

斜め入射による正弦規則波を用いた 地中構造物の動的解析

鈴木 崇伸¹

¹正会員 東洋大学教授 理工学部都市環境デザイン学科 (〒350-8585 川越市鯨井 2100)

E-mail:tsuzuki@toyo.jp

本論文は水平成層地盤に斜め入射される平面波の特性を応用して、地表に水平に置かれる地中構造物の動的応答を計算する手法を述べている。地表に沿って一定の速さで進行する波動を入力条件として、境界条件を設定した地中構造物の応答を計算する手順を提案している。水平成層地盤に限定した定式化であり、斜め入射の角度の設定の問題も残るが、地盤と構造条件が揃えば、入射角をパラメータとして入力地震動に対する地中構造物の動的応答計算ができること示している。

Key Word: oblique incidence, sinusoidal plane wave, underground structure, dynamic response

1. はじめに

地中構造物の耐震解析は横断面の変形と縦断方向の変形に分けて解析されることが多い。最近では 3 次元解析による解析も行われているが、次元を落とした近似解析が主流となっている。地中構造物の場合、周囲を地盤に拘束されているために固有振動は無視することができ、地盤変位につれて運動するとされる。そこで地盤変位が最大となる状態を静的に再現して変形解析が行われている。

兵庫県南部地震以降、稀に発生する大きな揺れに対する耐震解析が必要とされるようになった。地盤変位が大きくなると地盤震動は非線形挙動となることが知られている。主に地盤剛性が低下することにより、地盤震動は長周期化し、変位振幅が増大する影響を考慮して、構造物の非線形性を考慮した静的解析を適用する解析が行われている。しかしながら、地盤の非線形性ならびに構造部位の非線形性はエネルギー吸収を伴う動的現象であり、地中構造物の耐震性能を考える場合には、動的な効果を適切に反映させる必要がある。

現状の耐震解析技術は正弦波状の地盤変位を強制変位として静的に作用させる応答変位法と、地盤と構造物を有限要素などでモデル化して振動計算を行う動的解析に分けられる。応答変位法は電卓計算レベルで実施できる簡易さが利点であるが、実際の揺れと対比しにくい問題

がある。また動的解析は地盤の不整形性や複雑な構造もモデル化して解析できるために、広く用いられているが、揺れの増幅や応力集中などの破壊に至るメカニズムがプログラム計算に隠れて見えにくい問題があると考えられる。応答変位法と動的解析の中間に位置する簡便な解析手法があれば、変形メカニズムの分析も系統的に行うことができ、耐震設計の高度化に役立つと考える。特に膨大な量の既設地下構造物の耐震性評価を効率よく行うことは喫緊の課題であり、正確さと簡便さを備えた評価手法が望まれている。

本論文は、水平 2 層地盤に SH 波と SV 波を斜め入射することにより生じる表層の地盤変位を弾性支持されたはりに作用させる解析法を提案する。水平 2 層地盤に平面波を入射する解析では、地盤変位は水平方向に伝播する振幅と波長が一定の正弦規則波となる。表層の地盤変位は時間変化する量であり、動的な地盤変位による地中構造物の応答が計算できる。地中構造物はばね支持されたはりとしてモデル化するが、さまざまな境界条件の設定が可能であり、自由端や地盤につれて移動する境界について計算法を紹介している。

2. 地中構造物の入力地震動

(1) 既往の指針類の考え方

地中構造物の入力地震動は基本的に観測に基づく基盤の応答スペクトルあるいは基盤入力波で定義されている。地中構造物への作用を決めるにあたっては、地盤震動の特性を考えた関数形が採用されている。応答変位法では基盤の応答スペクトルに応じて地表層の増幅と振動モードを仮定して入力地震動が決められる。鉛直方向の振動モードは1/4波長の基本モードが採用され、水平方向のモードは表面波の観測データに基づく考え方と、地盤固有周期に対応する基盤と表層の波長の調和平均を用いる方法がある。いずれも弾性波動の基本解が三角関数になることを応用しており、固有振動数や波長、波の速さなど波動の基本特性を近似してモデルをつくっている。

縦断方向の地震動モデルとして空間変化する三角関数が採用されている。振幅は地盤変位の最大値であり、波長は前述の仮定のもとに決められる。ここで前提となっているのは無限に同じ構造が連続し、一定の波長をもった正弦波が作用することである。無限に連続する構造物は存在せず、必ず始まりと終わりがある。また無限に連続する正弦波も自然界には存在しない。減衰もするし、波長も変化するはずである。多くの設計指針で用いられている正弦波入力への解は、数学的な単純化を目的としてつくられた式であり、現実の応答を大まかに近似しているにすぎないことに注意する必要がある。

実際の構造物は有限の長さであり、地盤条件も構造条件も変化する。地盤震動解析を行えば、場所によって振動数や波長が変化する波動が地中構造物に作用する。前項で示したより解析の結果を現実に近いものにするためには、境界条件を反映した解や無限に繰り返す正弦波以外の解を利用する必要がある。

動的解析では余計な仮定は省略することができ、地盤の水平方向の不規則性をモデル化して基盤入力波を作用させる計算が行われる。解析結果を弾性波動解に近付けるために、入力方法と境界処理法に工夫が必要となるが、基盤から上方に入射する波動が方程式に従って変化する解析が行われる。動的解析では振動モードを意識することなく変形計算が行える。そのため変形モードや増幅メカニズムを分析することなく、動的解析の結果を鵜呑みにして安全の評価がなされる懸念がある。

(2)正弦規則波による入力

地震波は一般的に非定常で分散性の波動となる。平面波は波動方程式の基本解の一つであり、弾性波動の特性を分析する基本とされる。媒質が様な空間を通過する平面波は分散することなく一定の速さとなる。無限あるいは半無限空間を伝わる際には、境界において反射・屈折しても平面波は保持される。特に自由表面で反射する平面波は、見かけ上自由表面に沿って進行する波動と

なる。自由表面を x 軸方向とし、自由表面に沿って進行する平面波は

$$f(t, x) = F(\omega) \exp(i\omega t - i\xi x) \quad (1)$$

と表すことができる。ただし振動数 ω 、波数 ξ 、振幅 F としている。本研究では振動数によって決まる振幅をもち、一定の速さである方向に進行する波を正弦規則波と呼ぶこととする。地表面に沿って見かけ上伝搬する波動を定式化して、地表に平行に設置された地中構造物に作用するモデルにより、地中構造物の応答を定式化する。

振幅 $F(\omega)$ は x 軸上のある点で定義される任意の地震動である。基盤から斜めに入射された入力地震動は水平成層地盤であれば、簡単な計算で地盤増幅の影響を反映した応答が計算できる。すなわち評価位置の変位波形が決まることになり、その変動は一定の速さで地表に沿って進行する。

前述の正弦波入力による応答は、ある時刻で静止させた波動を作用させる計算を行っていることになる。または定常波の最大振幅時の変形を計算しているとも考えられるが、移動することは考慮されていない。入力波動が移動する影響は位相に表れる。ある点がいつも同じ位相になるのではなく、位相変化のある状態で応答を計算する必要がある。

