設計用入力地震動の数が構造物の耐震強度に及ぼす影響の確率的評価

宮本 崇[1]・本田 利器[2]

[1]正会員 博士 (工学) 山梨大学 工学部土木環境工学科（〒 400 山梨県甲府市武田 4–3–11）
E-mail: tmiyamoto@yamanashi.ac.jp
[2]正会員 博士 (工学) 東京大学大学院 新領域創成科学研究科（〒 277 千葉県柏市柏の葉 5–1–5）

本稿は，複数の入力地震動を性能照査に用いた際に，波形の数に応じてどの程度の耐震強度が構造物に保証されるかを確率的に評価する手法の提案を行った．

提案手法では，入力地震動の集合が有する情報エントロピーと構造物の耐震強度の関係に着目した．入力地震動の数 n が増えても情報エントロピーが低い値にとどまる確率，すなわち，入力地震動の集合が有する多様性が低いままである確率の収束速度を Sanov の定理によって評価し，この評価式を構造物に保証される耐震強度の確率的な評価に利用することを提案した．数値シミュレーションからは，入力地震動の集合が有する多様性や構造物に保証される耐震強度が低い値にとどまる確率は，入力地震動の数 n と共に指数的に減少していることが確認され，提案手法による評価式はこの傾向をよく評価することができた．しかし，その適用条件や設計実務への応用手法については，今後の詳細な検討が必要である．

Key Words : *design input motion, nonlinear dynamic analysis, information entropy, Sanov's theorem*

1. はじめに

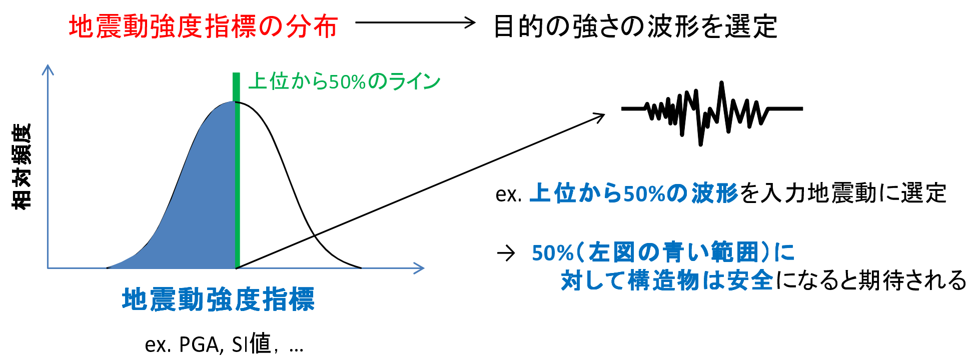
構造物の耐震性能照査に用いられる設計用入力地震動や，地域の地震ハザードを評価するための地表地震動の時刻歴波形は，設計スペクトルへのフィッティングや特定の断層震源からの強震動シミュレーションなどの手法から定められることが多い[1)]．一方でこれらの手法では，設計スペクトルに適合する波形の位相特性の任意性や，強震動シミュレーションにおけるパラメタの不確実性に起因して無数の波形が生成され得る．生成される波形はいずれも同一の設計スペクトルや断層震源から設定されるにも関わらず，個々の波形が構造物に与える影響は大きく異なるため，どの波形を性能照査やハザード評価に用いるかによって，照査や評価の結果もまた異なってしまう問題が生じることとなる．

こうした問題に対しては，与えられた条件を満たす波形を複数考慮することによって，外力としての信用性を保つ方法が多くとられるようになっている．例として，道路橋示方書[2)]では同一の設計用応答スペクトルを満たす波形を 3 波形程度用いて性能照査を行うことが推奨されている他，米国の複数の設計基準では 7 波形以上に対する非線形動的解析が定められていることが Haselton ら[3)]によってまとめられている．また，田中ら[4)]は地震ハザード評価のための地震動予測を行う際に，事前に整理されたデータベースの中から想定震源距離などの条件を満たす複数の波形群を選び，利用することを提案している．

上述の例のように複数の地震動を考慮する手法は，近年の強震動観測記録の蓄積や計算資源の拡充の成果を利用した，有効なアプローチであると考えられる．一方，Haselton ら[3)]が言及するように，こうした手法においては想定する地震外力の条件や構造物の特性，求められる耐震強度の程度に応じて適切に波形の数が決められるべきであるが，この点については定量的な議論が行われていない．

このような背景に関連して，著者らは，複数の入力地震動を性能照査時に考慮した場合に構造物に保証される耐震強度の程度を，入力地震動の有する情報エントロピーに基づいて推定する手法を提案した[5)]．この手法は，多様な性質を有した波形群を照査に利用することによって，構造物が大きな応答を示す場合を含む様々な状況を事前に想定し，それによって構造物に高い耐震強度を保証しようとする考え方に基づいている．波形群の有する多様性は情報エントロピーによって定量化され，情報エントロピーと構造物の耐震強度の間には高い関連があることがこれまでの研究から検証されている．

