固体と流体の中間的媒質の揺動現象を解析する ための支配方程式とその検証

秋山 良平1・澤田 純男2・後藤 浩之3

¹学生員 京都大学大学院 工学研究科 (〒615-8530 京都市西京区京都大学桂) E-mail:akiyama@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp

²正会員 京都大学教授 防災研究所(〒611-0011京都府宇治市五ヶ庄)
E-mail: sawada@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp
³正会員 京都大学助教 防災研究所(〒611-0011京都府宇治市五ヶ庄)
E-mail: goto@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp

固体から流体までの媒質に対する揺動現象を解析するために、固体と流体双方に適用できるLagrange座 標系の支配方程式を整理し、有限要素法による数値解析を実施した.媒質の入った矩形容器を傾ける数値 解析を行い、流体への適用性を確認した.また、揺動現象の解析を実施して固体と流体での自由表面形状 が異なることを指摘した.

Key Words : Finite Element Method, liquefaction, Updated Lagrangian, sloshing

1. はじめに

2011年3月11日に発生した東北地方太平洋沖地震では、 東北地方から関東地方にかけて広い範囲で大規模な液状 化現象が発生した. 京川ら¹⁾によると特に被害が深刻な 地域は東京湾岸と利根川下流域であり,非常に大規模な 液状化が起きている. 中でも顕著な被害が見られたのは 浦安市の埋め立て地である. 地震の継続時間がこれまで の地震と比較して長かったこともあいまって、地盤沈下 が広範囲に生じている.新浦安駅ではエレベータ施設の 沈下、埋め立て地東側の護岸では隆起および速報流動の 痕跡が見られた他、埋設貯水槽の浮き上がり被害も報告 されている.また、安田ら²によると、噴砂、噴水がと ころどころ発生するのではなく一面に発生する様子が報 告されており、噴砂の量も大変多いものであった. 電線 は各地で最大2m程度も沈下し、幹線道路の歩道や生活 道路などで盛り上がりや迫上がりの被害が報告されてい る. このように液状化によって非常に多くの構造物や道 路,上下水などのライフラインに大きな被害が見られた. この地震以前まで液状化現象をとらえた動画は希少で あった³が,都市部で発生したことや撮影デバイスの普 及により、様々な動的挙動が撮影されている.本研究で は、このうち液状化地盤の揺動現象に着目する. これは 地盤が液状化した後に4-5秒程度の周期で地盤が大きく

水平および上下に振動する現象で、安田・萩谷⁴によっ て路面の突き上げ被害との関連が予想されている.

地盤の液状化層は、地震動が作用するまでは飽和砂から構成される固体である.地震動が作用することで、せん断変形による正のダイレイタンシーが生じて過剰間隙水圧が上昇する.これに伴い、有効応力が減少するため、有効応力の減少と伴に流体的な性質を示すと考えられている.結果として、液状化は時間が経過するにつれて固体から流体へその性質が変化するプロセスと解釈することもできる.そこで、本研究では液状化した地盤を固体と流体の中間的性質を持つ媒質であると考える.ところが、固体と流体とでは異なる支配方程式を用いることが一般的である. 媒質が固体であれば、支配方程式は固体の構成則と運動方程式からなる. 媒質が流体であれば、支配方程式はNavier-stokes式と連続の式からなる.このため、固体と流体の中間的な状態を解析するためには、双方に共通して適用可能な手法が必要である.

本研究では、固体と流体双方に適用できる支配方程式 について考察し、有限要素法により数値解析を行う.こ れを検証するために、流体の入った矩形容器を傾ける静 的解析、および揺動現象の解析を行う.

2. 固体と流体で共通する支配方程式

(1) 固体と流体の支配方程式

固体の支配方程式は、通常Lagange座標系で記述される.まず運動方程式は以下のようにあらわされる.

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \tag{1}$$

ここに
$$\rho$$
, \ddot{u}_i , σ_{ii} はそれぞれ密度,加速度ベクトル,

応力テンソルである. biは物体力でここでは重力加速度 gのみを与える.2次元問題であれば運動方程式はそれぞ れの成分に対してたてられるので,方程式の数は2つで ある.一方,未知変数は変位2成分,および応力3成分で あって方程式数が足りない.このため媒質の構成則を使 って方程式の不足を補う.

媒質がHooke則に従う線形弾性体である場合,ひずみ と応力は以下の構成則で関連付けられる.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \tag{2}$$

また,ひずみと変位を関連付けるために適合条件を導入 する.微小変形下では以下のように関連付けられる.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \tag{3}$$

式(2)と式(3)をあわせると次式が導かれる.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \tag{4}$$

ここにλとµはラメの定数である.上式はテンソルの成分 数に相当する3つの式で構成されている.このため運動 方程式と構成則の数が未知変数の数と一致するため、方 程式を解くことができる.