振動解析においては振幅が1、振動数が ω の定常振動を構造物に作用させて応答特性の分析が行われる。これと同様に振幅が1である正弦進行波を考えて、地中構造物の応答特性を分析することは有用であると考えられる。振動解析においてパラメータは振動数だけであるが、進行正弦波の場合には、周波数 ω と波数 ξ あるいは波長 L の2つとなる。波動伝播問題であるために、最も簡略化しても2つのパラメータが必要になる。

3. 正弦規則波の生成法

(1)SH 波入射による面外変位

SH 波を入力したときの表層地盤の変位を定式化する。図-1に地盤モデルを示す。面内の方向を x, z とし、面外方向を y 方向とする。対応する変位成分は面内方向を u と w 、面外方向を v とする。また基盤層を添え字0、表層を添え字1で表現する。

x 軸正方向に進行する SH 波の波動関数は

$$v_1(x, z, t) = \exp[i\omega(px - t)] \{ A_1 \exp[i\omega\eta_1(z - H)] + B_1 \exp[-i\omega\eta_1(z - H)] \} \quad (2a)$$

$$v_0(x, z, t) = \exp[i\omega(px - t)] \{ A_0 \exp(i\omega\eta_0 z) + B_0 \exp(-i\omega\eta_0 z) \} \quad (2a, 2b)$$

と表わせる。ただし波動の屈折を考慮して x 方向は波線パラメータ p を用いて表記し、 z 方向は波数 η を用いて表記している。入射角を φ_0 、出射角を φ_1 として、

$$p = \frac{\sin \varphi_0}{\beta_0} = \frac{\sin \varphi_1}{\beta_1} \quad (3a)$$

$$\eta_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\beta_0} = \sqrt{\frac{1}{\beta_0^2} - p^2} \quad (3b)$$

$$\eta_1 = \frac{\cos \varphi_1}{\beta_1} = \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2} \quad (3c)$$

が成り立つものとする。層境界の $z=0$ で変位と応力が連続し、 $z=H$ で応力が 0、さらに $A_0=1$ として残りの 3 つ係数を計算すると波動関数が決められる。波動関数の係数は複素数となり、入射角 φ_0 、振動数 ω 、地盤条件によって変化する。入射波の振幅を 1 として、角振動数 ω を変化させたときの振幅は伝達関数となる。すなわち、注目点を固定して

$$V_1(x, z, \omega) = v_1(x, z, 0) = \exp[i\omega p x] \{ A_1 \exp[i\omega \eta_1(z-H)] + B_1 \exp[-i\omega \eta_1(z-H)] \} \quad (4)$$

と表わすことができ、 x 軸に沿って振幅と波数が一定の規則波が進行する。層境界からの距離 h における応答は、 $x=0$ 、 $z=h$ として計算すれば x 軸方向には波数 $p\omega$ の周期関数となる。よって入力地震動 $U_g(\omega)$ に対する応答は

$$V(\omega) = V_1(0, h, \omega) \cdot U_g(\omega) \quad (5)$$

で求められ、フーリエ逆変換すれば地盤の応答波形が得られる。

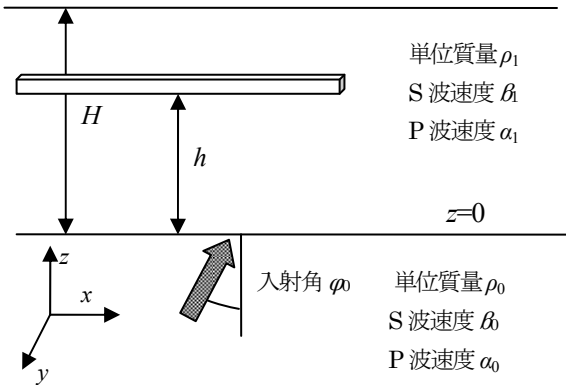


図-1 斜め入射による地中構造物の解析条件

(2)SV 波入射による面内変位

SV 波についても同様に計算できる。 x 軸の正方向に進行する波動の成分の一般解は

$$\begin{aligned} u_0(x, z, t) &= \exp[i\omega(px-t)] \left\{ p(A_0 \exp(i\xi_0 \omega z) + B_0 \exp(-i\xi_0 \omega z)) + \eta_0(C_0 \exp(i\eta_0 \omega z) - D_0 \exp(-i\eta_0 \omega z)) \right\} \\ w_0(x, z, t) &= \exp[i\omega(px-t)] \left\{ \xi_0(A_0 \exp(i\xi_0 \omega z) - B_0 \exp(-i\xi_0 \omega z)) - p(C_0 \exp(i\eta_0 \omega z) + D_0 \exp(-i\eta_0 \omega z)) \right\} \\ u_1(x, z, t) &= \exp[i\omega(px-t)] \left\{ p(A_1 \exp(i\xi_1 \omega z) + B_1 \exp(-i\xi_1 \omega z)) + \eta_1(C_1 \exp(i\eta_1 \omega z) - D_1 \exp(-i\eta_1 \omega z)) \right\} \\ w_1(x, z, t) &= \exp[i\omega(px-t)] \left\{ \xi_1(A_1 \exp(i\xi_1 \omega z) - B_1 \exp(-i\xi_1 \omega z)) - p(C_1 \exp(i\eta_1 \omega z) + D_1 \exp(-i\eta_1 \omega z)) \right\} \end{aligned} \quad (6a, 6b, 6c, 6d)$$

となる。 z 軸に沿っては正の方向、負の方向に進行する成分があり、係数は合計 8 個ある。ただし波線パラメータの条件は

$$p^2 + \xi_0^2 = \frac{1}{\alpha_0^2}, \quad p^2 + \xi_1^2 = \frac{1}{\alpha_1^2}$$

$$p^2 + \eta_0^2 = \frac{1}{\beta_0^2}, \quad p^2 + \eta_1^2 = \frac{1}{\beta_1^2}$$

(7a, 7b, 7c, 7d)

とする。2 層の境界において 2 成分の変位と σ_{zz} 、 τ_{xz} が連続となる。また地表において σ_{zz} 、 τ_{xz} が 0 となる。つり合い式が 6 個、未知数が 8 個であり、入力条件を 2 個追加すれば未定の係数が計算できる。

基盤中から境界に入射する SV 波だけを考えると、 $A_0=0$ となる。さらに $C_0=\beta_0$ にとると基盤中を斜めに上昇する振幅が 1 の SV 波の条件となる。入射角を設定すれば式(3a)から波線パラメータが決められ、残りの 6 個の未定係数が決められる。係数の計算結果は複素数となるが、 ω を変化させて数値計算で未定係数を計算すれば伝達関数を計算できる。 y 方向と同様に座標を固定して表わすと

$$\begin{aligned} U_1(x, z, \omega) &= u_1(x, z, 0) = \exp[i\omega(px)] \left\{ p(A_1 \exp(i\xi_1 \omega z) + B_1 \exp(-i\xi_1 \omega z)) + \eta_1(C_1 \exp(i\eta_1 \omega z) - D_1 \exp(-i\eta_1 \omega z)) \right\} \\ W_1(x, z, \omega) &= w_1(x, z, 0) = \exp[i\omega(px)] \left\{ \xi_1(A_1 \exp(i\xi_1 \omega z) - B_1 \exp(-i\xi_1 \omega z)) - p(C_1 \exp(i\eta_1 \omega z) + D_1 \exp(-i\eta_1 \omega z)) \right\} \end{aligned} \quad (8a, 8b)$$

