A. Earnshaw, editor, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- 13) 松葉育雄 : 長期記憶過程の統計, 自己相似な時系列の理論と方法, 共立出版社, 2007.

## ON DEFINING THE INPUT RANDOM TIME PROCESS TO USE FOR RANDOM VIBRATION ANALYSES

Tadanobu SATO

The purpose of this paper is to investigate the stochastic characteristics of discrete random noise process in the time domain which is defined by the inverse Fourier transformation with constant Fourier amplitude and random Fourier phase process. If we use a normal distribution with a constant variance to generate random Fourier phase process in frequency domain with the assumption of identically independent distribution the generated discrete random noise process in the time domain shows a peculiar mathematical characteristics because the Fourier phase process becomes a function at everywhere discontinuous in frequency domain as the duration of random noise becomes longer in the time domain. The simplest way to avoid this deficit, we suggested, is to use the Brownian motion process for generating the random Fourier phase process. Moreover we recommend applying the fractional Brownian motion (fBm) process to simulate the random Fourier phase process based on the recent finding result that the Fourier phase characteristics of observed earthquake motions show the self-affine similarity nature. The stochastic characteristics of the random noise process in the time domain generated by using fBm process are investigated through response characteristics of a shingle degree of freedom system.