subset法を用いた地中構造物の地震時損傷確率評価

坂下　克之[1]・畑　明仁[2]・志波　由紀夫[3]

[1]正会員　大成建設株式会社　技術センター（〒245-0051 神奈川県横浜市戸塚区名瀬町344-1）
katsuyuki.sakashita@sakura.taisei.co.jp

[2]正会員　大成建設株式会社　技術センター（〒245-0051 神奈川県横浜市戸塚区名瀬町344-1）
hata@ce.taisei.co.jp

[3]フェロー会員　大成建設株式会社　技術センター（〒245-0051 神奈川県横浜市戸塚区名瀬町344-1）
shiba@ce.taisei.co.jp

構造物の損傷確率評価において，損傷確率が極めて小さい場合，パラメータの取りうる全空間で標本を発生させる通常のモンテカルロシミュレーションでは，精度よく損傷確率を評価するためには膨大な数の標本すなわち解析や照査が必要となり効率が悪い．そこで，パラメータ空間で標本を発生させる領域を破壊側に徐々に近づけながらモンテカルロシミュレーションを繰り返すsubset法を，地盤－構造物一体２次元FEMモデルによる動的非線形解析に基づく地中構造物の地震時損傷確率評価に適用して，その有効性を検証した．検討の結果，subset法による手法は概ね良好な評価が可能であることが確認された．また本手法で損傷確率算定する際に理論上含まれる誤差について考察を行った．

Key Words : *subset simulation, Markov chain Monte Carlo, underground structure, seismic PRA*

1.　はじめに

構造物の地震時損傷確率を評価する手法は，精度や計算負荷のレベルに応じていくつか考えられるが，精度の高い手法として位置付けられるものの１つにモンテカルロシミュレーションが挙げられる．しかしモンテカルロシミュレーションは数多くの標本を発生させて解析・照査を行い損傷確率を評価する方法であるため，計算負荷が大きくなる．さらに損傷確率が非常に小さい場合には，パラメータの取りうる全空間で一様に乱数を発生させて標本を設定する通常のモンテカルロシミュレーションでは，精度よく損傷確率を算定するためには膨大な数の解析・照査の実施が必要となり効率が悪い．

損傷確率が小さい場合に計算負荷を低減するための手法として，徐々に領域を破壊側に狭めていきながら，比較的少数の標本によるモンテカルロシミュレーションを繰り返して損傷確率を求めるsubset法[1)]が考案されている．本論文では適用例を通じてsubset法による損傷確率評価の有効性を検討した．subset法の適用例はいくつか報告されているが[2)等]，地中構造物を対象とした事例は少ない．そこで本論文では，地盤－構造物一体２次元FEMモデルによる動的非線形解析に基づく地中構造物の地震時損傷確率評価を適用例の対象とした．subset法の過程で標本を発生させる手法としては，目標領域近傍にのみ効率よく標本を発生することができるMCMC（Markov chain Monte Carlo simulation）[1)]を適用した．検討は基本的には既往の手法に準じた上で，細部では多少の工夫を施し，評価の効率化を図った．検証には損傷確率の正解値が必要であるため，変数を全空間で細かく変化させたパラメータスタディによる損傷確率評価も並行して行った．

また本手法で損傷確率を算定する際に理論上含まれる誤差について考察を行った．

2.　subset法を用いた損傷確率評価方法

(1)　subset法の概要

subset法について，変動パラメータが２つで，それらが互いに独立で確率密度が標準正規分布に従う場合を例に説明する．**図-1**に通常のモンテカルロシミュレーショ

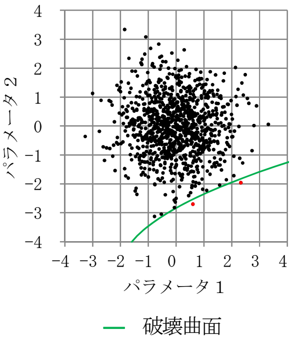


図-1　通常のMC（標本数1000の例）

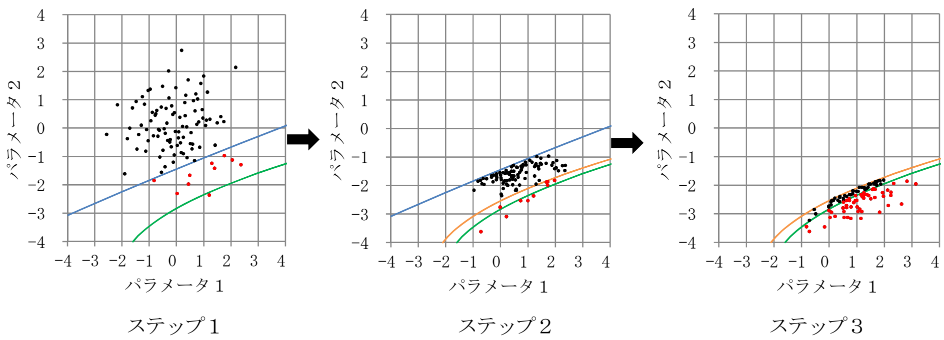


図-2　subset法の概念（1ステップあたりの標本数100の例）

ンの概念を，図-2にsubset法の概念を示す．図-1，図-2で，緑線が破壊曲面すなわち緑線の下側が破壊領域とする．この例では，損傷確率の正解値は約5.0×10^{3}である．

図-1の通常のモンテカルロシミュレーションの例では標本数を1000個発生させても，破壊領域に含まれる点が２つで損傷確率は2.0×10^{3}と計算され，精度があまり良くないことがわかる．

図-2のsubset法の概念について説明する．まずステップ１のようにたとえば100点の標本を発生させ，評価指標（限界状態関数値・安全率・構造物の応答値等）が危険側の累積確率が1/10となる領域（青線の下側）を予測する．具体的には，最も危険側から10点目と11点目の評価指標の平均値（評価指標が正規分布等に従うと想定する場合は相加平均，対数正規分布等に従うと想定する場合は相乗平均）を境界値として求める．

次にステップ２のように，ステップ１で予測した危険側の累積確率1/10の領域の中で，言い換えれば評価指標が上述の境界値よりも危険側になるという条件の元で，各パラメータが元々の標準正規分布に従うように100点の標本を発生させ，評価指標が危険側の累積確率1/100の領域（橙線の下側）を予測する．

最後にステップ３のように，ステップ２で予測した危険側の累積確率1/100の境界値よりも危険側になるという条件の元で，各パラメータが元々の標準正規分布に従うように100点の標本を発生させ，破壊する標本数を数える．これが例えば55点であれば，損傷確率は5.5×10^{3}と計算されたことになる．

このようにsubset法による損傷確率の算定は，通常のモンテカルロシミュレーションと比較して少ない解析数で効率よく損傷確率を求めることができる．

一般的に１ステップ毎にi個の標本を発生させ，危険側j個までの領域で狭めていき，k回のステップの後に破壊標本がm個とカウントされた場合，損傷確率Pは次式で計算される．

$$P=\left(\frac{j}{i}\right)^{k}\cdot\frac{m}{i} \tag{1}$$

図-2および上記の説明は，$i=100$，$j=10$，$k=2$，$m=55$の例である．図-2では３ステップで終了する例を示したが，損傷確率のオーダーが小さくなるほど当然実施するステップ数は増え，たとえば10^{5}オーダーの損傷確率を算定する場合には，５ステップ必要になる．

(2)　MCMCによる標本の発生方法

前項で図-2のステップ２あるいはステップ３の説明における「100点の標本を発生」させる方法がMCMC（Markov chain Monte Carlo simulation）である．例えばステップ２の100点はステップ１で赤点で記した危険側10点の標本をそれぞれランダムウォークして発生させる．