となる。上下動と水平動は一定の位相差を保って進行する正弦波となる。入力地震動に対する表層内のある深さの応答は

$$\begin{aligned} U(\omega) &= U_1(0, h, \omega) \cdot U_g(\omega) \\ W(\omega) &= W_1(0, h, \omega) \cdot U_g(\omega) \end{aligned} \quad (9a, 9b)$$

で求められ、フーリエ逆変換すれば地盤の応答波形が得られるのも同じである。

地表に沿ったみかけの波長 L は

$$L = \frac{2\pi}{p\omega} = \frac{2\pi\beta_0}{\omega \sin \phi_0} \quad (10)$$

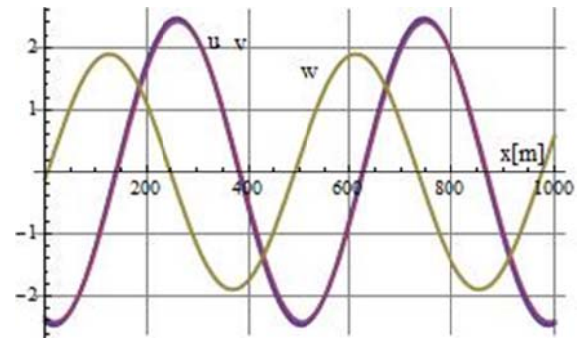
となる。入射角が大きくなるにつれて波長が短くなり、また高振数になるにつれて波長が短くなる。入射角と周波数によって見かけの波長が変化するため、ひずみと曲率も変動する。

(3)計算例

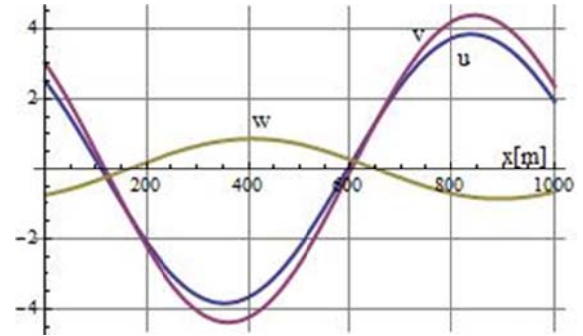
以上の定式化に従って表層地盤の応答を計算する。対象地盤は $\alpha_0=510[\text{m/s}]$, $\beta_0=300[\text{m/s}]$, $\alpha_1=170[\text{m/s}]$, $\beta_1=100[\text{m/s}]$, $\rho_0=\rho_1=1800[\text{kg/m}^3]$ とする。せん断波の 1/4 波長則によれば地盤固有周期は $0.8[\text{sec}]$ となる。図-2 は基盤入射波の振幅を 1, 入射角を $\phi_0=\pi/6[\text{rad}]$, 角周波数 $\omega=4\pi[\text{rad/s}]$ として計算した地表に沿ったある時刻の変位形である。同じ波形が維持されて x 軸正方向に進行する。2 方向の水平変位成分は同位相となるが、鉛直成分は入射角と周波数によって決まる位相差が生じる。

入射角と周波数による応答の変化を分析する。入射角 ϕ_0 を $\pi/12$ と $\pi/6$ として、周波数を 0 から 10Hz まで変化させたときの振幅変化を計算する。図-3 に計算結果を示す。入射角を固定したときの周波数応答が計算できる。入射角が小さいときには上下動は大きくなく、面内の水平変位 u と面外の水平変位 v は周期的にピークを持つ形状となり、およそ同様の変化となるのがわかる。入射角を大きくすると面内方向の応答が変化する。水平変位 u の振幅は減少するのに対し、鉛直変位 w の振幅は、周波数によっては水平変位よりも大きくなっている。

次に入射波形を仮定して時刻歴応答を計算する。入射波として周期 1 秒、振幅 1 の正弦波 3 波を考える。入力波形とフーリエスペクトルを図-4(a)と(b)に示す。入射角を $\phi_0=\pi/9$ として式(9a)と(9b)に従って周波数軸で応答を計算し、逆フーリエ変換で時刻歴に戻す計算を行ったのが図-4(c)である。重複反射により振幅が増大し、継続時間が長くなった地表の応答が計算できる。表層内のある深さを指定すれば、その位置の時刻歴波形が計算できる。SV 波入射の例を紹介したが、SH 波入射の場合も同じ手順で計算結果が得られる。

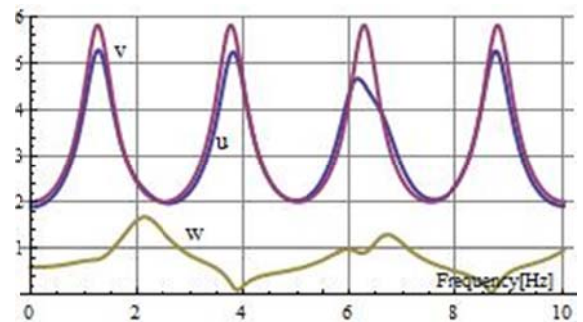


(a) $\phi_0=\pi/10$, $f=2\text{Hz}$

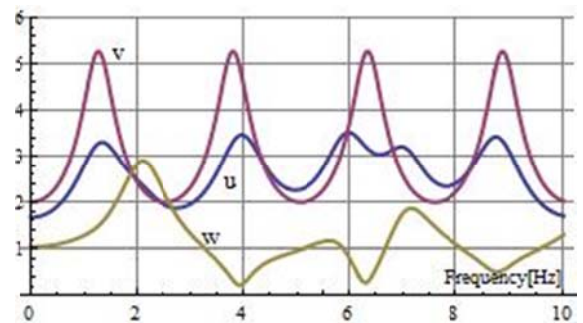


(b) $\phi_0=\pi/10$, $f=1\text{Hz}$

図-2 正弦波入力時の 3 成分の地盤変位形

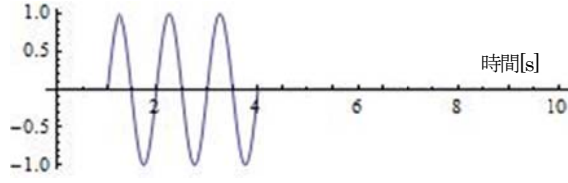


(a) $\phi_0=\pi/12$

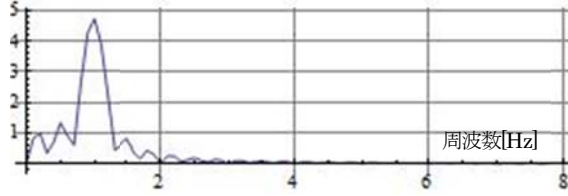


(b) $\phi_0=\pi/6$

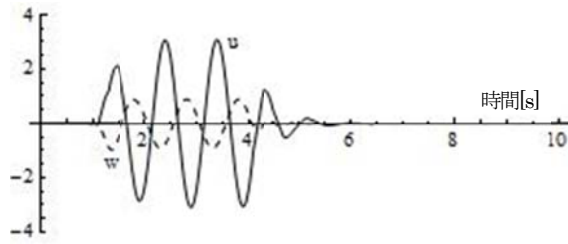
図-3 入射角を変化させたときの 3 成分の伝達関数



(a)基盤入力波



(b)基盤入力波のフーリエスペクトル



(c)x 方向の応答変位 ($\varphi_0=\pi/9$)