そこで本稿ではこの手法を応用し，ある条件を満たす複数の入力地震動をランダムに性能照査時に考慮した際に，構造物に保証される耐震強度の程度を，波形が有する情報エントロピーの値から推定することを考える．波形の数が増えるに連れて，入力地震動群が似



図–1 従来の手法における入力地震動の選定プロセス

たような性質の波形ばかりからなる確率，すなわち情報エントロピー値が小さな値をとる確率は 0 へと収束し，構造物に保証される耐震強度は高くなることが予想される．このような，波形の数と構造物に保証される耐震強度の関係はこれまで定量的に議論されていないため，本稿では後述する Sanov の定理を用いることによって，これを確率的に定量化する方法を提案する．

本稿の構成は以下のとおりである．2 章では，著者らがこれまでに提案した，入力地震動群の有する情報エントロピーに基づく構造物の耐震強度の推定手法について概要を説明する．3 章では，入力地震動の数の増加に伴う，情報エントロピー量が低い値を取る確率や構造物の耐震強度が低い値をとる確率の収束速度の評価式を提案する．4 章では，設計用応答スペクトルから入力地震動を生成する場合を想定し，提案手法の有効性を検証する．最後に，5 章において本研究で得られた知見と今後の課題をまとめる．

2. 情報エントロピーと構造物の耐震強度の関係

(1) 入力地震動の集合に対する性能照査

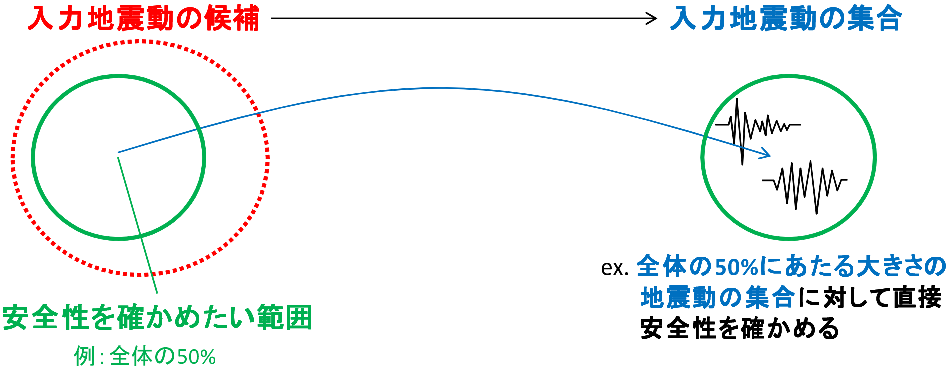
社会基盤構造物の耐震設計においては，入力地震動の設定に設計スペクトルへのフィッティングや強震動シミュレーションなどの手法がとられることが多い．しかし，これらの手法では波形の位相情報の任意性やシミュレーション上のパラメタの不確実性のために．生成されうる時刻歴波形の候補は無数に生じることとなる．したがって，性能照査時にはそれらの無数の候補の中から適切な根拠に基づいて具体的な時刻歴波形を選定する必要がある．

従来の考え方では，入力地震動の候補に対して構造物の耐震強度を保証したい範囲が与えられたときに，そのような耐震強度を保証すると期待される，特定の強さの地震動波形が選ばれる．例として，入力地震動の候補の 50%に対して構造物の耐震強度を保証したい場合，**図–1** に示すように対応するパーセンタイル値に当たる強度を有した波形を選定する．

このような従来の手法とその問題は，次のようにまとめられる．従来の手法では，構造系に対してある耐震強度が要求された際に，対応する強さを有した波形を性能照査時の入力地震動に選定する．これにより，選定された入力地震動よりも弱いと評価される範囲にある波形，すなわち，**図–1** における分布の青い範囲にある波形に対する性能照査を行わずとも，それらに対する構造系の耐震強度を間接的に保証できる，という考え方に基づいている．しかし，実構造の挙動は複雑であるため，対象とする構造物に与える影響という意味で，適切な強さを有した波形を選ぶことは容易ではない．

そこで，入力地震動の候補に対して耐震強度を保証したい範囲が与えられたときに，目標の耐震強度を間接的に保証するような特定の波形を選ぶのではなく，耐震強度を保証したい範囲にある入力地震動の集合を直接性能照査時に考慮することを考える．上記の例であれば，入力地震動の候補の 50% に対し構造系の耐震強度を保証したい場合には，候補全体の 50%を占める入力地震動の集合を直接耐震性能照査時に考慮することとする (**図–2**).