$\boldsymbol{x}$を標本のパラメータの空間とし，十分な数だけランダムウォークした後の標本の分布が目標とする確率密度分布関数$\pi(\boldsymbol{x})$（図-2のステップ２の例でいえば青線より下側という条件付きの標準正規分布）になるように，１歩進む前の標本$\boldsymbol{x}_k$から１歩進んだ後の標本$\boldsymbol{x}_{k+1}$を定める方法は，以下に示すModified Metropolis–Hastings Algorithmと呼ばれる方法による[1)]．

提案分布と呼ばれる任意の確率密度分布関数$q(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}_k)$を定めて$\boldsymbol{x}_{k+1}$の候補$\boldsymbol{x}'$を発生させ，

$$\begin{array}{llll} \text{確率} & \min\{1,b(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}')\} & \text{で} & \boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}' \\ \text{確率} & 1-\min\{1,b(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}')\} & \text{で} & \boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k \end{array} \tag{2}$$

とする．ここで，

$$b(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}')=\frac{\pi(\boldsymbol{x}')q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}')}{\pi(\boldsymbol{x}_k)q(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}_k)} \tag{3}$$

上記は，目標とする標本の確率分布が任意の場合，言い換えるとランダムウォークさせる空間$\boldsymbol{x}$が図-2に示すような空間上の場合の一般的な手順であるが，ランダムウォークさせる空間を式(4)に示す$\pi(\boldsymbol{x})$の累積確率値$\Phi(\boldsymbol{x})$の空間$\boldsymbol{u}$とすると，式(3)が非常に単純化されることが吉田らにより式(5)～式(11)に準じて示されている[2)]．

$$\boldsymbol{u} = \Phi(\boldsymbol{x}) \qquad 0 < u_i < 1 \qquad i = 1 \sim n \tag{4}$$

ここに　n：パラメータの次元

subset法における現在のステップで標本を発生させる$\boldsymbol{u}$空間上の領域，すなわち前のステップで狭められた領域をFとする．具体的には，前のステップで計算された境界値曲面と，$|u_i| = 0$，$|u_i| = 1$で囲まれる，後述する**図-3**の水色で示したような領域である．このとき目標確率密度分布関数$\pi(\boldsymbol{u})$は下式により表される．

$$\pi(\boldsymbol{u}) = \frac{I_F(\boldsymbol{u})}{P(F)} \tag{5}$$

ここに

$I_F(\boldsymbol{u})$：$\boldsymbol{u}$が領域Fの中にある場合は1，外にある場合は0となる関数

$P(F)$：領域Fの確率

ここで，提案分布　$q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k)$を$n$次元空間上の立方体（２次元の場合は正方形）で囲まれた領域の一様分布として，次式のように設定する．

$$q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2a}\right)^n & -a \le u_{ik} - u_i{}' \le a \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \tag{6}$$

式(5)および式(6)を式(3)に代入し，式(7)を考慮すると，式(8)が得られる．

$$I_F(\boldsymbol{u_k}) = 1 \tag{7}$$

$$b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}') = \frac{\pi(\boldsymbol{u}')q(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{u}')}{\pi(\boldsymbol{u}_k)q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k)} = \frac{\dfrac{I_F(\boldsymbol{u}')}{P(F)}\left(\dfrac{1}{2a}\right)^n}{\dfrac{I_F(\boldsymbol{u_k})}{P(F)}\left(\dfrac{1}{2a}\right)^n} = \frac{I_F(\boldsymbol{u}')}{I_F(\boldsymbol{u_k})} = I_F(\boldsymbol{u}') \tag{8}$$

式(8)を式(2)にあてはめると以下のようになる．

$$\begin{array}{llll} \text{確率} & \min\{1, I_F(\boldsymbol{u}')\} & \text{で} & \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}' \\ \text{確率} & 1 - \min\{1, I_F(\boldsymbol{u}')\} & \text{で} & \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k \end{array} \tag{9}$$

これをさらに言い換えると，以下のようになる．

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{u}'\text{が領域}F\text{にある場合} & \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}' \\ \boldsymbol{u}'\text{が領域}F\text{にない場合} & \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k \end{array} \tag{10}$$

すなわち，$\boldsymbol{u}_k$を中心として，一辺が$2a$のn次元空間上の立方体（２次元の場合は正方形）の領域を考え，この中で一様な確率でランダムウォークの次の１歩の候補$\boldsymbol{u}'$を発生させ，これが領域Fに含まれれば$\boldsymbol{u}_{k+1}$として採用してランダムウォークが成立し，含まれなければ採用されず$\boldsymbol{u}_k$に留まったまま，となる．

標本値を$\boldsymbol{u}$空間の値から$\boldsymbol{x}$空間の値に戻すには，次式により変換すればよい

$$\boldsymbol{x} = \Phi^{-1}(\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

本論文においても，手法は基本的には上記のものを踏襲することとする．ただし参考文献2)においては，提案分布　$q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k)$は式(6)に示した$n$次元空間上の立方体（２次元の場合は正方形）で囲まれた領域の一様分布として定義しているが，本論文においては，標本発生の効率化のため，提案分布を式(12)に示すように，n次元空間上の直方体（２次元の場合は矩形）で囲まれた領域の一様分布として定義した．

$$q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} & -a_i \le u_{ik} - u_i{}' \le a_i \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \tag{12}$$

この場合でも，式(8)に相当する式は以下のように同様に成り立ち，式(9)～式(10)のアルゴリズムは成立する．

$$b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}') = \frac{\pi(\boldsymbol{u}')q(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{u}')}{\pi(\boldsymbol{u}_k)q(\boldsymbol{u}'|\boldsymbol{u}_k)} = \frac{\dfrac{I_F(\boldsymbol{u}')}{P(F)}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2a_i}}{\dfrac{I_F(\boldsymbol{u_k})}{P(F)}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2a_i}} = \frac{I_F(\boldsymbol{u}')}{I_F(\boldsymbol{u_k})} = I_F(\boldsymbol{u}') \tag{13}$$

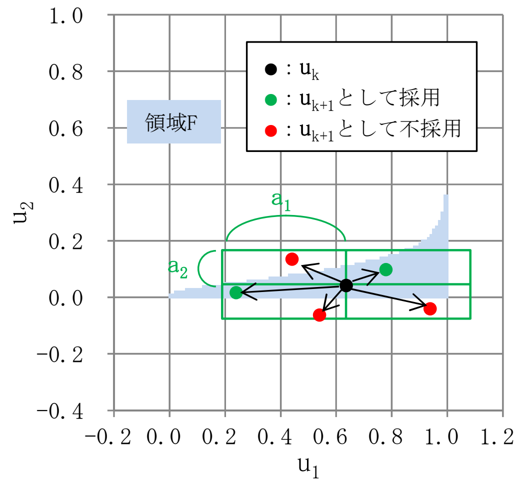


図-3　本論文におけるランダムウォークの進め方

以上を２次元の場合を例に図示すると**図-3**のようになる．すなわち，$\boldsymbol{u}_k$を中心として，一辺が$2\times a_1$（u_1方向）と$2\times a_2$（u_2方向）の矩形の領域を考え，この中で一様な確率でランダムウォークの次の１歩の候補$\boldsymbol{u}'$を発生させ，これが領域Fに含まれれば$\boldsymbol{u}_{k+1}$として採用してランダムウォークが成立し，含まれなければ採用されず$\boldsymbol{u}_k$に留まったまま，となる．ランダムウォークの次の１歩の範囲を正方形ではなく矩形とするとこにより，図のように領域Fが細長い形状の場合でも，標本を領域F内でまんべんなく発生させ，なおかつ不採用となる確率を低減して標本発生を効率化できる．

⑶　ランダムウォークの具体的な手順

前項のMCMCによる標本の発生方法を踏まえ，本論文におけるランダムウォークの具体的な手順は以下の通りとした．

MCMCを実施する空間すなわち標本のランダムウォークを実施する空間は，前項で示した通り，パラメータの累積確率値の空間$\boldsymbol{u}$とする．

以下，パラメータの数が２個の場合すなわち空間$\boldsymbol{u}$が２次元を例に説明する．

式(1)に関するパラメータとしては，$i=100$，$j=10$とした．すなわちsubset法の１つのステップでは100点の標本を発生させ，そのうち危険側10点から次のステップの領域Fを定める．**図-4**は，その次のステップでランダムウォークを開始するところを示したものである．前のステップで危険側の10点が定まっており，これを白丸○で示している．またそれにより定まる領域Fを緑でハッチングしている．ランダムウォークは10個の点をスタートとしてそれぞれ実施する．これを10個の「系列」と呼ぶことにする．