図4 地表の応答変位の計算例

4. 正弦規則波が作用する弾性支持されたはりの変形の定式化

基盤から表層に地震波を斜め入射すると地表に沿って進行する正弦規則波が計算される。この波動を利用して地中構造物の縦断解析を行う手法を定式化する。

(1)軸変形

構造条件である剛性や地盤バネが変化する場合について区間内では一定であるとして定式化を行う。時間項を省略して区間ごとの方程式を整理する。区間 k の軸方向の変位を $u_k(x)$ 、軸剛性を EA_k 、軸方向のバネ係数を K_k とする。支配方程式は

$$EA_k u_k'' - K_k y = -K_{tk} e^{-i\zeta x} \quad (11a)$$

であり、一般解と特解を合わせて表記すると

$$u_k(x) = C_{ak} \exp(-i\zeta x) + E_k \exp(\lambda_{ak} x) + F_k \exp(-\lambda_{ak} x) \quad (11b)$$

となる。ただし

$$C_{ak} = \frac{(L\lambda_{ak})^2}{4\pi^2 + (L\lambda_{bk})^2} \quad (11c)$$

$$\lambda_{ak} = \sqrt{\frac{K_{tk}}{EA_k}} \quad (11d)$$

であり、式(10)で定義したみかけの波長 L を用いて $\xi=2\pi/L$ としている。 E_k 、 F_k は境界条件によって決まる係数である。省略した時間項を掛け合わせれば、地盤変位に応じて波動が伝わることを表す三角関数項と、波動が伝わらない指数項の組み合わせとなっている。軸力は

$$N_k(x) = EA_k u_k'(x) \quad (11c)$$

となる。変位と軸力に関し、境界条件を2つ設定すれば未定係数を決められる。無限遠まで続く場合には発散項の係数を0とする。

(2)曲げ変形

曲げについても同様に考える。軸直角方向の変位を $y_k(x)$ 、曲げ剛性を EI_k 、軸直角方向のバネ係数を K_{nk} として支配方程式は

$$EI_k y_k'''' + K_{nk} y = K_{nk} e^{-i\zeta x} \quad (12a)$$

となる。軸変形と同様に時間項は省略している。区間 k におけるたわみの解は

$$y_k(x) = C_{bk} \exp(-I\zeta x) + A_k \exp(\lambda_{bk}(1+i)x) + B_k \exp(\lambda_{bk}(1-i)x) + C_k \exp(\lambda_{bk}(-1+i)x) + D_k \exp(\lambda_{bk}(-1-i)x) \quad (12b)$$

となる。ただし

$$C_{bk} = \frac{(L\lambda_{bk})^4}{4\pi^4 + (L\lambda_{bk})^4} \quad (12c)$$

$$\lambda_{bk} = \sqrt[4]{\frac{K_{nk}}{4EI_k}} \quad (12d)$$

とする。軸変形と同様に三角関数と指数関数の組み合わせとなっている。断面力は

$$M(x) = -EI_k y_k''(x) \quad (12e)$$

$$Q(x) = -EI_k y_k'''(x) \quad (12f)$$

4つの境界条件を指定すれば未定係数を決められる。無限遠まで続く場合には、発散する項の係数を0にする。

(3)境界条件

直線状につながる地中構造物の地震応答を計算するために境界条件を設定して各区間の応答を接続する。未定係数を用いて表わした方程式は、指数関数と三角関数を組み合わせた曲線群であり、境界条件に合う曲線を決め

る計算となる。地中構造物の存在によって正弦規則波は変化しないと仮定する。応答の基礎となる正弦関数は区間によって位相が変化して地中構造物に作用する。境界条件を与える位置を $x=a$ とすると、区間の開始位置の位相は $\exp(-i\xi a)$ となる。境界を $x=0$ として主な境界条件を式で書けば表-1 となる。はりが無限遠まで続く場合には発散する項の係数を 0 とするが、それ以外は通常のはり計算と同様の境界条件となる。

表-1 代表的な境界条件

軸方向固定	$u_{k-1}(0) = u_k(0)$ $N_{k-1}(0) = N_k(0)$
軸方向自由	$N_{k-1}(0) = N_k(0) = 0$
曲げ固定	$y_{k-1}(0) = y_k(0)$ $y'_{k-1}(0) = y'_k(0)$ $M_{k-1}(0) = M_k(0)$ $Q_{k-1}(0) = Q_k(0)$
曲げヒンジ	$y_{k-1}(0) = y_k(0)$ $M_{k-1}(0) = M_k(0) = 0$ $Q_{k-1}(0) = Q_k(0)$
曲げ自由	$M_{k-1}(0) = M_k(0) = 0$ $Q_{k-1}(0) = Q_k(0) = 0$

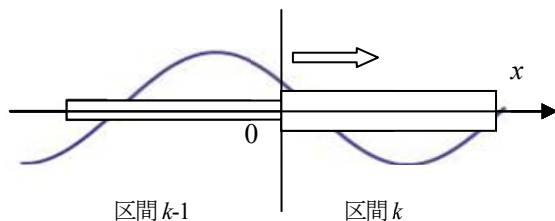


図-5 区間変化の模式図

5. 構造が変化する地中構造物の解析例

(1) 構造変化部の軸応答

軸剛性 EA が変化するときのばね支持されたはりの運動を計算する。 $x=0$ で構造条件が変化する問題を考える。はりがあることにより、波動場を伝わる波は変化しないものとする。 $x<0$ の領域を 1, $x>0$ の領域を 2 とする。無限遠で発散しない条件から、 $F_2=0$, $E_1=0$ となる。 $x=0$ で変位とひずみが連続する条件を用いて E_1 と F_2 が計算できる。

x 軸にそった振幅の変化を調べる。 E_1 と F_2 を方程式に代入し、実数部分を表示することにより波形が得られ、絶対値を表示することで振幅の分布が得られる。波数 ξ を一定とした場合、 λ の大きい領域でひずみが増大する。図-6

に $U_0=1$ としたときの変位振幅分布とひずみ振幅分布の計算例を示す。計算条件は $\lambda_1=0.03$ [1/m], $\lambda_2=0.015$ [1/m], $EA_1:EA_2=1:2$, $\xi=2\pi/200$ としている。変位分布は $x=0$ で地盤変位が腹になる条件を表示している。結果によれば $x=0$ の剛性の低い側でひずみが増大するのがわかる。地中構造物の剛性変化部では応答が大きくなることが解析的に評価できる。

