多自由度系に付与する 最適減衰量及び配置に関する研究

小林 真也1・谷口 朋代2・小野 祐輔3・金氏 裕也4

¹株式会社 大隆設計(〒693-0056 島根県出雲市江田町40-5) E-mail:k.yashiki@okuizumo.ne.jp

²鳥取大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒680-8552鳥取県鳥取市湖山町南4丁目101) E-mail:t_tomoyo@cv.tottori-u.ac.jp

3鳥取大学大学院准教授 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒680-8552鳥取県鳥取市湖山町南4丁目101)

E-mail:ysk@cv.tottori-u.ac.jp ⁴鳥取大学大学院修士課程 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒680-8552鳥取県鳥取市湖山町南4丁目101)

E-mail:kaneuji08012@cv.tottori-u.ac.jp

本論文では、既設構造物にダンパーを付与して耐震補強を行う場合を想定し、付与減衰量の最適配置法 について多自由度系を対象に検討を行った。各層の変位を制約条件として与えた場合における最適化問題 の定式化を行うために、各次モードの減衰比をモード形状を用いて表わし、SRSS法に基づき構造物の地 震変位応答を導出しすることで、非線形計画問題として解析可能であることを示した。また、各層の減衰 比がモード減衰比に与える影響度について考察し、1次モードのモード形状から最適配置を判断できるこ とを示した。

Key Words : damper, optimal arrangement, earthquake resistant ,multiple degree of freedom system

1. はじめに

近年,経験的グリーン関数法等に基づき地震波を作成 する技術の向上もあり,想定断層から求めた地震波を用 いた既設構造物の耐震安全性の照査が盛んに行われるよ うになった.新設構造物の場合には,設計諸量の自由度 は多いため,多様な設計手法を用いて耐震基準を満たす 設計を行うことができるが,既存構造物に対して耐震補 強を行う場合には,新設構造物と比べ設計者が決定でき る設計諸量の自由度は格段に減少し適用しうる対策に制 約が多くなる.このような背景の下,既設構造物にダン パーを付与して耐震補強を行うことが広く行われている が,付与する減衰量やダンパーの配置は設計者の経験¹⁾ によるところが大きいと言われている.そこで本研究で は,付与減衰量の最適配置を合理的に決定する手法を提 案することを目的とする.

ダンパーの最適配置を求める手法は、これまでにい くつか提案されている. Takewaki²は、設置するダンパ ーの減衰係数の総和を制約条件として、離散化した伝達 関数の振幅の総和を最小化する問題として定式化し、ダ ンパーの最適配置を求める手順を示している. Mousavi and Ghorban-Tanha³は、建物の層間ドリフト量が構造物 の伝達関数と関係付けられることを示した上で、層間ド リフト量を最小化する手法を示している.

著者ら⁴は、既存構造物にダンパーを付与して耐震補 強を行う場合を想定し、付与減衰量の最適配置法を模索 した.各次モードに対する減衰比を要求性能として課し、 その性能を満たした上で各層に配置する減衰量の合計値 が最小となるよう最適化問題と定式化することで、線形 計画法が適用でき、制約条件を表す領域の集合が形成す る多面体の角が最適解の候補となり得ると考察した.し かしながら、要求性能の条件を各次モードの減衰比とし て与えた上で最適配置を検討することは、既設構造物の 耐震補強を行う上では必ずしも現実的ではない.そこで、 本研究では構造物の任意の層に許容される変位を要求性 能とした上で、付与する減衰量と配置を最適化する手法 を構築した.このように構造物の任意の層の変位の許容 値を直接的に取り扱うダンパー配置の最適化法は、これ までにほとんど研究されていない.

与えられる.



図-1 n自由度質点系モデル

2. 最適化問題の定式化

図-1 に示す n 自由度バネ - 質点系でモデル化された 既設構造物に地震動 ž が作用した場合に、減衰マトリ ックスの非対角項を無視して SRSS 法³⁾に基づき構造物 の地震応答変位を求める場合を考える.ここに、

 m_i, c_i, k_i :i層の質量、減衰定数、バネ係数、 ω_i, h_i :i層の

固有振動数,減衰比, $\varepsilon_i = m_i / m_1 : i$ 層の質量の1層の質量に対する比である.