上記10点のu_1方向およびu_2方向の標準偏差を計算し，それぞれσ_1およびσ_2とする．ランダムウォークの次の１歩を進める際の矩形領域を定めるa_1およびa_2は次のように設定した．

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2\times\sigma_1 \\
a_2 &= 2\times\sigma_2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

σ_1，σ_2は，subset法の該当ステップにおける10個のスタート点から計算する．すなわちsubset法でステップが進み領域が狭められていくに従い，当然ながらランダムウォークの歩幅も変えていく（小さくしていく），ということである．

式(14)の中で標準偏差に乗じる係数「2」は，いくつかの予備検討を行って定めたものである．乗じる係数が小さいと，ランダムウォークの歩幅が小さくなり，発生する標本が領域Fの中で偏ってしまうことが多くなる．乗じる係数が大きいと，ランダムウォークの歩幅が大きくなるので，標本は領域Fの中でまんべんなく得られるようになるが，ランダムウォークで不採用となるケース，言い換えると無駄な解析や照査（図中の赤丸●）が多くなり，効率が悪くなる．

まずTrial-1として，10点それぞれから次の１歩を計算する．u_1およびu_2の少なくとも一方が(0,1)の範囲を外れたもの（図中の黒丸●）は不採用とし，その系列では元の点（図中の白丸○）がTrial-2のスタート点となる．u_1およびu_2がともに(0,1)の範囲に入ったものについては，そのパラメータで解析や照査を実施する．解析や照査の結果，評価指標が領域Fを定める境界値よりも安全側になった場合（図中の赤丸●）は不採用とし，その系列では元の点（図中の白丸○）がTrial-2のスタート点となる．解析やの結果，評価指標が領域Fを定める境界値よりも危険側になった場合（図中の緑丸●）は採用とし，その系列では緑丸●の点がTrial-2のスタート点となる．

次にTrial-2として，Trial-1で定まったスタート点10点（図の例では，系列3，8，10は緑丸●，それ以外外の系列は白丸○）から，Trial-1と同様に次の１歩を計算する．

以下同様にして，Trial-3，Trial-4・・とランダムウォークを続けていき，採用される標本の累計が100点（前のステップから引き継いだ図中の白丸○の10点を含む）になったところで終了する．

参考文献2)の適用例では，10個の系列毎に10点採用されるまでランダムウォークを続け合計100点の標本を発生しているが，本論文では上記に書いたようにTrial毎に採用される系列と採用されない系列があるので，ランダムウォーク終了時の100点の内訳は，必ずしも10個の系

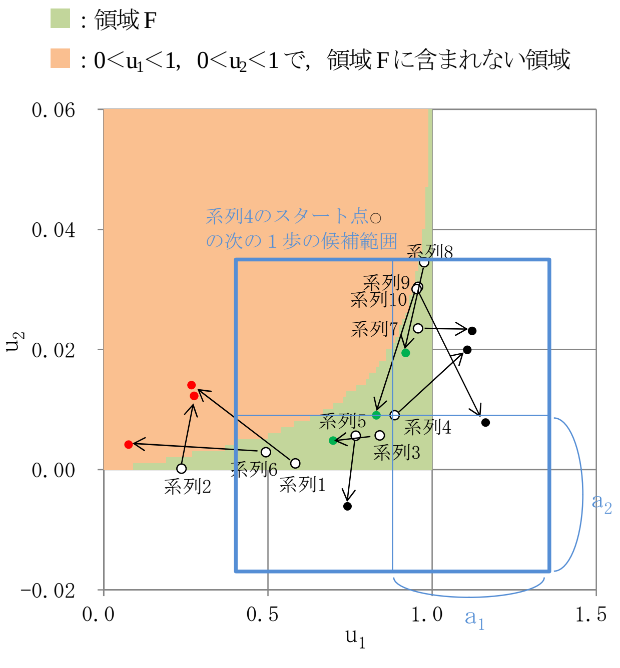


図-4　ランダムウォークの手順

列でそれぞれ10個ずつというわけではない．このようにしたのは，**図-3**でスタート点（黒丸）がたとえば領域*F*の左隅の方にある場合よりも中心付近にある場合の方が次の１歩が採用される確率は高く，そのプロセスを最終的に採用する100点の構成に直接反映させるのが合理的と考えたためである．

3.　地中構造物の評価への適用

(1)　検討条件

subset法を地中構造物の地震時損傷確率に適用し，その有効性を検証した．対象としたのは，原子力発電所屋外重要土木構造物の取水ダクトを想定した地中構造物[3]である．**図-5**に検討対象構造物の全体図を，**図-6**に構造物の配筋図を示す．

入力地震動は，-5.0mの岩盤における2E波として，コンクリート標準示方書[4]に示されているレベル２地震動（内陸型）の振幅を0.92倍にした波を適用する．0.92倍というのは，損傷確率が今回目安として設定した5×10^{3}程度になるように調整したものである．入力地震動を**図-7**に示す．地盤物性をばらつかせた予備解析数ケースで，2.0秒付近のピークで構造物の層間変形角の最大値が発生するのを確認の上，**図-7**に示したように，解析には最初の3.0秒間のみを用いる．鉛直地震力は，上記入力地震動の最大加速度の1/2の値を静的下向きに作用させることで考慮する．

地盤の物性値を**表-1**に示す．**図-8**に示すR-Oモデルに

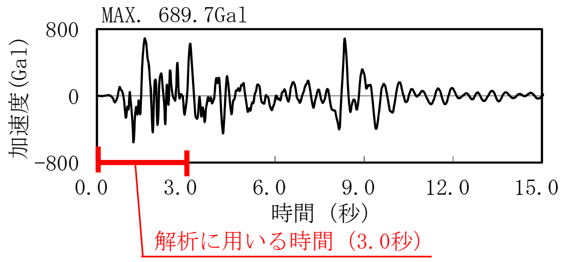


図-7　入力地震動

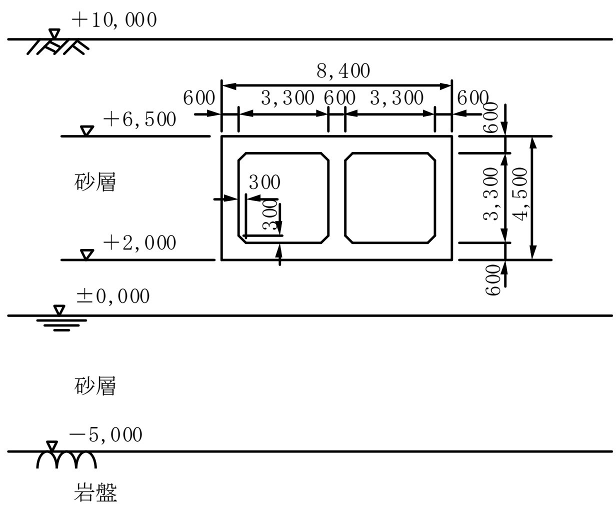


図-5　検討対象構造物

表-1　地盤物性

	単位重量 γ (kN/m^{3})	ﾎﾟｱｿﾝ比 ν	V_S (m/s)	初期減衰 h_0 (%)
砂層 地下水位以上	18.0	0.40	300	2.0
砂層 地下水位以下	20.0	0.48	300	2.0
岩盤	20.0	0.33	700	2.0