従来の手法とこの手法の大きな違いは，従来の手法は耐震強度を保証したい範囲にある波形を間接的に考慮することに対し，本手法ではそのような範囲にある波形を直接的に考慮することである．また，従来の手法では,「特定の観点から評価される波形の強さ」に基づいて入力地震動を選定していたため，波形の強さの評価時には想定していなかった構造系の損傷メカニズムがある場合に，そのようなメカニズムに対し十分に強い波形を選定することが難しかった．一方で，本手法ではある範囲に属する複数の入力地震動を直接性能照査時に考慮するために，陽に考慮していなかった損傷メカニズムに対しても影響の強い波形が入力地震動の



図–2 提案手法における入力地震動の選定プロセス

集合の中に含まれる可能性が高まる．したがって，それらの波形を性能照査時に考慮することは，そのような損傷メカニズムに対する配慮を求めることにつながり，したがって照査を経た構造系のロバスト性が向上することが期待される．

(2) 地震動の集合の大きさの定量化

このような考え方を実践するために，著者らは地震動の集合の大きさを，次のように情報エントロピーに基づいて定量化する手法を提案した[6)]．ここでは，設計用応答スペクトルに基づいて入力地震動を設定する場合を例にとり，手法の概要について説明する．

設計用応答スペクトルを満たす，無数の入力地震動の候補がなす集合を $\boldsymbol{G}$ とおき，$\boldsymbol{G}$ の中から任意に n 波の波形の集合 $\boldsymbol{g}$ を性能照査時に考慮するものとする．このときに構造物に保証される耐震強度を，$\boldsymbol{G}$ に属する任意の地震動 $f_G(t)$ による構造物の応答値 D_G が，$\boldsymbol{g}$ に属する地震動 $f^i_g(t)(i=1,...,n)$ による応答値 D^i_g の最大値を越える確率

$$P^{\rm ex} = P(D_G > \max_i\{D^i_g\}) \tag{1}$$

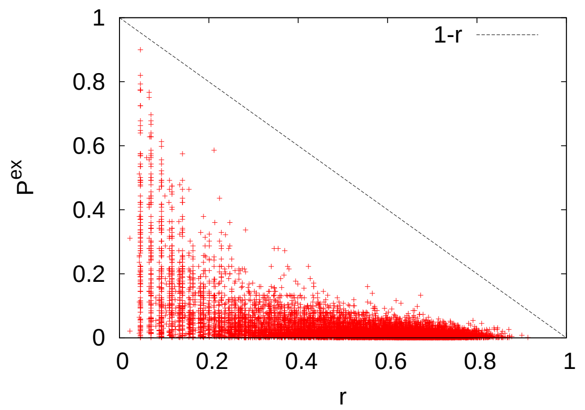
によって議論する．以降では，$P^{\rm ex}$ を構造物の損傷確率と呼ぶこととする．

$\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{G}$ の部分集合であるため，上述のように，$\boldsymbol{G}$ 中の大きな範囲を占めるような $\boldsymbol{g}$ を性能照査時に考慮することで $P^{\rm ex}$ は必然的に小さくなり，構造物の耐震強度は向上すると考えられる．そこで，$\boldsymbol{g}$ が占める範囲の大きさを，次式で定義される情報エントロピー H_g に基づいて定量化する．

$$H_g = -\sum p_g(\boldsymbol{x}) \log p_g(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ はある波形 $f(t)$ が有する特性をベクトル値で表した指標であり，$p_g(\boldsymbol{x})$ は波形の集合 $\boldsymbol{g}$ が有する $\boldsymbol{x}$ に関する確率分布である．

今，集合 $\boldsymbol{G}$ による指標値 $\boldsymbol{x}$ の確率分布とその情報エントロピーをそれぞれ $p_G(\boldsymbol{x})$，H_G と表すものとする．



図–3 ランダムに設定された 10000 ケースの $\boldsymbol{g}$ における $P^{\rm ex}$ と r の関係

すると，$P^{\rm ex}$ は

$$1 - \frac{\exp(H_g)}{\exp(H_G)} \tag{3}$$

を上限値とした値をとり，H_g の増加と共に取り得る値が小さくなることが検証されており，この結果は次のように解釈される．情報エントロピーの指数値は現象の実質的なパターン数を表している[7)]ため，

$$r = \frac{\exp(H_g)}{\exp(H_G)} \tag{4}$$

は $\boldsymbol{G}$ 中で $\boldsymbol{g}$ が占める範囲の大きさを，生じうる現象の全パターンのうち，何割が $\boldsymbol{g}$ 中に含まれているかとして評価した値であると考えることができる．構造物は，全波形の候補の中で直接考慮された r の比率の波形に対する耐震強度が保証され，したがって $P^{\rm ex}$ は $1-r$ となることが予想されるが，実際には直接考慮していない波形の中にも構造物に対して影響の弱い波形は存在しうるので，$P^{\rm ex}$ は $1-r$ を上限値としてそれよりも小さな値を取ることとなる．

図–3 は，性能照査の対象構造物として非線形 10 自由度系でモデル化される 10 階鉄筋コンクリート造ビルを，入力地震動の候補 $\boldsymbol{G}$ として特定の設計スペクトル