最適減衰量とその配置を決定するために、各次モード の減衰比をモード形状を用いて表し、最適化問題を定式 化する.

まず s 次モードの減衰比 h^{9} は(la)式で表されるものと する.

$$h^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(s)} h_i$$

$$h_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)$$
(1a)

ここに、 $\gamma_i^{(s)}$:各層の減衰比がs次モードの減衰比へ及ぼ す影響を示す係数であり、 $\varphi_i^{(s)}$:s次モードのi層のモー ド形状、 $\omega_i^{(s)}$:s次モードの固有振動数を用いて次式で

$$\gamma_{i}^{(s)} = \frac{(\varphi_{i}^{(s)} - \varphi_{i-1}^{(s)})^{2} \varepsilon_{i} \omega_{i}}{\omega^{(s)} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i} \varphi_{i}^{(s)^{2}}}$$
(1b)
$$\varphi_{i}^{(s)} = A_{i} + B_{i} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$
$$A_{i} = -\frac{\varepsilon_{i-1} \omega_{i-1}^{2}}{\varepsilon_{i} \omega_{i}^{2}} \varphi_{i-2}^{(s)}$$
$$B_{i} = \left(1 + \frac{\varepsilon_{i-1} \omega_{i-1}^{2}}{\varepsilon_{i} \omega_{i}^{4}} - \frac{\varepsilon_{i-1} \omega^{(s)^{2}}}{\varepsilon_{i} \omega_{i}^{2}}\right) \varphi_{i-1}^{(s)}$$

$$\phi_0^{(s)} = 0 \tag{1d}$$

$$p_1^{(s)} = 1 \tag{1e}$$

任意の減衰に対する応答変位スペクトルの値を減衰定 数別補正係数 C_D ⁴を用いて求めるとすれば, i 層の地震 応答変位の絶対最大値 $|x_i|_{max}$ は SRSS 法を用いて次式で与 えられる.

a

$$|x_i|_{\max} \approx \left[\sum_{s=1}^n \phi_i^{(s)^2} \beta^{(s)^2} S_D(T^{(s)}, 0.05)^2 C_D^2\right]^{1/2}$$
 (2a)

$$C_D = \frac{1.5}{40h+1} + 0.5 \quad (0.5 < C_D < 2.0) \tag{2b}$$

ここに、
$$\beta^{(s)}$$
:s 次モードの刺激係数、 $S_D(T^{(s)}, 0.05)$:s

次モードの 5%減衰時の変位応答スペクトル値, *T^(s):s* 次モードの固有周期である. (2a), (2b)式より各層の変位 を得る.

$$|x_i|_{max} \approx \left[4\sum_{s=1}^n \varphi_i^{(s)^2} \beta^{(s)^2} S_D(T^{(s)}, 0.05)^2 C_d^{(s)}\right]^{1/2} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $C_d^{(s)} = (10h^{(s)} + 1)^2 (40h^{(s)} + 1)^2 (1/4 \le C_d^{(s)} \le 1)$ である. 既設構造物の *i* 層が許容できる絶対最大変位を $|x_i|_{max a}$ とすれば、式(3)と組み合わせて制約条件式(4)を得る.

$$\left\{ \left| x_i \right|_{maxa} \right\}^2 \ge 4 \sum_{s=1}^n \varphi_i^{(s)^2} \beta^{(s)^2} S_D \left\{ T^{(s)}, 0.05 \right\}^2 C_d^{(s)}$$

$$\left\{ i = 1, 2, \cdots, n \right\}$$

$$(4)$$

本研究では、多自由度系に付与する減衰量の合計値を

最小にすることを目的として,最適化問題を次のように 定義する.