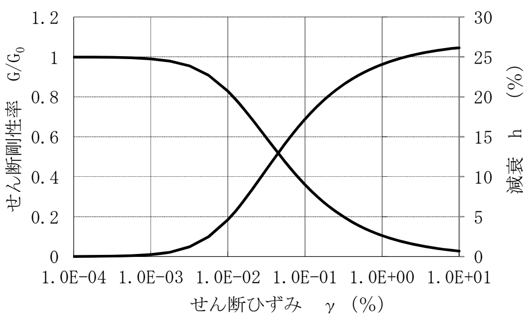


図-8　地盤の非線形特性（R-Oモデル）

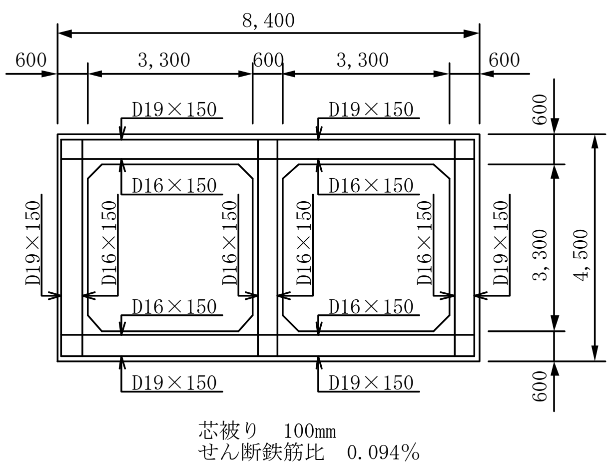
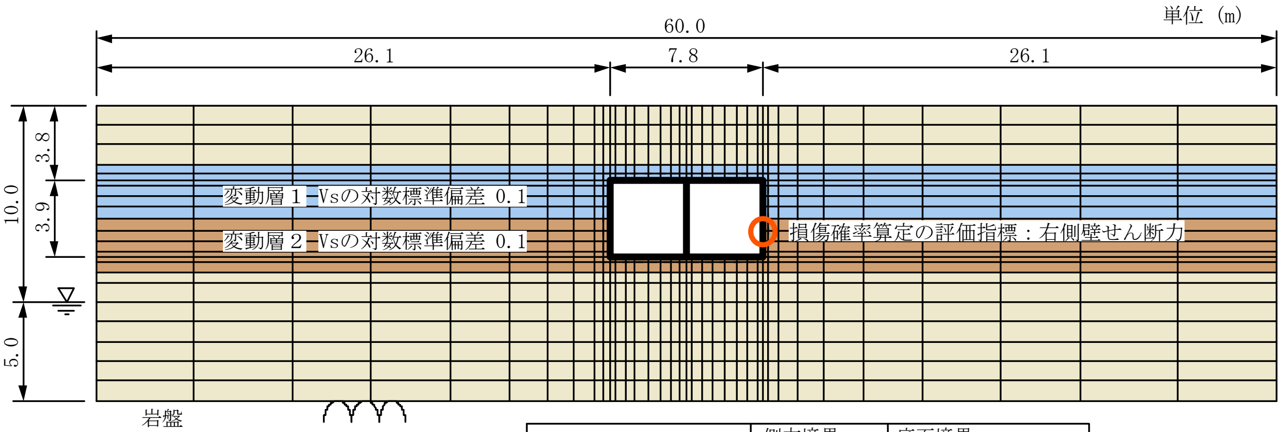


図-6　配筋図

表-2　構造物物性

材料	項目	物性値
コンクリート	設計基準強度	24 N/mm^{2}
	圧縮実強度 f_{ck}	33.6 N/mm^{2}
	ポアソン比	0.20
	単位体積重量	23.0 kN/m^{3}
鉄筋	設計降伏強度	345 N/mm^{2}
	降伏実強度	379.5 N/mm^{2}
	ヤング係数	200.0 kN/mm^{2}
	ポアソン比	0.30
	単位体積重量	77.0 kN/m^{3}



	側方境界	底面境界
自重解析・鉛直震度解析	鉛直ローラー	固定
動的解析	粘性境界	粘性境界（岩盤物性）

図-9 解析モデル

よる非線形特性を考慮する．

構造物の物性値を**表-2**に示す．表には設計強度と実強度を記載しているが，応答評価および耐力評価に用いる強度としては，実強度の方（コンクリート：圧縮実強度，鉄筋：降伏実強度）を用いる．構造物はファイバーモデルでモデル化して非線形特性を考慮する．コンクリートの非線形特性はコンクリート標準示方書[4]に示されるコンクリートの応力－ひずみ曲線にて，鉄筋の非線形特性はバイリニアモデルにてモデル化する．

地盤と構造物間には，剥離・滑動を表現するジョイント要素等は設けない．

損傷確率算定の評価指標は，事前検討で破壊判定が最も厳しくなった右側壁せん断力とする．

図-9に解析モデルを示す．変動パラメータは，構造物上部に位置する層（変動層１）と構造物下部に位置する層（変動層２）の物性の２つとし，それぞれV_Sの対数標準偏差を0.1とする．上記の２つを変動パラメータとして選んだ理由は，既往の研究[3]により，側壁のせん断力の変動は，構造物上部に位置する層と構造物下部に位置する層の剛性差に影響を受けやすいという知見を得ているためである．

解析は，

自重解析 → 鉛直震度解析 → 動的解析

が解析１ケースの１セットで，各解析間で地盤および構造物要素のひずみと応力を受け渡す．

解析プログラムはTDAPⅢを使用する．

右側壁の耐力照査等は参考文献5)に従って行う．照査時刻は，構造物の層間変形角（構造物上下端の変位差を構造物高さで除した値）が最大となる時刻とする．せん断耐力は部材に発生する曲げモーメントや軸力に依存するので，厳密に言えば標本ケースごとにせん断耐力は異なるが，本論文においては評価の簡略化のため，せん断耐力は平均物性のケースで算出した値で固定して評価する．

(2) 検討結果

subset法の各ステップにおいてMCMCでランダムウォークを行う空間は，前章(2)(3)で述べたように，V_Sを変動させる際の累積確率値の空間$\boldsymbol{u}$とする．変動層１のV_Sの累積確率値をu_1，変動層２のV_Sの累積確率値をu_2とする．

本論文では，subset法による損傷確率評価に先立ち，u_1およびu_2をそれぞれ100等分して設定したV_Sを組み合わせた10000ケース，ならびにu_1を100等分およびu_2の0～0.1の間を100等分して設定したV_Sを組み合わせた10000ケースの合計20000ケースに対して，**図-9**に示した２次元動的非線形解析のパラメータスタディを実施し，損傷確率や危険側領域の正解値を評価した．u_2の0～0.1の間を100等分したケースを加えた理由は，後述の結果で示すように，危険側に移行していくに従い，u_2が小さくなっていくためである．

subset法の１ステップ目の結果（**図-2**でいえばステップ１に相当するもの）を**図-10**に示す．横軸の値が大きいほど変動層１のV_Sが大きく，縦軸の値が大きいほど変動層２のV_Sが大きくなる．この段階ではまだMCMCによるランダムウォークは適用しない．まず$0 < u_1 < 1$，$0 < u_2 < 1$の範囲で，ラテンハイパーキューブサンプリング法（LHS）により一様乱数を発生させ，100点の標本を設定する．これが図中の黒点と赤点の和集合である．これらの点に相当するV_Sを適用した100ケースの解析を実施し，危険側10点（右側壁せん断力が最も大きい方から10個まで）の標本をピックアップしたものが図中の赤点である．危険側から10点目と11点目の標本のせん断力の相乗平均値（subset法の境界値）を算出する．