にフィッティングされた1000波形を想定した条件の下で，ランダムに設定された10000ケースの $\boldsymbol{g}$ が有する式 (1) 中の P^{ex} と式 (4) 中の r の関係を表しており，上述の P^{ex} と r の関係が現れている．このとき，$H_{\boldsymbol{g}}$ や $H_{\boldsymbol{G}}$ の算出に用いる地震動の特性指標 $\boldsymbol{x}$ として，対象構造物の 1 次モードと同じ固有周期を有した完全弾塑性 1 自由度系の最大応答変位と履歴吸収エネルギーの 2 指標を，P^{ex} の算出の際に着目する応答値として，モデル基部のバネの Park-Ang 指標値を用いている．

3. Sanovの定理に基づく波形の情報エントロピー値の推定

(1) 問題設定

地震動の集合 $\boldsymbol{G}$ から，ランダムにサンプリングすることにより部分集合 $\boldsymbol{g}$ を構成する場合，大数の法則により波形の数 n が大きくなるに連れて，$\boldsymbol{g}$ の有する確率分布 $p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ は母集合 $\boldsymbol{G}$ の有する確率分布 $p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ に収束する．これに伴い，n の増加と共に式 (4) における r が小さな値をとる確率は 0 へと収束する．これは，入力地震動の数が増えるにつれて，似たような波形ばかりが得られる確率は小さくなり，構造物に保証される耐震強度が低いままである可能性もまた小さくなることを意味している．

したがって，波形の数の増加と，r が小さな値を取る確率の収束速度の関係を定量化することができれば，波形の数と構造物の耐震強度の関係を定量的に議論することができると考えられる．そこで本稿では，$\boldsymbol{g}$ 中の波形の数が n のときに，r がある一定値 c 以下となる確率

$$P(r \leq c) \tag{5}$$

の，波形の数 n の増加に伴う 0 への収束速度をを考える．これを導出することによって，ランダムに数波形の入力地震動を設定した場合に構造物に保証される耐震強度を定量的に議論することができる．

式 (4) より，式 (5) は

$$P(H_{\boldsymbol{g}} \leq \log(c \cdot \exp(H_{\boldsymbol{G}}))) = P(H_{\boldsymbol{g}} \leq c') \tag{6}$$

と同値である．また，ある確率分布の集合 E を，

$$E = \{p(\boldsymbol{x}) \mid H[p(\boldsymbol{x})] \leq c'\} \tag{7}$$

として定義すると，式 (6) はまた

$$P(p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \in E) \tag{8}$$

と同値であるため，以降では式 (8) を n の関数として求めることを考える．

(2) Sanov の定理による定式化

a) Sanov の定理

式 (8) は，波形の集合 $\boldsymbol{g}$ が有する情報エントロピーが一定値以下である確率，すなわち，$\boldsymbol{g}$ の有する多様性が低く，似た性質ばかりの波形から構成される確率を意味している．この確率は大数の法則から波形の数 n の増加と共に 0 へと収束するが，本稿の目的はこの際の収束速度を評価することによって，性能照査時に考慮すべき波形の数に関する議論を可能とすることである．

そのような，標本の数 n が大きくなった場合に標本分布が偏った分布となる確率の収束性を評価する定理として，Sanov の定理が知られている[7]．この定理は，一般に次のように表現される．

今，$X_1, X_2, ..., X_n$ を i.i.d. で $Q(x)$ にしたがう確率変数とし，これらの標本から作られる標本分布を $P_n(x)$ とおく．また，E をある確率分布の集合とすると，標本分布が E に属する確率 $P(P_n(x) \in E)$ について，次の式が成り立つ．

$$\frac{\log(P(P_n(x) \in E))}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -D(P^*(x)\|Q(x)) \tag{9}$$

ここで，$D(P(x)\|Q(x))$ は次式で定義される，確率分布間の距離を表す KL ダイバージェンスと呼ばれる量である．

$$D(P(x)\|Q(x)) = \sum P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{10}$$

また，$P^*(x)$ は E に属する確率分布の中で式 (10) を最小化するものであり，KL ダイバージェンスの意味で E の中で最も $Q(x)$ に近い分布を意味している．

式 (9) は，標本の数 n が大きいところでは，標本分布 $P_n(x)$ がある確率分布の集合 E に属する確率 $P(P_n(x) \in E)$ が，$\exp(-n \cdot D(P^*(x)\|Q(x))$ の速度で 0 へと収束することを意味している．したがって，大きな n に対しては $P(P_n(x) \in E)$ は指数関数的に 0 へと収束し，その速さは $D(P^*(x)\|Q(x))$，すなわち，集合 E がどの程度母集団分布 E に近いかを表す量に依存している．

b) Sanov の定理の例

Sanov の定理を用いた例として，サイコロを n 回投げたときに，投げた結果の平均値 $\bar{X}_n$ が 4 以上となる確率 $P(\bar{X}_n \geq 4)$ を考える．この場合，母集団分布 $Q(x)$ は $Q(x) = \{Q(1), ..., Q(6)\} = \{\frac{1}{6}, ..., \frac{1}{6}\}$ となり，サイコロを投げた結果がなす標本分布を $P_n(x)$，集合 E を「平均値が 4 以上となる確率分布の集合」とおけば $P(\bar{X}_n \geq 4)$ は $P(P_n(x) \in E)$ と等価である．