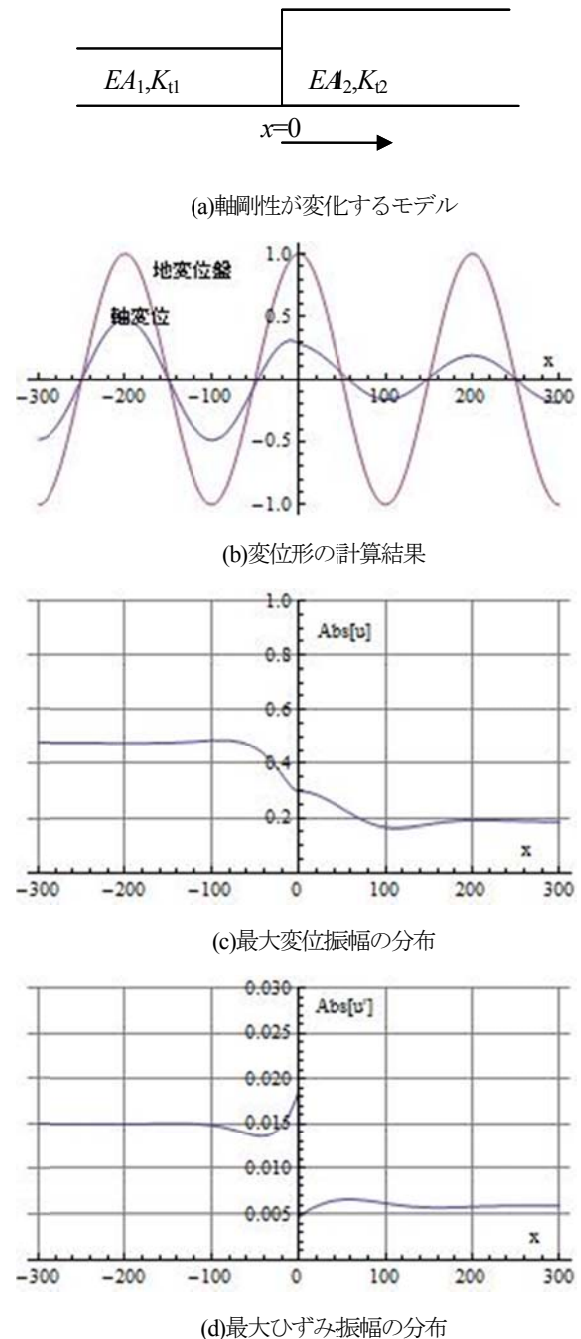


図-6 軸剛性が変化するはりの解析例 ($\lambda_1=0.03$ [1/m], $\lambda_2=0.015$ [1/m], $EA_1:EA_2=1:2$, $\xi=2\pi/200$ [1/m])

軸変形の問題においては解析解の表記が簡単になる。
 上述の問題で $EA_2/EA_1 = \alpha$ とすると

$$|u_1'(0)| = \frac{\xi(\lambda_1 + \lambda_2)}{\alpha\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{C_{a1}C_{a2}} \quad (13a)$$

$$|u_2'(0)| = \alpha |u_1'(0)| \quad (13b)$$

となる。剛性が変わる時のひずみの増幅を解析的に追跡することも可能である。

(2) 構造変化部の曲げ応答

2 種類の断面の地中構造物が $x=0$ において接合されている問題を計算してみる。 $x<0$ を区間 1, $x>0$ を区間 2 とし、構造条件は $EI_1 : EI_2 = 3 : 1$, $\lambda_{b1} = 0.015(1/m)$, $\lambda_{b2} = 0.02(1/m)$ とする。この構造系に波長 200m の正弦規則波を入力して、接合部付近の応答を計算する。この例題では、左右の無限遠で発散する項を無視して、一般解の 4 つの未定係数について 4 元連立方程式を解くことになる。

図-7 に計算結果を示す。図-7(a) は $x=0$ が腹になる時の地盤変位とたわみを示している。方程式を解いた結果の実数部分をプロットしている。曲げ剛性が大きく、固有波数が小さい $x<0$ においてたわみが小さくなり、 $x>0$ において大きくなっている。

図-7(b) はたわみ曲線の絶対値を計算した結果であり、各部の振幅となっている。接合部分から離れると一定値に収束する。指数関数が一定値に向けて減衰させる効果を持つ。接合部分ではゆるやかな変動に変動しながら両側に接続している。

図-7(c) は曲率を計算した結果である。曲げ剛性が急変する条件で計算しているために、 $x=0$ で不連続になっている。構造変化部の曲げ剛性の小さい側では曲率が急増している。振幅のグラフでは緩やかな変動にみえた波長の短い変動が、微分することによって顕著になった結果である。こうした境界部での変化は弾性支持したはりの一般解の影響によるものである。

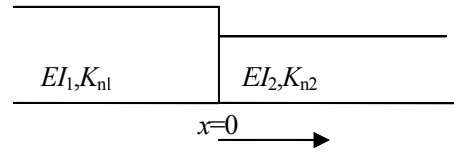
6. 斜め入射波による動的応答

(1) 無限長のはりの応答

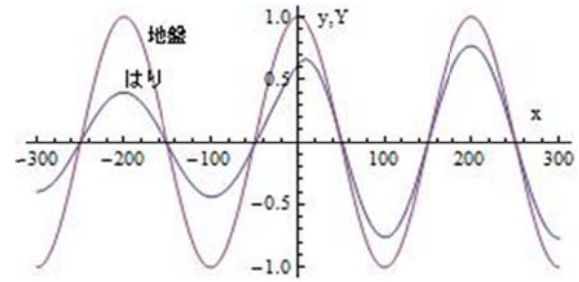
SH 波あるいは SV 波の斜め入射の場合には、水平軸に沿った波形は波長 L が $2\pi\beta_0 / \omega \sin \varphi_0$ の正弦規則波となり、基盤のせん断波速度と入射角で決まる位相速度 $\beta_0 / \sin \varphi_0$ で進行する。角振動数 ω の正弦規則波について x 成分を例にして式にすると

$$u(x, t) = U(\omega) \exp[i\omega(px - t)] \quad (14)$$

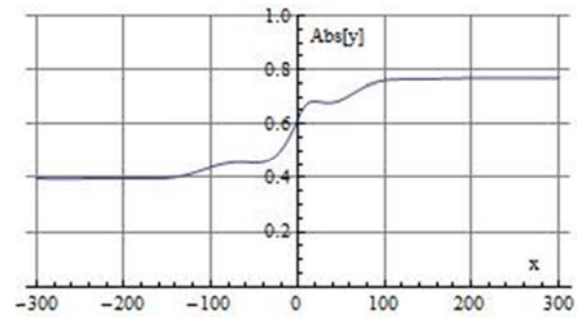
となる。 $U(\omega)$ は $x=0$ における複素数で表された振幅であ



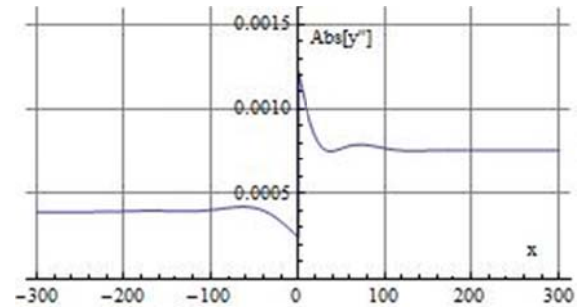
(a) 曲げ剛性が変化するモデル



(b) たわみの計算結果



(c) たわみ振幅の最大値の分布



(d) 曲率の最大値の分布

図-7 曲げ剛性が変化するはりの解析例 ($\lambda_{b1} = 0.015[1/m]$, $\lambda_{b2} = 0.02[1/m]$, $EI_1 : EI_2 = 3 : 1$, $\xi = 2\pi/200 [1/m]$)

り、振幅と位相が角振動数によって変化する規則波となる。 y 方向の変位と z 軸方向の変位についても同様に正弦規則波を定義できる。

正弦規則波が進行する場合には、弾性支持されたはりの解析解を用いて、軸変位とたわみの計算ができる。はりを $z=h$ の位置に水平に置き、地盤バネで支持された条件とする。地盤変位 U により軸変形が生じ、地盤変位 V により z 軸周りの曲げ変形が生じ、 W により y 軸周りの曲げ変形が生じる。ある位置の 3 成分の地盤変位は複素