本論文では上述したように，u_1およびu_2をそれぞれ100等分して設定したV_Sを組み合わせた10000ケースのパラメータスタディを実施しているが，橙領域■は，10000ケースのうちせん断力がsubset法の境界値以上となるケースを領域表示したもの，言い換えるとsubset法で予測される危険側1/10領域である．一方青領域■（橙領域の後ろに隠れた部分も含む）は，10000ケースのうちせん断力が大きい方から1000ケース分を表示した領域，すなわち危険側1/10領域の正解値である．本来橙領域と青領域は一致すべきものであるが，subset法の標本数が100点と有限数のため，一般には誤差（ずれ）が生じる．今回は誤差は図のように小さいが，この誤差については４章にて理論的に考察する．また本図の橙領域と青領域，あるいは後述する**図-11**や**図-12**で色のついた領域の境界線は，実際には滑らかな曲線となるはずであるが，本検討では有限個のパラメータスタディにより評価しているため，領域は各標本点の矩形分担分を塗りつぶしている．このため図のように境界線はぎざぎざの階段状になっている．

なお**図-10**からわかるように，今回危険側の領域は図の右下の方，すなわち変動層１のV_Sが大きく変動層２のV_Sが小さいところに分布している．これは既往の研究[3]における，側壁下部のせん断力が大きくなるのは，構造物上半分の地盤が固く構造物下半分の地盤が軟らかい場合，という知見に対応している．

subset法の２ステップ目の結果（**図-2**でいえばステップ２に相当するもの）を**図-11**に示す．ここでは，１ステップ目の危険側10点（**図-10**の赤点）をスタート点としたMCMCによるランダムウォークが実施される．この図では，見やすいように横軸と縦軸の表示比を変えている．図で白丸○が**図-10**における赤点すなわちランダムウォーク10系列のスタート点である．ここから前章(3)で述べたルールに従ってランダムウォークを開始する．次の１歩のu_1およびu_2の少なくとも一方が(0,1)の範囲

●および●：LHSによる100点の標本
●：危険側10点の標本
■：subset法１ステップ目で予測される危険側1/10領域
■：危険側1/10領域の正解値（■に隠れている部分含む）

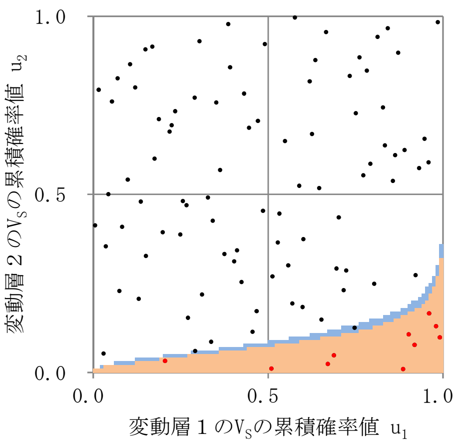


図-10　subset法１ステップ目の結果

○：ランダムウォークスタート点（**図-10**における●）
■：**図-10**における■の領域
■：**図-10**における■の領域
●：ランダムウォークの過程で不採用となった点
●および●：ランダムウォークの過程で採用となった点
●：危険側10点の標本（○を１点含む）
■：subset法２ステップ目で予測される危険側1/100領域

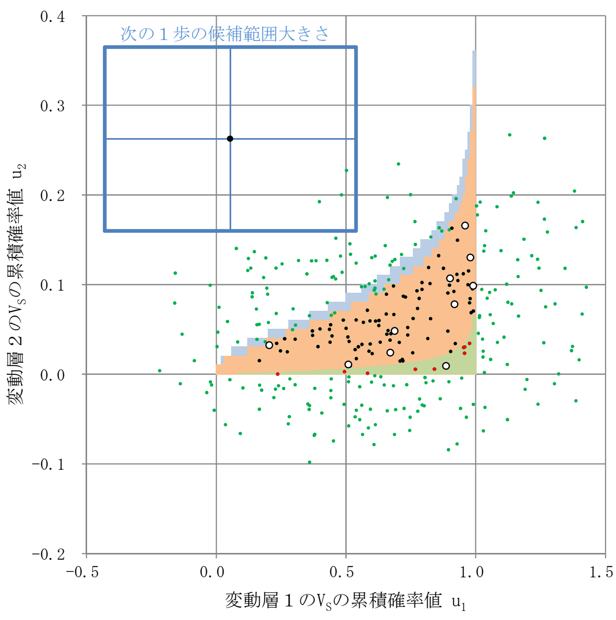
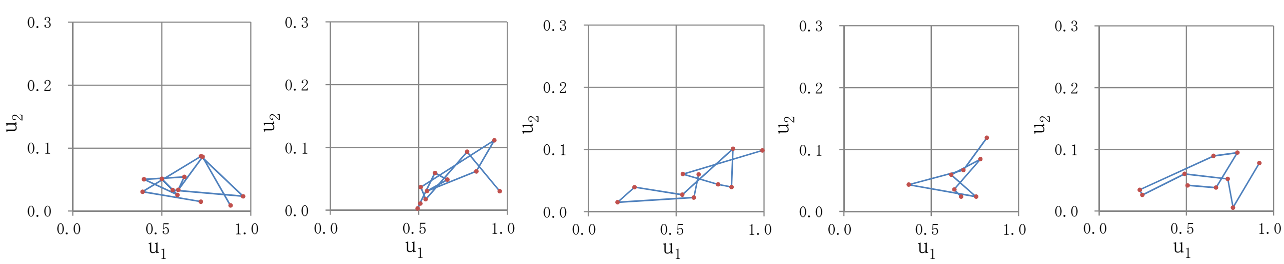


図-11　subset法２ステップ目の結果



系列１　系列２　系列３　系列４　系列５

図-12　ランダムウォークの軌跡（subset法２ステップ目）

を外れれば不採用となる．u_1およびu_2がともに(0,1)の範囲に入ったものについては，それらの点に相当するV_Sを適用した解析を実施し，右側壁せん断力が１ステップ目の境界値以下となれば（図でいえば橙領域に入らなければ）不採用となり，境界値以上となれば採用となる．採用標本が100点になったところでランダムウォークを終了する．その100点が図の白丸○と黒点●と赤点●の和集合である．100点は橙領域の中で概ね一様に分布しており，MCMCによるランダムウォークが良好に機能していることがわかる．

100点の標本のうち，危険側10点（右側壁せん断力が最も大きい方から10個まで）の標本をピックアップしたものが赤点（白丸を１点含む）である．危険側から10点目と11点目の標本のせん断力の相乗平均値（subset法の境界値）を算出し，危険側1/100領域を予測する（図の緑領域）．

参考として，10個の系列のうち系列1～系列5のランダムウォークの軌跡を**図-12**に示す．これらはランダムウォークの過程で採用された標本を順番につなげたものである．図より，標本は広範囲にわたって無作為に動いている様子が見られ，これからもMCMCによるランダムウォークが正常に機能していることが伺える．

subset法の３ステップ目の結果（**図-2**でいえばステップ３に相当するもの）を**図-13**に示す．ここでは，２ステップ目の危険側10点（**図-11**の赤点）をスタート点としたMCMCによるランダムウォークが実施される．この図でも，見やすいように横軸と縦軸の表示比を**図-10**および**図-11**から変えている．

本論文では先述したように，u_1を100等分およびu_2の0～0.1の間を100等分して設定したV_Sを組み合わせた10000ケースのパラメータスタディを実施している．緑領域■（桃色領域■に隠れている部分も含む）は，10000ケースのうち右側壁せん断力がsubset法２ステップ目の境界値以上となるケースを領域表示したもの，すなわちsubset法２ステップ目で予測された危険側1/100領域である．紫領域■（緑領域とほとんど一致しているので見えない）は，10000ケースのうち右側壁せん断力が大きい方から1000ケース分を表示した領域，すなわち危険側1/100領域の正解値である．また桃色領域■は10000ケースのうち右側壁せん断力がせん断耐力を上回る領域すなわち破壊領域である．この領域の面積すなわち損傷確率は5.15×10^{-3}であった．この値は有限個のパラメータスタディから得られる値，言い換えれば**図-13**で境界線がぎざぎざの階段状となっている桃色領域の面積であるため，厳密には損傷確率の正解値とは言えないが，パラメータスタディの数は十分多く，境界線のぎざぎざも細かく滑らかな曲線に近い形状になっており誤差は小さいと考えられる．したがって以後5.15×10^{-3}を損傷確率の正解値と呼ぶことにする．