$P(P_n(x) \in E)$ は，標本分布の平均値が 4 以上となる，偏った分布となる確率であり，n が増加すると共にこの確率は 0 へと収束する．Sanov の定理はそのような偏った標本分布が得られる確率の収束速度を評価したものである．

式 (9) から，十分に大きな n の下では $P(P_n(x) \in E)$ の収束速度は

$$\exp(-n \cdot D(P^*(x)\|Q(x))) \tag{11}$$

となる．ここで，$P^*(x)$ は次の条件を満たす確率分布の中で，式 (10) を最小化するものである．

$$\sum_{i=1}^{6} iP(i) \geq 4 \tag{12}$$

数値的にこれを解くと

$$P^*(x) = \{0.1031, 0.1227, 0.1461, 0.1740, 0.2072, 0.2468\} \tag{13}$$

となり，このとき式 (10) の値は次のようになる．

$$D(P^*(x)\|Q(x)) \simeq 0.0431 \tag{14}$$

したがって，n が十分に大きいとき，$P(\bar{X}_n \geq 4)$ は $\exp(-0.0431 \cdot n)$ として評価され，n の増加と共に指数的に減少することが分かる．

c) 入力地震動の数と耐震強度の関係の定式化

本稿では，以上に述べた Sanov の定理を利用して，式 (6)，すなわち,「入力地震動の数が増えても，波形の集合 $\boldsymbol{g}$ が似たような波形ばかりで構成され多様性が低く，小さな情報エントロピー値しかとらない確率」の収束速度を評価する．

このときの母集団分布は，設計用応答スペクトルを満たす無数の地震動の集合 $\boldsymbol{G}$ が有する，特性指標 x の確率分布 $p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x})$ として定義できる．また，$\boldsymbol{G}$ からランダムにサンプリングされた入力地震動がなす集合とその確率分布をそれぞれ $\boldsymbol{g}$，$p_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$ とおき，確率分布の集合 E を式 (7) のように定義する．このとき Sanov の定理より，十分に大きな n の下で式 (6) は

$$\exp(-n \cdot D(P^*(\boldsymbol{x})\|p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))) \tag{15}$$

の収束速度を有する．ここで，式中の $P^*(x)$ は次に示す制約付き最適化問題の解として得られる．

$$\begin{aligned} \min \quad & \{\sum P(\boldsymbol{x}) \frac{\log(P(\boldsymbol{x}))}{\log(p_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}))}\} \\ \text{subject to} \quad & H[P(\boldsymbol{x})] \leq c' \\ \text{and} \quad & \sum P(\boldsymbol{x}) = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

式 (15) は，入力地震動の集合 $\boldsymbol{g}$ の有する情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}}$ が式 (6) を満たす確率，すなわち，波形の集合が有する多様性が低い値にとどまる確率が，n が十分大きくなると指数的に減少するようになることを表している．このとき，構造物に保証される耐震強度が低い値である確率もまた減少することが予想される．

上記のような，構造物に保証される耐震強度が低い値である確率を議論するために，n 波の入力地震動を性能照査に用いた場合の，式 (1) に定義する損傷確率 P^{ex} が $1-c$ 以上となる確率 $P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c)$ を考える．例として，$c = 0.5$，$n = 10$ としたときに $P(P^{\mathrm{ex}} \geq 0.5) = 0.1$ であれば,「入力地震動を 10 波用いて性能照査を行った際に，構造物が全波形の 5 割以上に対して損傷しうる確率は 0.1 である」という状況を意味することとなる．n の数が増えるに連れて，この確率は減少していくと考えられる．

そこで本稿では，入力地震動の数 n と，構造物の耐震強度が低い値にとどまる確率 $P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c)$ の収束速度を式 (15) を用いて評価することを考える．以下に，その具体的な手順を述べる．

入力地震動の集合 $\boldsymbol{g}$ が有する情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}}$ と，式 (1) で定義される構造物の損傷確率 P^{ex} の間に，式 (3) に基づいて

$$P^{\mathrm{ex}} = 1 - \frac{\exp(H_{\boldsymbol{g}})}{\exp(H_{\boldsymbol{G}})} \tag{17}$$

の関係を仮定すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} & P\,(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c) \\ &= P\,(1 - \frac{\exp(H_{\boldsymbol{g}})}{\exp(H_{\boldsymbol{G}})} \geq 1-c) \\ &= P\,(H_{\boldsymbol{g}} \leq \log(c \cdot \exp(H_{\boldsymbol{G}}))) \\ &= P\,(H_{\boldsymbol{g}} \leq c') \end{aligned} \tag{18}$$