目的関数:
$$\operatorname{Min}\left(2\sum_{i=1}^{n}\omega_{i}m_{i}h_{i}\right)$$

制約条件:式(4) (5)

3. 解析手法

はじめに、当該問題が線形計画問題として扱うことができれば、制約条件で構成される多面体の角を最適解の 候補として扱う問題と捉えることができ非常に有用であ るため、当該問題が線形問題として扱える可能性につい て検討する.式(4)の右辺第4項のs次モードの減衰に関 する項に着目すると、

$$\left(\left| x_i \right|_{\max a} \right)^2 \ge 4 \sum_{s=1}^n \phi_i^{(s)^2} \beta^{(s)^2} S_D(T^{(s)}, 0.05)^2 C_d^{(s)}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

式(6)は、変数 $C_d^{(s)}$ に関する線形不等式であり、目的関

数も $C_d^{(s)}$ に関して線形関数であれば、線形計画問題と

して扱えるが、本研究で扱う目的関数を、 $C_d^{(s)}$ に関する線形関数で表すことができない.これは、既設構造物の地震応答変位を求める際に、二乗和平方根を用いるSRSS法とs次モードの減衰に応じた地震応答変位を得るために、減衰定数別補正係数 C_D を用いているためであ

り、線形計画問題として扱えないので、本研究では非線 形計画問題として解析することにした.

式(5)より,制約条件式はn個の変数を持つn個の連立 非線形不等式で構成されているため,ニュートン法に代 表される反復解法⁵⁰⁰を用いるのが一般的である.しか し,式(5)はヘッセ行列の逆行列が存在しないため,本 研究では準ニュートン法を用いて解析を行うことにした. 一方,本研究で扱う問題は,目的関数を目的とする物理 量 h_iで微分を行うと式中に変数が残らないため,停留点 を判定することが出来ない.

そこで、ラグランジェ関数に基づく KKT 条件 [®]を用 いて与えられた目的関数と不等式条件を連立方程式で表 し、その連立方程式の解を求める問題に置き換えること にした.このとき、ラグランジェ乗数を新たに変数とし て不等式条件の数だけ加えるため、多元連立方程式の解 を求める問題となり、多元連立方程式全体を目的関数と 見て、各変数の条件を満たす最適化問題と捉えることで、 準ニュートン法を用いることが可能となる.本研究で扱う問題に対し,KKT 条件を用いて等式化した問題を以下に示す.

$$\frac{\partial L}{\partial h_i} = 1 - 240 \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{s=1}^n E^{(s)} \frac{10 \sum_{i=1}^n h_i + 1}{\left(40 \sum_{i=1}^n h_i + 1\right)^3} = 0 \quad (7a)$$

$$\lambda_{j} \left\{ -\left(\left|x_{i}\right|_{maxa}\right)^{2} + 4\sum_{s=1}^{n} E^{(s)} \frac{\left(10\sum_{i=1}^{n} h_{i} + 1\right)^{2}}{\left(40\sum_{i=1}^{n} h_{i} + 1\right)^{2}} \right\} = 0 \quad (7b)$$

$$E^{(s)} = \varphi_i^{(s)^2} \beta^{(s)^2} S_D \left(T^{(s)}, 0.05 \right)^2$$
(7c)

ここに、 $\lambda_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \dots n)$: ラグランジェ乗数である. 本研究では、付与する減衰の初期値を 0、ステップ幅 を 1、近似行列 **B**_kの初期値として単位行列を与え、収 束条件として多元連立方程式の各方程式の絶対値が 1.0×10^6 以下にすることとして、収束条件を満たす値を 停留点として判定する.したがって、準ニュートン法は 以下の流れで行われる.

- 1. 初期値 $x^0 (k=0)_{c}$ 設定する.
- 2. x^{k} が停留点 x^{*} に十分に近いという条件を終了判定とする.ここに、停留点 x^{*} とは、目的関数をfとすると、 $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ となる点である.
- 3. ステップ幅 a_k ,近似行列 \mathbf{B}_k の初期値として単位行列を与え、式(8a)より x^{k+1} を求め、k = k+1とおく.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - a_k (\mathbf{B}_k)^{-1} f'(x^k)$$
(8a)

4. BFGS 公式により, **B**_{k+1}を求め, 操作 2. へ戻る.

BFGS 公式は以下の式で表わされる.