図で白丸○が**図-11**における赤点すなわちランダムウォーク10系列のスタート点である．ここからsubset法２ステップ目と同様にランダムウォークを開始し，採用標本が100点になったところでランダムウォークを終了する．その100点が図の白丸○と黒点●と赤点●の和集合である．100点は緑領域■（桃色領域■に隠れている部分も含む）の中で概ね一様に分布しており，MCMCによるランダムウォークが良好に機能していることがわかる．なおsubset法３ステップ目では，２ステップ目と比較して緑点●の数すなわちランダムウォークの過程で不採用となるケースが多い．これは３ステップ目でランダムウォークが採用される緑領域■が，２ステップ目でランダムウォークが採用される橙領域■（**図-11**）よりも領域の形がL字型に曲がったシャープな形をしていることと，u_2に関する次の１歩の歩幅が若干大きめに設定されていることにより，採用となる領域に入りにくくなっているためである．

100点の標本のうち，右側壁せん断力がせん断耐力を上回る標本をピックアップしたものが赤点（一部スタート点の白丸を含む）であり，カウントすると56点となった．すなわちsubset法を用いて評価された損傷確率は

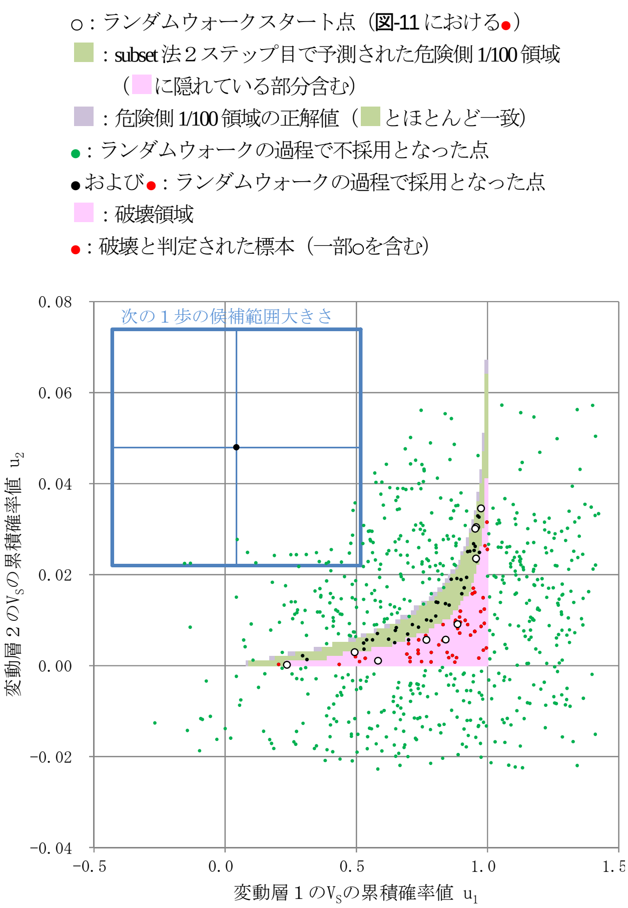


図-13　subset法３ステップ目の結果

5.6×10^{3}である．これは，正解値5.15×10^{3}に対して良好に評価されているということができる．

subset法による損傷確率で実施した解析数を**表-3**に示す．採用解析数とは，損傷確率評価に必要な最低限の解析数である．subset法の２ステップ目と３ステップ目の採用解析数が100ではなく90であるのは，必要な100個の標本のうち10個の標本は前のステップから引き継いでいるものだからである．不採用解析数とは，ランダムウォークの過程でu_1およびu_2がともに(0,1)の範囲に入ったが，解析をした結果，評価指標がsubset法の境界値よりも危険側にならなかった解析の数，すなわち**図-11**，**図-13**で，緑点●のうちu_1およびu_2がともに(0,1)の範囲にある点の数である．採用解析数の計が280ケースであるのに対し，今回の検討では，不採用解析数がそれとほぼ同等の286ケースあった．特にsubset法の３ステップ目のみに注目すると，不採用解析数は採用解析数の２倍以上に達している．最終的な解析数の合計は566ケースとなった．

表-3　実施解析数

	採用 解析数	不採用 解析数	計
subset法 １ステップ目	100	―	100
subset法 ２ステップ目	90	76	166
subset法 ３ステップ目	90	210	300
計	280	286	566