したがって，$P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c)$ は，式 (6) と同様の収束性を有していると考えられるため，この確率もまた式 (15) の収束速度で 0 へと収束すると考えられる．

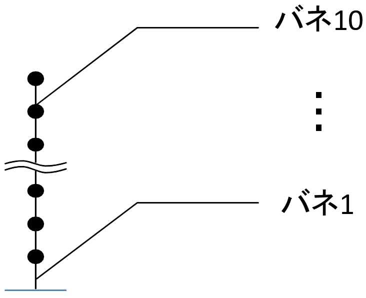
4. 数値シミュレーション

本節では，上記の手法の有効性を検証するために数値シミュレーションを実施する．シミュレーションでは，まず性能照査の対象となる構造系と，入力地震動の候補 $\boldsymbol{G}$ を設定する．次に，$\boldsymbol{G}$ から照査時に考慮する波形の集合 $\boldsymbol{g}$ をランダムに n 波選ぶ試行を繰り返すモンテカルロシミュレーションを行い，式 (6)，および式 (18) にそれぞれ示す,「波形の集合が有する情報エントロピー $H_{\boldsymbol{g}}$ が一定値 c' 以下である確率」$P(H_{\boldsymbol{g}} \leq c')$ と,「構造物の損傷確率 P^{ex} が一定値 $1-c$ 以上となる確率」$P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c)$ を算出する．

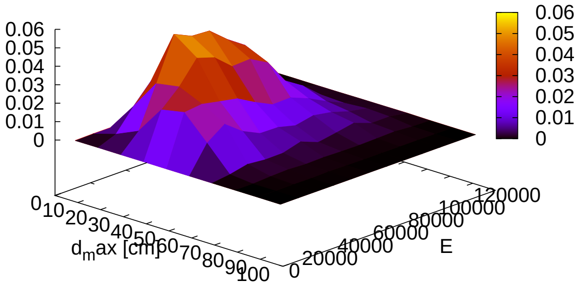
波形の数 n を 1 から順に増やしながら上記のモンテカルロシミュレーションを繰り返すことで，n の増加に伴う $P(H_{\boldsymbol{g}} \leq c')$ や $P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1-c)$ の収束性を数値的に得ることができる．このときの 2 つの確率の収束速度と，Sanov の定理から導かれる式 (15) の収束速度とを比較することによって，提案手法の有効性を検証する．

(1) 対象構造系

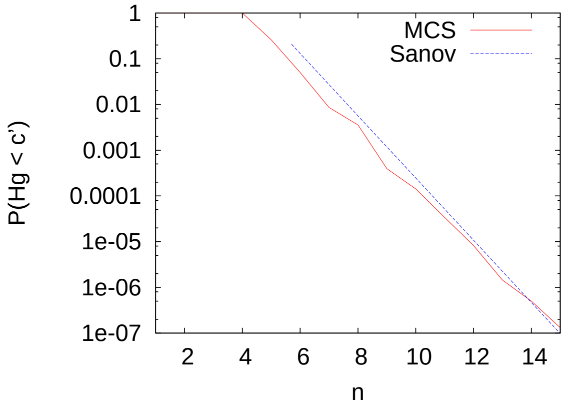
性能照査の対象構造系として，鉄筋コンクリート造 10 層ビルを想定した．照査における応答解析には，既往の解析例[8]を参考に，各集中質量をつなぐバネの特性をトリリニア型 Clough モデルで表現した 10 自由度系にモデル化した (**図–4**)．また，地震動による構造系の損傷値として，各バネの Park-Ang 指標 I^j ($j = 1, ..., 10$) を用いることとした．事前解析の結果から，解析モデ



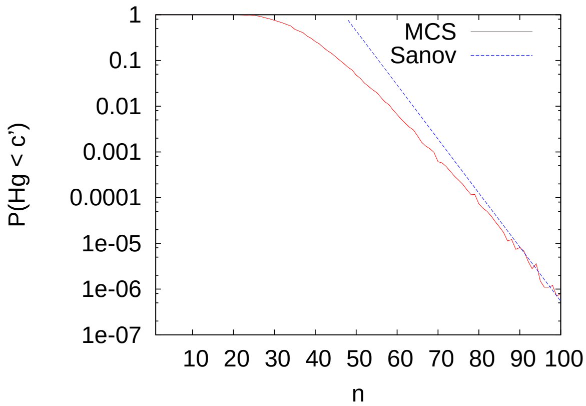
図–4 対象構造系



図–5 集合 $\boldsymbol{G}$ の有する確率分布



(a) $c = 0.1$ の場合



(b) $c = 0.5$ の場合

図–6 $P(H_g \le c')$ と n の関係：MCS 解と Sanov の定理による収束速度の比較．収束速度は，グラフの傾きとして与えられる．

ルは複数の振動モードが卓越し，各振動モードにおいて大きな影響を受けるバネが異なるなど，複雑な挙動を示すことを確認している．

(2) 入力地震動の候補

本解析事例における入力地震動の候補 $\boldsymbol{G}$ として，道路橋示方書に定められるレベル 2 地震動 II 種地盤タイプ II(内陸型) の設計スペクトルにフィッティングする波形を，K-NET における観測波形群の位相を利用して 1000 波形作成した．