数で表されるが、 z を固定すると x 軸にそっては一様振幅で周期変化する関数となる。

はりが一様かつ無限長である場合には、周期境界条件により簡単に計算が行える。計算式の導入は4章に示しているが、成分ごとに計算式を示す。

$$U_s(\omega) = C_a U(\omega) \quad (15a)$$

$$C_a = \frac{K_t}{EA(\omega p)^2 + K_t} = \frac{\lambda_a^2}{(\omega p)^2 + \lambda_a^2} \quad (15b)$$

$$\lambda_a = \sqrt{K_t / EA} \quad (15c)$$

$$V_s(\omega) = C_{bz} V(\omega) \quad (16a)$$

$$C_{bz} = \frac{K_{ny}}{EI_z(\omega p)^4 + K_{ny}} = \frac{4\lambda_{bz}^4}{(\omega p)^4 + 4\lambda_{bz}^4} \quad (16b)$$

$$\lambda_{bz} = \sqrt[4]{K_{ny} / 4EI_z} \quad (16c)$$

$$W_s(\omega) = C_{by} W(\omega) \quad (17a)$$

$$C_{by} = \frac{K_{nz}}{EI_y(\omega p)^4 + K_{nz}} = \frac{4\lambda_{by}^4}{(\omega p)^4 + 4\lambda_{by}^4} \quad (17b)$$

$$\lambda_{by} = \sqrt[4]{K_{nz} / 4EI_y} \quad (17c)$$

となる。 C_a , C_{by} , C_{bz} は実数の係数であるが入力振動数、基盤のS波速度、入射角によって変化する。逆フーリエ変換すれば時刻歴に変換できる。

断面力は変位応答計算の結果から求められる。微小変形を前提として注目する個所の断面力の振幅が計算できる。周波数 ω 、波数 ωp の波動として x 軸方向に展開することができる。

$$\frac{N}{EA} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = i\omega p U_s(\omega) \quad (18a)$$

$$\frac{M_y}{EI_y} = \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = (\omega p)^2 W_s(\omega) \quad (18b)$$

$$\frac{M_z}{EI_z} = \kappa_z = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (\omega p)^2 V_s(\omega) \quad (18c)$$

が計算式である。逆フーリエ変換すれば時刻歴に変換できる。

(2)一様なはりの解析例

$U_g(\omega)=1$ として伝達関数を計算した結果を図-8に示す。入射角は $\phi_0=\pi/9$ とし、地盤条件は図-3の計算例と同じ

としている。表層厚 $H=20[m]$ に対して地中構造物は $h=10[m]$ に設定している。構造条件は式(15c)で定義される $\lambda_a=0.02[1/m]$ 、式(16c)と式(17c)で定義される $\lambda_{bz}=0.02[1/m]$ としている。提示した計算式に従って各軸の変位応答と、軸ひずみおよび曲率の伝達関数が計算できる。

同図(a), (b), (c)は地盤変位と構造物変位の周波数応答を比較している。計算では地盤の減衰は考慮していないため、地盤応答は高周波数でも大きくなっているが、構造物変位は軸方向も軸直角方向も高周波数で低減する特性となっており、地盤応答の減衰はあまり影響しない結果となる。表層の増幅の影響が x 軸変位と y 軸変位では約1.2Hz、 z 軸では約2Hzに現れる。設定した構造条件ではこの振動数付近ではおおむね地盤に追従した動きになる。地中構造物の剛性が大きくなれば追従しない結果となる。

同図(d)は x 軸変位によって生じる軸歪みの周波数応答を示している。軸変位の応答に ωp がかかる形となるため、軸応答に比べて高周波成分でも応答するようになる。同図(e)は y 軸回りと z 軸回りの曲率の周波数応答を示している。曲率も軸歪みと同様に高周波数成分が応答するようになる。

入力地震動を単振動と仮定すれば、図-8で示した結果において周波数を指定した応答値に入力変位を乗じると応答値が計算できる。また実際の地震動を入力する場合には、地震動の時系列データをフーリエ変換した $U_g(\omega)$ とした周波数応答で計算した $U_s(\omega)$, $V_s(\omega)$, $W_s(\omega)$ を計算し、逆フーリエ変換をすれば応答波形が計算できる。

入射角がパラメータとなるが、地盤条件と構造条件を与えれば、入力地震動に対する応答波形が計算できる。この点において水平成層地盤を前提とした簡易な動的解析手法といえる。

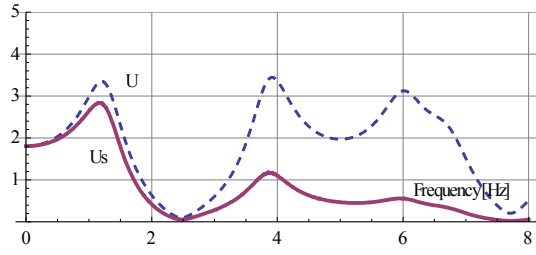
(3)入射角の影響

2層地盤の条件とはりに関する構造条件、さらにSH波あるいはSV波の入射角を与えることで軸ひずみと曲率が計算できることを示した。ここで入射角について考察する。斜め入射の入射角は震源の方向や基盤層の傾きなどが影響するために一意的に決めるのが難しい。入射角を変化させたときの軸ひずみや曲率の変化を分析して応答が大きくなる条件を検討する。

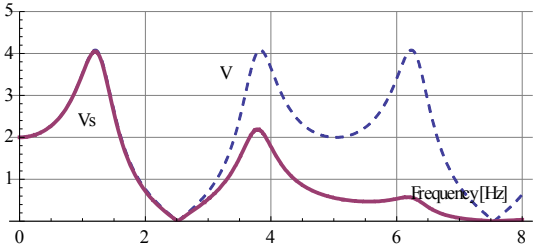
位相変化を無視することとし、軸ひずみの周波数応答の振幅を考えると

$$|\varepsilon_x| = \omega p U_s(\omega) = \omega p C_a U(\omega) \quad (19a)$$

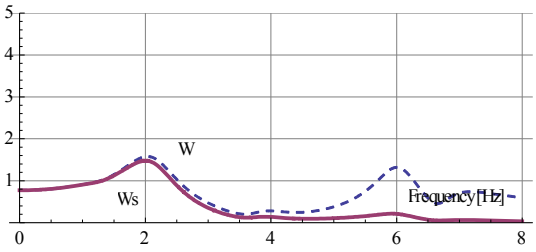
が得られる。ここで



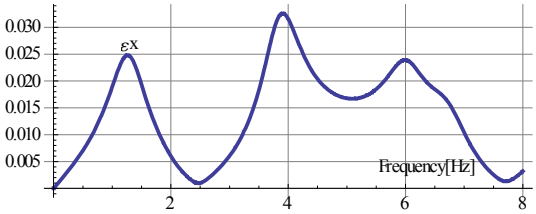
(a)x 軸変位の周波数応答



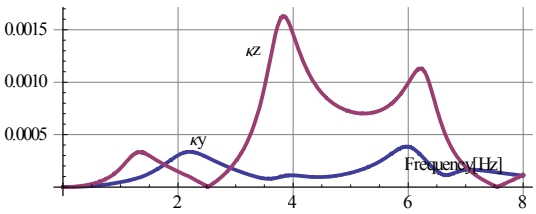
(b)y 軸変位の周波数応答



(c)z 軸変位の周波数応答



(d)軸ひずみの周波数応答



(e)曲率の周波数応答

図-8 周波数応答関数の計算例 ($\varphi_0 = \pi/9$, $\lambda_a = 0.02[1/m]$, $\lambda_{bz} = \lambda_{by} = 0.02[1/m]$)

$$C_\varepsilon = \frac{\omega p \lambda_a^2}{(\omega p)^2 + \lambda_a^2} \quad (19b)$$