4.　subset法における誤差について

本章では，MCMCによるランダムウォークが良好に機能しているという前提のもとで，subset法に含まれる理論的な誤差について考察する．subset法の１つのステ

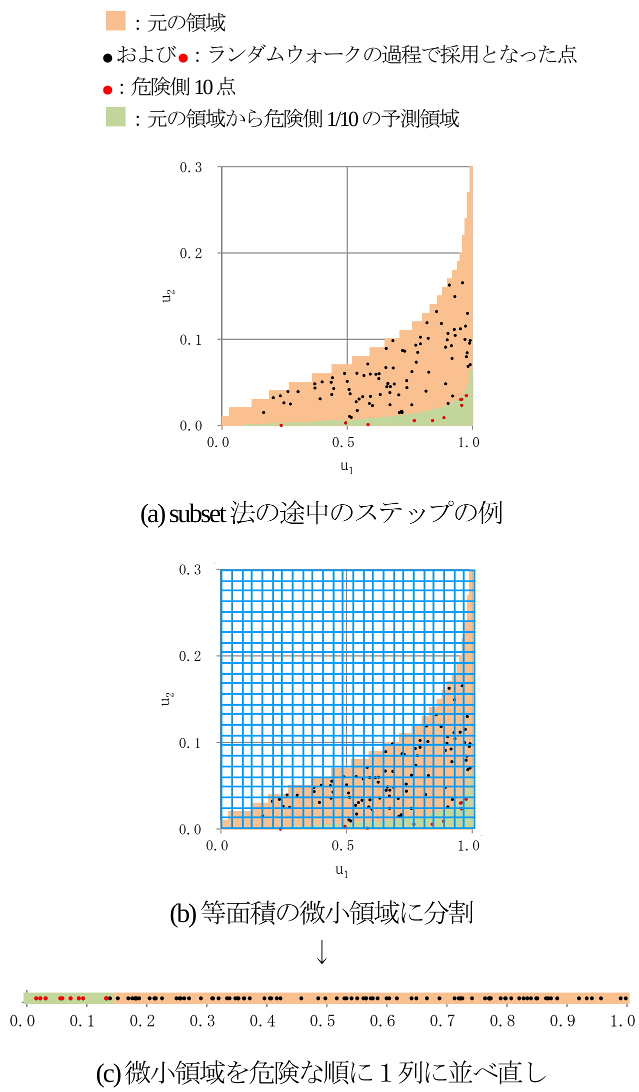


図-14　subset法の途中のステップの誤差の概念

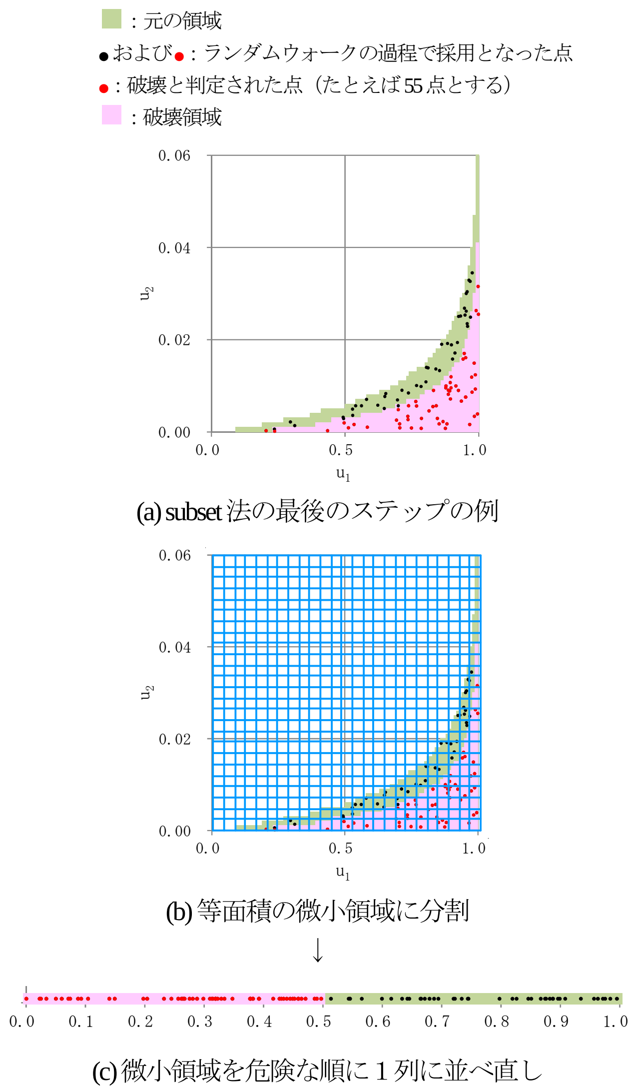


図-15　subset法の最後のステップの誤差の概念

ップでは，たとえば本論文においては100個の標本を発生させて危険側10個の標本をピックアップすることにより危険側1/10の領域を予測している．しかし，標本の数が有限であることにより誤差が生じることは，**図-10**で橙領域（予測領域）と青領域（正解領域）にずれが生じることで既に示した．ここではこの誤差を理論的に評価する．

図-14 (a)は，subset法のある途中のステップで，100個の標本から危険側10個の標本をピックアップすることにより，元の領域（橙領域）の面積を1.0としたとき危険側領域（緑領域）の面積が0.1であると予測している例を示している．ここで**図-14** (b)のように領域を等面積の微小領域に分割し，それらを評価指標が危険な順に一列に並べ直すと**図-14** (c)のようになる．すなわちsubset法の途中のステップは，0～1の間で一様乱数による標本を100個発生させ，値の小さい10個の標本をピックアップすることにより長さ0.1の区間を予測する，という１次元の問題に置き換えることができる．**図-14** (c)では標本が有限個のため誤差が生じ，緑区間の長さが0.1になっていない例が示されている．

一方**図-15** (a)は，subset法の最後のステップで，100個の標本から破壊領域に含まれる標本をカウントし（たとえば55個であったとする），元の領域（緑領域）の面積を1.0としたとき破壊領域（桃色領域）の面積が0.55であると予測している例を示している．ここで**図-14**と同様に**図-15** (c)のように１次元に置き換える．すなわちsubset法の最後のステップは，0～1の間で一様乱数による標本を100個発生させ，決まった区間に含まれる標本をカウントすることにより，その区間長を予測する，という１次元の問題に置き換えることができる．**図-15** (c)では標本が有限個のため誤差が生じ，破壊領域の長さ（**図-15** (a)でいえば緑領域（桃色領域に隠れている部分も含む）の面積を1.0としたときの桃色領域の面積）の正解値が0.5であるのに，0.55と予測されている例が示されている．

上記の１次元の問題への置き換えは，パラメータの個数（$\boldsymbol{u}$の次元）がいくつでも成り立ち（文中の「面積」を「体積」と読み替えればよい），また元々の変動パラメータがどのような確率分布に従うか，あるいは評価指標の値がどのような確率分布に従うか，等とは無関係である．

「0～1の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたとき，0～α（$0<\alpha<1$）の範囲にk個含まれる確率$A(\alpha,k,n)$」を考える．これは，特定のk個が0～αの範囲に含まれ特定の$n-k$個が0～αの範囲に含まれない確率$\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$に，n個からk個を選ぶ組み合わせの個数を乗じればいいから，式(15)のようになる．

$$A(\alpha,k,n)=Comb(n,k)\alpha^k(1-\alpha)^{n-k} \tag{15}$$

ここに，

$Comb(n,k)$：n個からk個を選ぶ組み合わせの個数

「0～1の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたとき，0～t（$0<t<1$）の範囲にk個以上含まれる確率$B(t,k,n)$」は同様に式(16)のようになる．

$$\begin{aligned}B(t,k,n)&=\sum_{r=k}^{n}A(t,r,n)\\&=\sum_{r=k}^{n}Comb(n,r)t^r(1-t)^{n-r}\end{aligned} \tag{16}$$

$B(t,k,n)$は「0～1の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたとき，小さい方からk番目の値がt以下となる確率」と言い換えられ，tを変数とみれば「0～1の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたときの，小さい方からk番目の値tの累積確率関数」となる．

したがって，「0～1の範囲にn個の独立な一様乱数を発生させたときの，小さい方からk番目の値tの確率密度関数$C(t,k,n)$」は，$B(t,k,n)$をtで微分した関数であり，式(17)のようになる．

$$\begin{aligned}C(t,k,n)&=\frac{d}{dt}B(t,k,n)\\&=\sum_{r=k}^{n}Comb(n,r)(r-nt)t^{r-1}(1-t)^{n-r-1}\end{aligned} \tag{17}$$

式(17)がsubset法の途中のステップの誤差を考えるときに基本となる式であり，式(15)がsubset法の最後のステップの誤差を考えるときに基本となる式である．

まずsubset法の途中のステップの誤差を考える．0～1の間で一様乱数による標本を100個発生させ，小さい方か10番目と11番目の標本値の確率密度分布を式(17)に従って計算して描いたものが**図-16**の緑線と赤線，および上記２つの確率密度分布の平均値を描いたものが同図の黒線になる．subset法の途中のステップでは，10番目と

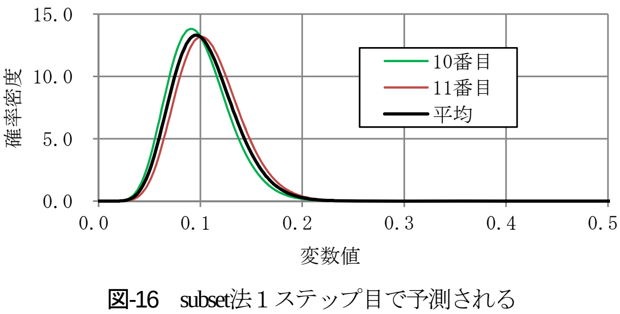


図-16　subset法１ステップ目で予測される危険側1/10領域の面積の確率密度分布

11番目の評価指標値の平均を評価指標の境界値としているから，**図-16**の黒線（平均）を見ればよい．この分布がsubset法１ステップ目で予測される危険側1/10領域の面積（**図-10**，**図-11**における橙領域の面積）の確率密度分布である．

次に，subset法２ステップ目で予測される危険側1/100領域の面積を考える．これは確率密度が**図-16**に従う２つの変数の積の確率密度分布であり，以下の数値計算により求められる．

①**図-16**の分布を微小バンドに区分．

②微小バンドにおける変数値を２変数のマトリクス方式で掛け合わせ，その確率密度を考慮することにより変数値の積の累積確率分布を求める．

③累積確率分布の差分を取り，スムージングをかけることにより確率密度分布を求める．

上記のようにして求めたものが**図-17**であり，この分布がsubset法２ステップ目で予測される危険側1/100領域の面積（**図-11**，**図-13**における緑領域の面積）の確率密度分布である．

最後に，subset法の最後のステップで予測する損傷確率を考える．「0～1の範囲で100個の独立乱数を発生させた場合に，0～α（$0 < \alpha < 1$）の範囲にk個含まれる確率」を式(15)に従って，αをいろいろ変えた場合のkの確率を描いたものが**図-18**である．損傷確率予測値の確率密度分布は，以下の数値計算により求められる．