これら 1,000 波形の有する特性の確率分布 $p_G(\boldsymbol{x})$ は**図–5** となり，その情報エントロピー値は $H_G = 3.7$ である．ここで，各地震動の特性を評価するベクトル値指標 $\boldsymbol{x}$ は，対象構造系の 1 次固有周期と同じ固有周期を有した完全弾塑性 1 自由度系に与える最大応答変位 $d_{\max}$ と履歴吸収エネルギー E の 2 値から構成した．

(3) モンテカルロシミュレーション

$\boldsymbol{G}$ 中からランダムに n 波を選び，耐震性能照査時に考慮する地震動の集合 $\boldsymbol{g}$ を構成するものとする．このとき，$\boldsymbol{g}$ が有する情報エントロピー値 H_g について，次の確率をモンテカルロシミュレーション (MCS) から求めた．

$$P(H_g \le c') = P(H_g \le \log(c \cdot \exp(H_G))) \qquad (19)$$

ここで，c は 0 から 1 までの任意の定数である．

また，$\boldsymbol{g}$ を性能照査に用いた際に対象構造系に保証される耐震強度を，$\boldsymbol{G}$ に属する入力地震動によるいずれかのバネの Park-Ang 指標値が，$\boldsymbol{g}$ 中の地震動による該当のバネの Park-Ang 指標値の最大値以上となる確率 P^{ex} によって議論する．このとき，P^{ex} についても，次の確率を同様に MCS から求めた．

$$P^{\mathrm{ex}} \ge 1 - c \qquad (20)$$

ここで，c は式 (19) と同じ値をもつ．

式 (19)，式 (20) は，n 波からなる入力地震動の集合を性能照査に用いたときに情報エントロピー H_g が一定値 c' 以下となる確率，および，損傷確率 P^{ex} が $1 - c$ 以上となる確率である．波形の数 n を 1 から順次増やしながら MCS を行うことによって n とこれらの確率の関係を求め，その収束の速さを Sanov の定理から求められる収束速度式 (15) と比較した．

(4)　解析結果

a)　波形の数と情報エントロピーの関係

まず，$P(H_g \leq c')$ の収束性，すなわち，波形の数が増加しても，多様性が低い値にとどまる確率の収束速度を提案手法によって評価できるかどうかを検証する．

図–6 は，$c = 0.1$，0.5 の 2 ケースにおける，波形の数 n と式 (19) の関係を示したものである．両ケースにおいて，n の増加に伴って $P(H_g \leq c')$ が指数的に減少していくようになる様子が MCS の結果から確認される．また，n が十分に大きい場合，このような $P(H_g \leq c')$ の収束速度を Sanov の定理による評価式はよく再現していることから，「地震動の集合が似たような性質の波形ばかりから構成される多様性が低くなる確率」の収束性については，n が大きな領域では提案する考え方は有効に機能しているといえる．

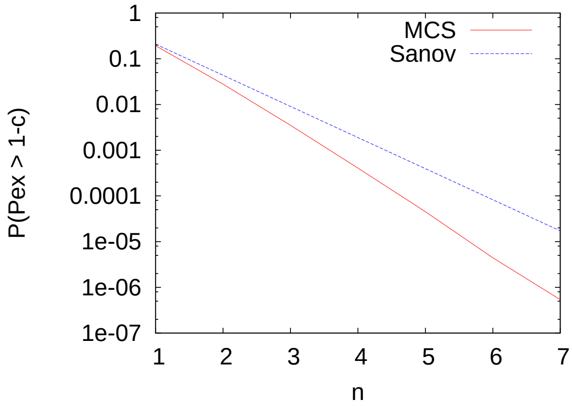
ただし，**図–6** 中の n が小さい領域においては，$P(H_g \leq c')$ は指数的な低下を示していない．Sanov の定理は n が大きな領域における収束速度を評価したものであるため，n が特に小さな値をとる場合には，精度が低い結果となっていることが確認される．

b)　波形の数と耐震強度の関係

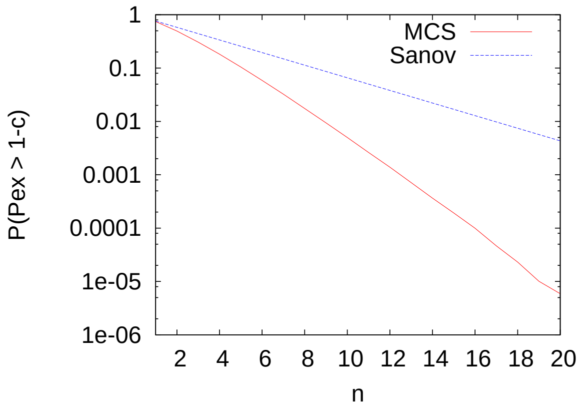
次に，$P(P^{\mathrm{ex}} \geq c)$ の収束性，すなわち，波形の数が増えても，耐震強度が低い値にとどまる確率の収束速度を提案手法によって評価できるかを検証する．