流体の支配方程式は通常Euler座標系で記述されるが、

ここでは固体の支配方程式と統一させるためにLagrange 座標系で表現することを考える. 媒質が流れ去るような 問題を対象とする場合には, 媒質を追跡するLagrange座 標系で解析することは実用的ではない. しかし, 揺動現 象のように媒質がある領域内にとどまるような問題であ れば, Lagange座標系による解析に支障はない.

流体では、運動量保存則に対応する運動方程式と、質 量保存則に対応する連続式とが支配方程式である. Lagrange座標系で記述すると、運動方程式は固体の場合 とまったく同じであるため式(1)と同一である.連続式 は次のように表される.

$$\dot{\rho} = 0 \tag{5}$$

流体がNewton流体である時、流れによって生じる応力、

すなわち流体の構成則は以下のように表現される.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \right) \tag{6}$$

ここに、pは水圧で圧縮を正としている. ηは粘性係数である.式(6)を式(1)に代入して整理すると、次式で示されるNavier-Stokes式となる.

$$\ddot{u}_{i} = -\frac{1}{\rho} p_{ij,j} + \frac{\eta}{\rho} \dot{u}_{i,jj} + b_{i}$$
(7)

2次元問題であれば、未知変数は流速2成分と水圧の3 つである.一方、方程式はNavier-stokes式と連続式の3式 である.一見、方程式数に問題がないように思われるが、 基準配置における密度pが時間によって変化しないよう な問題であれば、式(5)で表される連続式は恒等的に成 立する.このため、水圧と流速の間、あるいは流速その ものに何らかの条件を付加しなければならない.通常は 以下のような式が用いられている.

$$u_{i,i} = 0 \tag{8}$$

この式は非圧縮性流体におけるEuler座標系の連続式と同 じ式のように見えるが、Lagrange座標系では連続式でな いことに注意が必要である.この式の物理的意味は材料 の構成関係としてとらえるほうが適切である.この式を もって方程式の数と未知変数の数が一致するため、方程 式を解くことができる.

(2) 共通する支配方程式

固体と流体の支配方程式を元々の形式と矛盾しない 形で書き換えてみる.まず双方で共通していたLagrange 座標系の運動方程式を支配方程式に組み込む.構成則は, 線形弾性体とNewton流体の両方の性質を持つものを採用 する.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \dot{\varepsilon}_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \tag{9}$$

pは以下のように体積弾性係数Kと関連付けられる.

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{p}{K} \tag{10}$$

固体時にHooke弾性体であるならば, *K* はλ+2/3μ と表せ, かつηが0である時, Hooke弾性体の構成則に一致する. またμが0かつ, λが非常に大きい時,構成則はNewton流 体の構成則に一致し,体積弾性係数の関係式は式(8)に 帰着する.すなわち上の構成則は固体と流体の中間的な 媒質についてパラメータを変化させることによってどち らも表現することが可能である.このことは, Lagrange 座標系の運動方程式と上の構成則を導入した数値解析手 法であれば、両者を矛盾なく表現できることを意味して いる.

ただし、実際の液状化層に、以上の構成則を直接適用 することはできない.液状化によって生じるせん断剛性 の劣化プロセスやダイレイタンシーの発現はここでは表 現されていない.本研究では、以上の考え方で固体と流 体とをいずれも矛盾なく解析できるかを検証することを 目的としており、せん断剛性が劣化したある状態におけ る変形をみるために、線形弾性体でモデル化していると 考える.

(3) 自由表面と有限変形

2.(1)および2.(2)の議論は、対象とする媒質の占める領 域が時間によって変化しないことを仮定していた.しか し、揺動現象は自由表面が時々刻々と変動する現象であ るため、通常の流体解析のようなEuler座標系による方法 では自由表面に特別な処理が必要である.例えば、領域 全体で質量が保存されるような条件として自由表面に関 する運動学的条件が用いられる⁵.

一方,Lagrange座標系では領域全体での質量保存が保 証されるため,自由表面に対して表面力が働かないとい う条件のみを与えればよい.ただし,自由表面の揺動現 象は重力による復元力によってもたらされるため,有限 変形を考慮して解析を行う必要がある.本研究では,式 (9)のひずみを次式のAlmansiひずみで表すことによって 有限変形に対応した構成則とする.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$
(11)

なお、Almansiひずみは客観性を持つひずみであるため、 剛体回転による見かけのひずみは生じない.