①**図-17**の分布を微小バンドに区分．

②バンド毎に$\alpha = F/X$（ここに，X：バンドの変数値，F：損傷確率の正解値）として，式(15)により**図-18**に示す1～100の各kの確率を求め，**図-17**の確率密度を加味して集計する．kは損傷確率予測値$k \times 10^{-4}$に対応する．

③スムージングをかけ，確率密度分布に変換する．

ただし**図-17**で，損傷確率の正解値（赤点線）よりも小さい側に分布している部分については，subset法の２ステップ目で100個の標本のうち破壊カウント数が10以上（損傷確率予測値が1.0×10^{-2}以上）となって損傷確率が求まり３ステップ目が必要なくなるケースであり，上記操作の対象外となる．言い換えると上記操作で確率密度分布が求まるのは，損傷確率予測値が0～0.01の範囲である．損傷確率予測値が0.01以上の確率密度分布は，**図-16**の分布と**図-18**の分布に対して上記操作を同様に行い，kが10以上となるものを集計することにより求められる．この場合，kは損傷確率予測値$k \times 10^{-3}$に対応する．

以上のようにして求めたsubset法による損傷確率予測値の確率密度分布が**図-19**である．MCMCによるランダムウォークが良好に機能しているという前提のもとで，今回の論文で行ったsubset法による損傷確率評価を，乱数を変えて数多く実施した場合，損傷確率予測値は**図-19**に示す確率密度分布に従ってばらつくことになる．図には損傷確率正解値5.15×10^{-3}と今回の損傷確率予測値5.6×10^{-3}を併記しているが，理論的な予測値のばらつきと比較すると，今回の予測結果は，比較的正解値に近い値が得られたという位置付けの事例であることがわかる．

今回の損傷確率評価ではsubset法において，式(1)で$i = 100$，$j = 10$，すなわち100個の標本中の危険側10個から危険側1/10の領域を予測する，という設定としているが，$i = 500$，$j = 50$，すなわち500個の標本中の危険

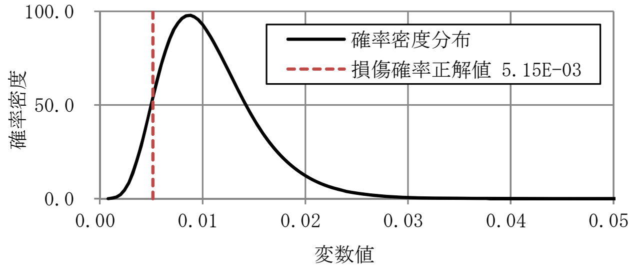


図-17　subset法２ステップ目で予測される危険側1/100領域の面積の確率密度分布

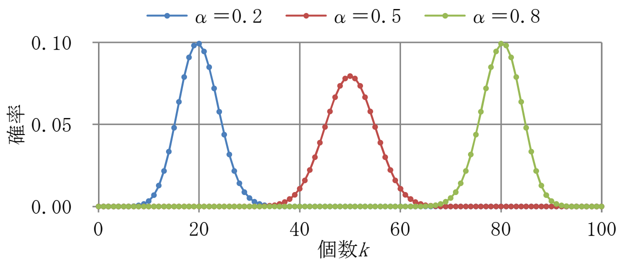


図-18　0～1の範囲で100個の独立乱数を発生させた場合0～αの範囲に含まれる個数kの確率

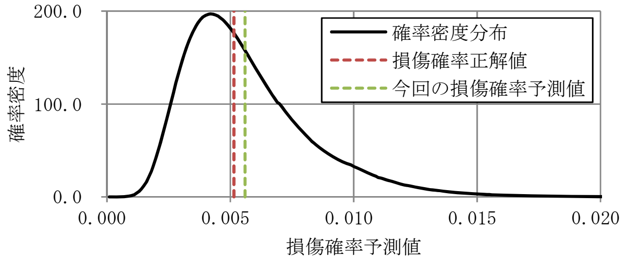


図-19　subset法による損傷確率予測値の確率密度分布

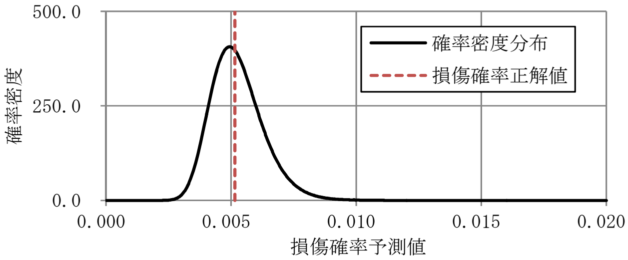


図-20　式(1)でi=500,j=50とした場合のsubset法による損傷確率予測値の確率密度分布

側50個から危険側1/10の領域を予測する，という設定とした場合の損傷確率予測値の確率密度分布を求めたものが**図-20**である．標本数を増やすことにより精度が増し，**図-19**と比較してばらつきの幅が小さくなることがわかる．ただし当然ながら標本数を増やすということは，解析数が増えるということになる．

なお**図-19**，**図-20**において，損傷確率正解値は，損傷確率予測値の確率分布の中央値（累積確率が0.5となるところ）となっている．

5. まとめ

損傷確率が微小な場合の損傷確率評価に有効であるsubset法を，地盤－構造物一体２次元FEMモデルによる動的非線形解析に基づく地中構造物の地震時損傷確率評価に適用し，その有効性を検証した．標本の発生方法としてはMCMC（Markov chain Monte Carlo simulation）を用いた．細部の具体的な手順においては，今回考案した多少の工夫を施し，評価の効率化を図った．検討の結果，subset法の各ステップにおけるMCMCによる標本発生は良好に機能し，概ね妥当な損傷確率評価ができた．

また本手法で損傷確率算定する際に理論上含まれる誤差について考察を行い，今回の適用例における損傷確率予測値が，理論的な誤差によるばらつきの中で，比較的正解値に近いところに位置することを確認した．

筆者らは，信頼性設計法に基づく耐震設計システムとして，モンテカルロシミュレーションやパラメータスタディといった多くのケース数を必要とする解析を効率的に行えるシステムを開発している[6]．今回の検討もこのシステムを用いて実施しており，たとえばベンチマークとして行った20000ケースの解析等は非常に少ない労力で実施できるようになっている．今後はsubset法等の多少変則的なアルゴリズムを持つ手法にもさらに効率的に対応できるように，システムを改良していく予定である．

参考文献

1) Au, S. K.. and Beck, J. L. : Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis, Journal of Engineering Mechanics, Vol.129, No.8, pp.901-917, 2003.
2) 吉田郁政，砂糖忠信：MCMC を用いた損傷確率の効率的算定法，土木学会論文集，No.794/I-72，pp.43-53，2005.
3) 坂下克之，畑明仁，志波由紀夫：モンテカルロシミュレーションによる地中構造物の地震時損傷確率評価および評価手法の簡易化の検討，第 33 回地震工学研究発表会，23-D-1，7-409，2013.
4) 土木学会：2007 年度制定　コンクリート標準示方書 設計編, 2007.
5) 土木学会：原子力発電所屋外重要土木構造物の耐震性能照査指針・マニュアル，2005.
6) 坂下克之，畑明仁，志波由紀夫：信頼性設計法に基づく耐震設計支援システムの開発，大成建設技術センター報，第47号，2014.（投稿中）

THE SEISMIC FAILURE PROBABILITY EVALUATION OF THE UNDERGROUND STRUCTURE USING SUBSET SIMULATION

Katsuyuki SAKASHITA, Akihito HATA and Yukio SHIBA

In the failure probability evaluation of the structure in the case that the failure probability is small, normal Monte Carlo simulation is inefficient. Because that method which generates samples over the entire area of parameters needs an enormous amount of analyses to evaluate the failure probability with a high degree of accuracy. So in this paper, the seismic failure probability evaluation of the underground structure by dynamic nonlinear FEM analyses using subset simulation which iterates Monte Carlo simulation with narrowing the area of parameters gradually to the failure area is conducted. As a result, reasonable value of the failure probability is obtained by subset simulation. On the other hand, the error contained in subset simulation is analized theoretically.