と定義すると、 C_ε は構造条件と波線パラメータ p によって決まる軸ひずみの周波数応答関数となる。この関数は $\omega p = \lambda_a$ のときに最大値 $\lambda_a/2$ となることがわかる。すなわ

ち軸ひずみが大きくなる角周波数は

$$\omega = \frac{\lambda_a \beta_0}{\sin \varphi_0} \quad (19c)$$

であり、この角周波数が地盤の卓越振動に近いときに大きな軸ひずみが生じることになる。地盤条件と構造条件によって軸応答が最大となる入射角が決められる。

曲げ応答についても同様の分析が行える。地盤に対する曲率の周波数応答関数 C_κ は

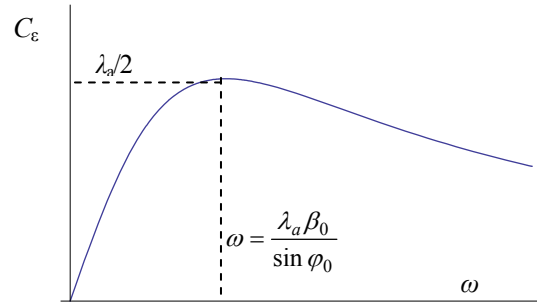
$$C_\kappa = \frac{4(\omega p)^2 \lambda_b^4}{(\omega p)^4 + 4\lambda_b^4} \quad (20a)$$

と定義できる。この関数は $\omega p = \sqrt{2}\lambda_b$ の条件で最大値 λ_b^2 となることがわかる。曲率が大きくなる角周波数の条件は

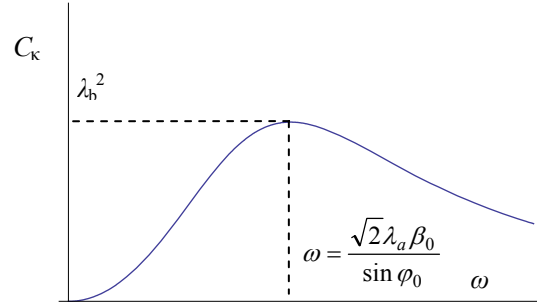
$$\omega = \frac{\sqrt{2}\lambda_b \beta_0}{\sin \varphi_0} \quad (20b)$$

となる。

図-9 に C_ε と C_κ の関数形を示す。図-8 に例として示した斜め入射の場合の地盤の周波数応答と図-10 に示した構造物の周波数応答の両者の作用により、軸応答と曲げ応答が計算できる。



(a) 軸ひずみ C_ε



(b) 曲率 C_κ

図-9 軸ひずみと曲率の周波数応答関数

7. 斜め入射解析の応用

(1)境界条件の導入

4章で説明したように、正弦規則波を入力として境界条件を設定した場合の解が計算できる。境界条件を設定することにより、無限に続く水平成層地盤を前提とするが、地中構造物は有限の範囲に存在する実在に近いモデルとできる。境界条件により位相差が生じ、地盤と地中構造物は同調して動かなくなる。

正弦規則波が入力されるはり解析によれば、地中構造物の応答は複素数で求めることができる。 x 方向の運動についてある深さでの地盤変位は式(14)で与えられる。地盤変位は正弦規則波であり、時間項を省略して軸変位の支配方程式を表すと

$$EAu_s'' - K_t u_s = -K_t |U(\omega)| e^{ip\omega x} \quad (21a)$$

となり、方程式の解は

$$u_s(x) = |U(\omega)| \{C_a \exp(ip\omega x) + E \exp(\lambda_a x) + F \exp(-\lambda_a x)\} \quad (21b)$$

となる。未定係数 E, F は境界条件によって決まる複素数であり、周波数の関数となる。構造条件が位置によって変化する場合には、同様の解を設定して変位と応力の連続を満たすように係数を決めていく。境界条件を満足する係数が決まれば、 x の値に対する軸変位 u_s が複素数で計算できる。実数部をとれば時間変化する変位分布となり、絶対値をとれば位置による振幅の変化を知ることができる。 x を固定することにより求められる係数を C_U^* とすれば

$$U_s(\omega) = C_U^* |U(\omega)| \quad (21c)$$

で表わすことができる。周期境界を仮定すれば C_U^* は前述した C_a となる。またひずみの応答係数を C_ε^* とすれば

$$U_s'(\omega) = C_\varepsilon^* |U(\omega)| \quad (21d)$$

となる。次に曲げ変形について z 方向を例に説明する。

$$EIw_s'''' + K_n w_s = K_n |W(\omega)| e^{ip\omega x} \quad (22a)$$

$$w_s(x) = |W(\omega)| \left\{ \begin{array}{l} C_b \exp(ip\omega x) \\ + A \exp(\lambda_b(1+i)x) + B \exp(\lambda_b(1-i)x) \\ + C \exp(\lambda_b(-1+i)x) + D \exp(\lambda_b(-1-i)x) \end{array} \right\} \quad (22b)$$

となる。未定係数 A, B, C, D は境界条件によって決まる複素数であり、周波数の関数となる。境界条件を満足する係数が決まれば x の値に対する z 方向変位 w_s が複素数で計算できる。 x 方向変位と同様に係数を C_W^* とすれば

$$W_s(\omega) = C_W^* |W(\omega)| \quad (22b)$$

となる。曲率の応答係数を C_κ^* とすれば

$$W_s''(\omega) = C_\kappa^* |W(\omega)| \quad (22d)$$

となる。境界条件を反映した周波数応答を逆フーリエ変換すれば時刻歴応答が求められ、最大応答から構造物の耐震評価が行える。

(2)立坑部の解析例

入力地震動と水平成層で近似した地盤条件および弾性支持したはりで近似した地中構造物の条件を設定することにより、動的解析の結果が得られる。例題として SV 波が斜め入射するときに、剛性が大きく変形することなく地盤につれて移動する立坑部分に接続された地中構造物を解析的に分析する。地中構造物は $x > 0$ の領域にあるものとし、 $x=0$ の境界条件を軸方向は地盤変位と同じとする。

$$u_s = U \quad (23a)$$

また軸直角方向は地盤変位に追随して動く固定条件とする。

$$w_s = W, \quad \frac{dw_s}{dx} = 0 \quad (23b, 23c)$$

はり変位の未定係数は 6 個であるが、発散項の未定係数を 0 として残りの 3 個の未定係数が計算できる。 $x=0$ におけるひずみと曲率の応答係数を示すと

$$C_\varepsilon^* = \frac{\lambda_a p \omega}{i \lambda_a - p \omega} \quad (24a)$$

$$C_\kappa^* = \frac{2\lambda_b^2 p \omega (p \omega - 2i \lambda_b)}{2\lambda_b^2 - p^2 \omega^2 + 2i \lambda_b p \omega} \quad (24b)$$