3. 数值解析例

(1) 数値解析手法と解析モデル

本研究では2次元平面ひずみ問題に対する有限要素法 を用いる.有限変形はUpdated Lagrange法⁹を適用し,陽 解法により時間積分を実行する.解析モデルには図-1に 示す2次元モデルを用いる.容器は剛であるとし,容器 壁面との摩擦を無視して,AB面およびCD面はx方向の 変形のみを拘束し,AC面はz方向の変形のみを拘束する. またBD面は自由表面とする.また解析パラメータは表-1に示すものを用いる.

要素には9節点Lagrange要素⁷を用いる.この要素では 変位が高次関数で補間されており、剛性を過大に評価す るロッキング⁸や次数低減積分によって生じる剛体モー ド以外のゼロエネルギーモードを避けることができる.



図-2容器を傾ける解析の概念図

(2) 静的現象の数値解析

物体力として鉛直下方向(-z方向)に重力加速度gが 加わっている状態で容器をの回転させることを考える. この時ポアソン比0.50の完全流体であれば,最終的な水 面は図-2に示すように重力方向に直交する平面となるた め,壁面近傍の自由表面の初期状態からの水面変位hは 次のように表される.

$$h = \frac{1}{2}L\tan\theta \tag{12}$$

θ=0.1°としてポアソン比を0.20-0.50まで変化させた場 合の数値計算結果を図-3に示す.この時式(12)による理 論値を図中にあわせて示す.なお,動的問題と同じコー ドに減衰を大きく与えて,値が収束した時点の結果を示 している.

ポアソン比0.50の完全流体において、数値解析結果と 理論値は概ね一致していることがわかる.ポアソン比が 小さくなると変位が急激に小さくなる様子が伺える.こ れは、重力に対するつり合いの力として物体内部のせん 断力が大きく影響するためと考えられる.

自由表面形状を振幅を正規化して図4に示す.ポアソ ン比が小さい領域ではほとんど変化が見られなかったた め、ポアソン比0.45、0.499995、0.4999995、0.50の結果を 示している.自由表面形状はポアソン比0.45では曲線形 だが、ポアソン比0.50では、ほぼ線形である.このよう な自由表面形状の変化はポアソン比,0.499995、 0.4999995などポアソン比が0.50に近い領域で急激に起こ っている.



図-3 容器を傾けた場合の壁面近傍の自由表面の変位





図4 ポアソン比の違いによる自由表面形状の変化

(3) 揺動現象の数値解析

重力の作用下で矩形容器を水平方向に周波数fで正弦 波加振する.加振周波数は次のHousne⁹の式に基づいて 定まる流体の1次モードスロッシングの周波数fiに対して 小さくなるように定める.

$$M_1 = M \, \frac{(0.83) \tanh(1.6D/L)}{1.6D/L} \tag{13}$$

$$k_1 = 3 \frac{M_1^2 gD}{ML} \tag{14}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{M_1}}$$
(15)

$$f = nf_1 \quad (n < 1) \tag{16}$$

ここに、2Lは容器の幅、Dは媒質の自由表面から容器の 底までの深さ、Mは容器内の媒質の質量の総和を表す. 式(13)は全体の質量のうち、水平に揺動する部分の媒質 の質量に相当し、式(14)で表されるばねを取り付けるこ とで、式(15)の周波数が得られる.

以降では、比較のために、秋山ら¹⁰による結果もあわ せて示す. これは、Lagrange座標系での流体のスロッシ ング解析に用いられるWilsonら¹¹⁾の研究を固体まで拡張 したもので、微小変形解析でありながらも、表面ポテン シャルを導入することで重力の作用を取り込み、かつ、 次数低減積分や人工的な回転剛性を用いたものである. この研究では、概ね固体と流体の揺動現象に適用可能で あることが示されているが、回転剛性の適切な決定法や、 表面ポテンシャルの理論点的裏付けが希薄であるという 問題がある.本研究においては有限変形で解析を行うた め、表面ポテンシャルを導入することなくより適切な解 が得られると考えられる.また流体時(ポアソン比 0.50)の結果の妥当性をみるため、次式で表される1次 モードスロッシング時のHousnerの解を用いる.

$$d = \frac{0.84a \left(\frac{k_1 g}{M_1 g}\right)}{1 - \frac{a}{L} \left(\frac{k_1 L}{M_1 g}\right)^2}$$
(12)

ここに, dは自由表面における壁面近傍の鉛直変位を表 し、aは加速度振幅である。

解析に用いるパラメータを表-2に示す. 媒質のパラメ ータ等は容器を傾ける解析(表-1)と同じである.図-2 のD点における最大鉛直変位とポアソン比の関係を図-5 に示す.