図–7 は，$c = 0.1$，0.5 の 2 ケースについて，波形の数 n と式 (20) の関係を示したものである．図中の MCS の結果からは，$P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1 - c)$ もまた指数的に減少している様子が両ケースにおいて確認できるが，Sanov の定理による評価式とは，その収束速度には差異が見られる．

このような差異の原因の一つとして，次のことが考えられる．本手法では，波形の有する情報エントロピーと構造物の損傷確率の間に式 (17) の関係を仮定している．これは，**図–3** において，r と P^{ex} の間に黒線に示す関係を仮定していることを意味するが，実際には同図に見られるように黒線は損傷確率の上限を表したものとなっている．式 (17) の代わりに，情報エントロピーと構造物の損傷確率の平均的な関係を表す式を利用し，本手法を適用することで，**図–7** に示す波形の数と構造物の耐震強度の関係の推定精度は向上すると考えられる．



(a) $c = 0.1$ の場合



(b) $c = 0.5$ の場合

図–7　$P(P^{\mathrm{ex}} \geq 1 - c)$ と n の関係：MCS 解と Sanov の定理による収束速度の比較．収束速度はグラフの傾きとして与えられる．

5.　おわりに

本稿は，複数の入力地震動を性能照査に用いた際に，波形の数に応じてどの程度の耐震強度が構造物に保証されるかを確率的に評価する手法の提案を行った．

提案手法では，入力地震動の集合が有する情報エントロピーと構造物の耐震強度の関係に着目した．入力地震動の数 n が増えても情報エントロピーが低い値にとどまる確率，すなわち，入力地震動の集合が有する多様性が低いままである確率の収束速度を Sanov の定理によって評価し，この評価式を構造物に保証される耐震強度の確率的な評価に利用することを提案した．

数値シミュレーションからは，入力地震動の集合が有する多様性や構造物に保証される耐震強度が低い値にとどまる確率は，入力地震動の数 n と共に指数的に減少していることが確認され，Sanov の定理を利用した提案手法による評価式はこの傾向をよく評価することができた．しかし，n が小さい場合における適用性や，耐震強度の推定に対する適用性については課題が残る結果となった．

また，入力地震動の設定実務に本手法を適用するためには，手法そのものの精度の改善に加え，その利用方法を具体的に整理していく必要があるものと考えている．波形の数と構造物の耐震強度の関係の定量化することによって，目標の耐震強度を達成するためには何波形程度の入力地震動を用いるべきか，あるいは，入力地震動を 1 波形増やすことがどの程度安全性に寄与

するか，といった議論を今後可能にしたい．

謝辞：　本研究は，科学研究費助成事業 (課題番号 24360177) の助成を受けて行われました．

参考文献

1) 土木学会地震工学委員会：地震動研究の進展を取り入れた土木構造物の設計地震動の設定法ガイドライン (案)，土木学会，2009
2) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説 V　耐震設計編，2002
3) C.B.Haselton, A.S.Whittaker, A.Hortacsu, J.W.Baker, J.Bray and D.N.Grant: Selecting and Scaling Earthquake Ground Motions for Performing Response-History Analyses, Proceedings of 15th World Conference of Earthquake Engineering, 2012
4) 田中浩平，高田毅士：既往観測波形インベントリーを用いた地震動予測のための波形選定手法の提案，日本建築学会構造系論文集，第 74 巻第 646 号，pp.2219-2225，2009
5) 宮本崇，本田利器：設計地震動の集合が有する情報エントロピーに基づく構造物の安全性評価，JCOSSAR2011 論文集，pp.425-431，2011
6) 宮本崇，本田利器：地震動の集合が有する設計地震動としての情報量の定量的評価，土木学会応用力学論文集，Vol.13，pp.577-586，2010
7) Thomas M. Cover and Joy A. Thomas：情報理論　基礎と広がり，共立出版，2012
8) 日本建築学会：建物と地盤の動的相互作用を考慮した応答解析と耐震設計，2006

Stochastic Estimation for the Effect of Number of Design Input Motions on Seismic Performance of Structures

Takashi MIYAMOTO and Riki HONDA

In this paper, we proposed a stochastic scheme for estimating the effect of number of design input motions on seismic performance of structures. In the proposed scheme seismic performance of structures are evaluated based on information entropy of input motions, and relationship between number of input motions and information entropy is formulated by Sanov's theorem. The theorem indicates a probability that infomation entropy or seismic performance of structures is low decreases exponentially with the increase of number of input motions, which was verified by numerical results. However, applicability of the scheme should be improved for the estimation of seismic performance of structures.