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_{k} - \frac{\mathbf{B}_{k} r^{k} \left(\mathbf{B}_{k} r^{k}\right)^{\mathrm{T}}}{\left(r^{k}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{k} r^{k}} + \frac{y^{k} \left(y^{k}\right)^{\mathrm{T}}}{\left(r^{k}\right)^{\mathrm{T}} y^{k}}$$
(8b)



 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, \quad y^{k} = f'(x^{k+1}) - f'(x^{k}), \quad r^{k} = x^{k+1} - x^{k} \subset \mathcal{D},$

図-2 に示すフローチャートにより、本研究で扱う問 題について解析を行う.

4. 各層の減衰比が応答変位低減に及ぼす影響に 関する考察

ここでは表-1に示す4,10,20層のビル状の既設構造 物の固有周期がそれぞれ0.4秒,1.0秒,20秒となるよ うに、全層が等しい質量と剛性を有する構造モデルを仮 定し、地震加速度を受ける場合の応答変位に対する各層 の減衰比の影響をモード形状を用いて考察できることを 示し、かつ付与する減衰の最適配置をモード形状から推 定できることを示す.

入力加速度として兵庫県南部地震時に I 種地盤, Ⅱ種 地盤, Ⅲ種地盤においてそれぞれ観測された地震波を用



いる. 図-3から図-5に用いた地震波形を示す.

(1) モード形状の影響について

式(6)において、 $C_{l}^{(s)}$ に乗じる係数を

$$C = 4\phi_i^{(s)}\beta^{(s)2}S_D(T^{(s)}, 0.05)^2$$
(9)

として抽出する.係数Cは、モード毎の減衰比が対象 とする地震動による応答変位に及ぼす影響を示しており、 値が大きい程モード減衰比の変化に対する構造物の応答 変位の変化が大きいことを表す.係数Cについてそれ ぞれの構造物と地震動の組合わせ毎に4次モードまでを 図化したものを図-6から図-8に示す.

これらの図より、構造モデルと地震動の組合わせに関わらず1次モードが最も影響が大きいことが分かる.また、自由度が増える程2次モードの影響が大きくなっていることが分かる.この傾向を最も強く示しているのはI種地盤であり、その理由は、図-9に示す変位応答スペクトル図から読み取れる.I種地盤は、II種地盤やIII種地盤と比べて、変位応答スペクトルの傾きが緩やかに変わりはじめる周期が短く、変化後の傾きがII種地盤やIII種地 盤と比べ緩やかである。自由度が多い構造物の場合には、1次モードと2次モードの固有周期が近接してくるので、

表-1	実行結果(全層低減,	急縮無
-----	------------	-----

モデル	質量[kg]	剛性[N/m]	I種地盤		Ⅱ種地盤		Ⅲ種地盤	
			減衰比	配置層	減衰比	配置層	減衰比	配置層
4層	1.0.E+05	2.0.E+08	0.45925	1	0.45918	1	0.45919	1
10 層	1.0.E+05	1.5.E+08	0.29043	1	0.28569	1	0.28537	1
20 層	1.0.E+05	1.7.E+08	0.23549	1	0.17210	1	0.15967	1



図-8 20 自由度系の係数 C(I, II, III種地盤)



図-9 変位応答スペクトル

1次モードと2次モードの変位応答スペクトル値が近い値 になることがこの傾向の理由である.しかし,一般に変 位応答スペクトルの値は周期の長い低次モードほど大き くなる傾向があるため,2次モードの影響度が1次モード の影響を上回るためには,*i*層の2次モードの形状と刺激 係数の積が1次モードのそれを上回る必要があるが,一般にそのようなことは起こり得ないことから,1次モードを減衰させることが構造物の変位を抑制するために必要不可欠となる.

(2) 各層の減衰比の影響について

各層の減衰比 h_i にかかる係数 $\gamma_i^{(s)}$ について、それぞれの構造物の1次モードと2次モードの値を図化したものを図-10から図-12に表す.