表-2 解析パラメータ	
加速度振幅:a	0.01
1次モード周波数: <i>f,</i> [Hz]	0.1887
倍率:n	0.20, 0.25, 0.33, 0.50, 0.67,
	0.77



図-5 D点における最大変位の比較







緑線で示す本手法による結果は赤線の秋山らの手法より大きい値を示す傾向にある.また,ポアソン比0.50において概ねHousnerの理論解と一致するが, n=0.67や n=0.77など, Housnerの解よりも大きくなる場合もある.

nが大きいほど,D点の変位は大きくなる傾向にある. ポアソン比0.50における周波数ごとの最大値を図-6に示 す.図-6より,Hosnerによる1次のスロッシング周波数 0.1887Hz付近に近づくにつれて応答が大きくなっており, Housnerの解と提案手法との整合性が伺える.

容器を傾けた解析と同様に,自由表面形状の変化をみ る.自由表面の形状のみを見るために図-2のD点の最大 鉛直応答変位を示した時間の自由表面形状を抜き出し, 最大応答変位で正規化して図-7に示す.また,ポアソン 比が小さい領域では自由表面形状にほとんど変化が見ら れなかったため,ポアソン比0.45,0.499995,および0.50 の3つの場合における自由表面形状を抜き出してあわせ て示している







図-7 自由表面形状の比較

ポアソン比が大きくなるにつれて自由表面形状は曲線 形から線形に変化しており、容器を傾ける解析と同様の 傾向がある.また、曲線形から線形への変化はポアソン 比0.50近傍で生じているが、倍率nが小さいほどこの変 化はポアソン比の小さい側で生じていることが図-7から 伺える.

6. まとめ

固体と流体双方に適用できる支配方程式によって、媒 質が固体か流体かによらない数値解析を実現した.容器 を傾ける解析により、本手法の妥当性を確認した.ポア ソン比の小さい固体とポアソン比0.50の流体とでは自由 表面形状が異なることを指摘した. 揺動現象の解析では、 ポアソン比0.50においてHousnerの解と概ね一致する結果 となった.また、1次モードスロッシング周波数の近傍 では応答変位が大きくなることを確認した.自由表面形 状は、容器を傾ける解析と同様に固体では曲線形、流体 では線形になる傾向を確認した.

本研究では、実際の液状化地盤を対象とした解析では なく、線形弾性体による仮想的な解析を行った。今後、 本手法を一般化して、砂の繰り返しせん断を表現できる 構成則を導入した有効応力解析を行う予定である。

参考文献

- 京川裕之,清田隆,近藤康人,小長井一男:東北太 平洋沖地震による浦安市埋立地盤の液状被害調査, 地盤工学ジャーナル, Vol.7, No.1, pp.265-273, 2012.
- 2) 安田進,原田健二,石川敬祐:東北地方太平洋沖地 震による千葉県の被害,地盤工学ジャーナル,Vol.7, No.1, pp.103-115, 2012.
- 3) 地盤工学会:1964 年新潟地震液状化災害ビデオ・写 真集
- 4) 安田進,萩谷俊吾:東京湾岸の液状化エリアで発生した 平面道路の突き上げ被害,第9回地盤工学会関東支部発 表会,2012.
- 5) 数値流体力学編集委員会:移動境界流れ解析,東京大学 出版,1995.
- 6) 久田俊明,野口裕久:非線形有限要素法の基礎と応用,pp.83-104,丸善,1995.
- 久田俊明,野口裕久:非線形有限要素法の基礎と応用,pp.105-116,丸善,1995.
- 8) 土木学会:計算力学の常識, pp.51-66, 丸善, 2008.
- 9) Housner, G. W.: The Dynamic Behavior of Water Tanks, *Bull.* Seism. Soc. Am., Vol.53, No.2, pp.381-387, 1963.
- 10) 秋山良平,澤田純男,後藤浩之:固体と流体の中間 的媒質の揺動現象を解析するための有限要素法の開 発,全国大会第68回年次学術講演会,2013.
- Wilson, E. L., and Khalvati, M.: Finite Elements for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems, *Int. J. Numer. Mech. Engng.*, Vol.19, pp.1657-1668, 1983.

GOVERNING EQUATIONS FOR SLOSHING BEHAVIOR OF INTERMEDIATE STATE OF SOLID AND FLUID AND : NUMERICAL SIMULATION AND ITS VERTIFICATION

Ryohei AKIYAMA, Sumio SAWADA and Hiroyuki GOTO

We focus on sloshing behavior of intermediate state of solid and fluid, which simply model a liquefied layer. In order to the behavior, we introduce common governing equaions representing both solid and fluid materials, and develop a numerical scheme in Lagrange coordinate system. It is verified by two types of numerical simulaitons; Static behavior on tilted a recutangular tank and sloshing behavior. From the simulation results, free surface shapes are different between solid and fluid.