となる。式(19b)と(20a)では実数であった係数が複素数として計算される。複素数になるのは境界条件の影響により位相がずれることを表している。

諸数値を設定して計算例を示す。2 層地盤の条件は 3 章と 6 章で計算例を示した条件と同じとし、地中構造物は 6 章の例題と同様に $h=10$ [m] の位置に置く。構造条件ははりの微分方程式の特性値入力で定義し、 $\lambda_a=0.02$ [1/m]、 $\lambda_b=0.02$ [1/m] と仮定する。地震動は図-4(a)に示した周期 1 秒の正弦波 3 波とし、式(24a)で示した軸歪みの周波数応答と、式(24b)で示した y 軸回りの曲率の周波数応答を計算する。斜め入射角 $\phi_0=\pi/9$ としたときの計算結果を図-11、図-12 に示している。

図-4(b)に示した入力地震動の周波数特性と図-8(a)と図-8(c)に示した地盤の周波数特性、さらに図-11(a)と図-12(a)に示した構造物の応答特性により、立坑際の動的解析結果が求められる。軸歪みの最大は約 0.02、曲率の最大は約 0.0006[1/m] となる。正弦波の振幅を 1 とした結果

であるが、線形解析なのでそれぞれの結果を EA 倍あるいは EI 倍すれば軸力と曲げモーメントが得られる。

入力地震動として実際の波形を用いれば同様の計算により、立坑際の軸歪みあるいは曲率の時刻歴が計算できる。さらに固定条件を緩和する継手の条件をバネなどで近似して設定すれば、耐震対策の効果も算定できることになる。フーリエ変換と周波数応答関数の掛け算だけの計算であるが、2層地盤の地盤条件とほりの始点・終点などの構造条件を加味した応答計算結果を得ることができる。

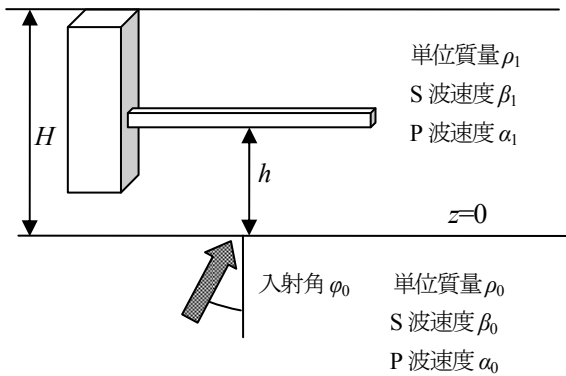


図-10 立坑のある解析モデル

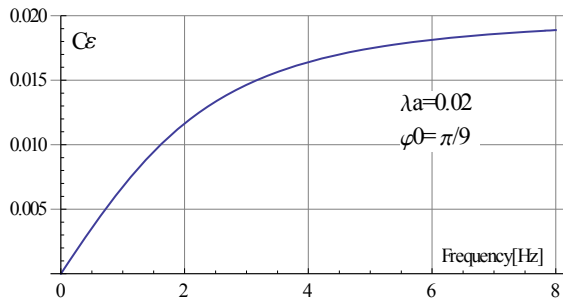


図-11(a)立坑際の軸ひずみの周波数応答

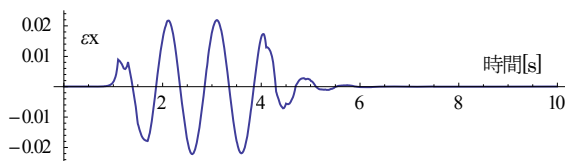


図-11(b)正弦波入力時の立坑際の軸ひずみの時間変化

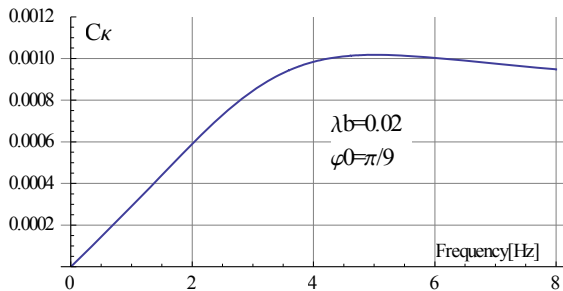


図-12(a)立坑際の曲率の周波数応答

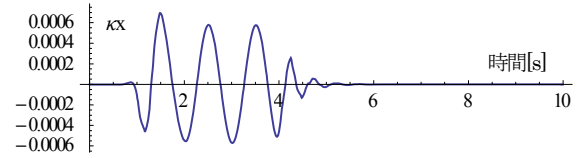


図-12(b)正弦波入力時の立坑際の曲率の時間変化

6. まとめ

現行の地中構造物の設計指針類では入力地震動から地中構造物の変形までいくつかのモデルの組み合わせで表現されており、組み合わせ条件に合わない場合には地盤—地中構造物を一体的にモデル化した動的解析を要求している。コンピュータが普及したことにより有限要素法などの解析が容易に行えるようになった環境は好ましいが、大量に存在する既存不適格な地中構造物の耐震対策を進める上で、すべて動的解析で評価することは合理的ではない。一方で簡易法である応答変位法では複雑な形状の構造物を精緻に評価できる精度がない。

本論文は水平成層地盤に斜め入射される平面波の特性を応用して、地表に水平に置かれる地中構造物の動的応答を計算する手法を述べている。地表に沿って一定の速さで進行する波動を入力条件として、境界条件を設定した地中構造物の応答を計算する手順を提案している。水平成層地盤に限定した定式化であり、斜め入射の角度の設定の問題も残るが、地盤と構造条件が揃えば、入射角をパラメータとして入力地震動に対する地中構造物の動的応答計算ができること示している。

動的解析の目的は稀に発生する大地震に対する評価であり、地盤や構造物の非線形挙動を再現した上で既存不適格構造物の評価を行うのが望ましい。また水平成層地盤で近似するだけでなく、複数のボーリングデータに基づいて地盤の不整形性を評価するのが望ましい。FEM 解析を補完する目的で、非線形性や不整形地盤の影響を評価する研究を進める予定である。

参考文献

- 1) 土木学会：地下構造物の耐震性能照査と地震対策ガイドライン(案), 2011.
- 2) 斎藤正徳：地震波動論, 東京大学出版会, 2009
- 3) 鈴木崇伸：応答変位法による地中構造物の軸変形解析に関する一考察, 土木学会地震工学論文集 Vol.30,2010.
- 4) 鈴木崇伸：応答変位法による地中構造物の曲げ解析に関する一考察, 土木学会論文集, 2012.

(2012 年 9 月 20 日投稿)

Simple dynamic analysis method for underground structure using sinusoidal plane wave traveling along horizontal stratification ground

Takanobu SUZUKI

This report presents simple dynamic analysis method for underground structure. Sinusoidal plane wave generated by oblique incidence travels along ground surface. This plane wave deforms underground structure which is installed horizontally in surface layer. Underground structure is modeled as beam which has some boundaries and supported by elastic spring. Beam analysis acting ground deformation is can be formulated easily, and some frequency response functions are useful for evaluation of existing non-conforming structures.