2次モードの方が影響が大きくなる場合も見受けられ るが、1次モードの方が2次モードより、明らかに値が大 きいため、2次モードを数10%減衰させるよりも、1次モ ードを数%減衰させる方が実変位を抑える上で効果的で あるといえる.したがって、1次モードを効率よく減衰 させる最下層にダンパーを配置することが効果的である ことが分かる.



(3) モード形状の相対差の影響について

これまでは、全層が等しい質量と剛性を有するビル状の構造物を対象に検討を行ってきたが、ここでは各構造物の半分より上層の質量と剛性が下層のそれらの1/2になる場合(以下、急縮と示す)について検討する.表-1に示した構造モデルそれぞれについて、急縮がある場合と無い場合の1次モード形状の相対差を図-13から図-18に示す.1次モードに着目する理由は、(1)節で得た考察が急縮の有無に関わらず成立すると考えたからである.

各構造モデルの半分より上層が急縮する場合について、 1次モードのモード形状及び相対変位を示す.

(2)節において、1次モードの係数 $\gamma_i^{(s)}$ の値の大きい層 にダンパーを配置することが構造物の変位を抑制する上 で効果的であると考察した. 急縮の有無に関わらずこの 考察が成立すると仮定すると、式(lb)に示す $\gamma_i^{(s)}$ の定義 より、モード形状の相対差が大きい程 $\gamma_i^{(s)}$ の値は大き くなるので、急縮がある場合には急縮部の下層にダンパ ーを配置すれば良いと考えられる.

5. 最適化法の実行結果

変位制約条件として,各構造物の各モードの減衰比が 5%の時の変位応答を基準とし,①全層の変位応答をそ れぞれ 10%低減させる場合,②特定の層の変位応答を 10%低減させる場合の最適減衰量とその配置の解析結果 を示し考察を加える.入力加速度は4章と同一のものを 使用した.はじめに,急縮が無い場合のそれぞれの構造 モデルの全層の応答変位を10%低減させる場合に必要と なる減衰比とその配置層を解析した結果を表-1よりダン パーの配置位置は,地震の種類によらず各構造モデルの 最下層となるが,必要な減衰比は地震の種類によって異 なる結果となった.これは4(1),4(2)節で得られた考察



に一致している.

一方,地震の種類によって必要な減衰比は異なるもの のダンパーの配置層は同じであったことから以下の検討 は,I種地盤での地震波を用いて検討した結果のみを示



図-16 1 次モードの相対差(4 自由度系) 図-17 1 次モードの相対差(10 自由度系) 図-18 1 次モードの相対差(20 自由度系)

モデル	質量[kg]	剛性[N/m]	I種地盤			
			減衰比	特定層	配置層	
4層	1.0.E+05	2.0.E+08	0.45925	3	1	
10 層	1.0.E+05	1.5.E+08	0.28457	6	1	
20 層	1.0.E+05	1.7.E+08	0.15998	11	1	

表-2 実行結果(特定層低減,急縮無)

エデル	質量[kg]	剛性[N/m]	I種地盤			
モノル			減衰比	特定層	配置層	
4層	1.0.E+05	2.0.E+08	0.72071	3	3	
	5.0.E+04	1.0.E+08	0.72971			
10 層	1.0.E+05	1.5.E+08	0.52546	0.53546 6	6	
	5.0.E+04	7.5.E+07	0.55540		0	
20 層	1.0.E+05	1.7.E+08	0.02294	11	11	
	5.0.E+04	8.5.E;07	0.36547	11	12	

表-3 実行結果(全層低減,急縮有)

表-4 実行結果(特定層低減,急縮有)						
モデル	質量[kg]	剛性[N/m]	I種地盤			
			減衰比	特定層	配置層	
4層	1.0.E+05	2.0.E+08	0.72071	3	3	
	5.0.E+04	1.0.E+08	0.72971			
10 層	1.0.E+05	1.5.E+08	0.53464	6	6	
	5.0.E+04	7.5.E+07	0.55404	0	0	
20 層	1.0.E+05	1.7.E+08	0.28306	28306 11	11	
	5.0.E+04	8.5.E:07			11	

す.

表-2 は、各構造モデルのある特定の層の応答変位を 10%低減させることを制約条件として解析した場合の結 果である. 全層の応答変位を 10%低減させる場合に比べ て必要な減衰比は小さくなっているが、配置層は最下層 で変わらないため、全層あるいは特定の層の応答変位を 抑制する場合であってもダンパーを最下層に配置するこ とになる. すなわち、4(2)節で考察した 1 次モードを効 率よく減衰させることが肝要であることを裏付ける結果 となった.

次に急縮がある場合の全層の応答変位を10%低減させる場合と,ある特定の層の応答変位を10%低減させる場合の解析結果を表-3 と表-4 に示す. これらから 4(3)節

で考察したモードの相対差の大きい急縮部にダンパーを 配置する結果となったことが分かる.以上より,変位制 約条件によらず,急縮が無い場合は最下層に,急縮が有 る場合は,急縮層に配置する結果を得たため,4章で行 った考察は妥当であるといえる.尚,これらの減衰比を 付与した構造モデルの時刻歴応答解析でも同様の結果を 得た.

6. まとめ

本研究で得られた結果を,以下に示す.

1. 構造物の任意の層の変位が耐震補強における要求性

能の条件として与えられた場合に、多自由度系に付 与する減衰量とその配置を最適化する問題を定式化 した.

- 定式化した最適化問題を非線形計画問題として捉え、 KKT 条件から導いた多元連立方程式を準ニュートン法を用いて反復計算することで、減衰量の最適化 及び最適配置を算出できることを示した。
- 3. 構造モデルや地震波,変位制約条件によらず構造物 の応答変位の抑制には、1次モードの影響が卓越す ることを示した.
- 2次モードの影響が1次モードの影響を上回るため には、モード形状と刺激係数の積が1次モードより 大きな値をとる必要があることを示した。
- 1 次モードを効率よく減衰させるダンパーの配置は、
 1 次モードの相対差から判断でき、相対差の最も大きい層に配置すればよいことを示した。

参考文献

1) 日本機械学会:耐震設計と構造動力学, pp.34-37, pp.48-49,

日本工業出版, 1985.

- Takewaki, I.:Optimal damper placement for minimum transfer functions, Earthquake Engnieering and Structural Dynamics, Vol.26, 1997.
- Mousavi, S. A. and Ghorbani-Tanha, A. K.:Optimum placement and characteristics of velocity-dependent dampers under seismic excitation, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol.11, No.3, 2012.
- 小林真也:2自由度系の特定モードを減衰させるためのダンパーの最適配置に関する研究, pp.16-18, 2012.
- 5) 片山恒雄,宮田利雄,国井隆弘:土木学会編新体系土木 工学 10構造物の振動解析,pp.93-95,pp99-109,pp.169-179, pp.187 pp.189-191,技報堂出版,1979.
- 社会法人日本道路協会:道路橋示方書・同解説 V 耐震 設計編, pp.13-15, 2012.
- J.コワリク, M.R.オスボーン共著:非線形最適化問題制約 条件のない最適化の手法, pp.77-81, 培風館, 1970.
- 8) 茨木俊秀:共立講座21世紀の数学13最適化の数学, pp.15-36, pp92-100,共立出版株式会社,2011.
- ジリーズ応用最適化1線形計画法, pp.48-108, 朝 倉書店, 2008.

OPTIMAL DAMPER ARRANGEMENT FOR MULTI DEGREE OF FREEDOM SYSTEM

Shinya KOBAYASHI, Tomoyo TANIGUCHI, Yusuke ONO and Yuya KANEUJI

In this paper, a new optimal dampaer arrangement method for the multi-degree-of-freedom system are proposed. The mode damping ratio of each mode is represented by the mode shape and the response to the input earthquake ground motion is calculated by the SRSS method. The nonlinear programing(NLP) algorithm is employed to solove the optimal problem. The effect of the damping coefficient corresponding to each colourn of the muti-degree-of-freedom system to the mode damping ration is investigated. It is shown that the optimal damper arrangement can be determined by use of the shape of the 1st mode.