

応答変位法による地中構造物の曲げ解析に関する一考察

鈴木 崇伸¹⁾

1)博士(工学) 東洋大学理工学部都市環境デザイン学科
(〒350-8585 埼玉県川越市鯨井 2100)
E-mail:tsuzuki@toyo.jp

本論文は多くの設計で採用されている応答変位法の計算手法を応用して、地中構造物の曲げ変形に関する計算方法を提案している。正弦規則波を用いて、境界条件を考慮した解析解を示とともに、構造条件が異なる箇所に対しても簡易な応答計算が行えることを示している。また地中構造物の耐震解析にかかわる非線形現象をバイリニア近似することにより、地盤バネの降伏や構造部位の降伏を解析解で追跡できることを示している。解析解を用いて概略の構造諸元を決めて、最終的に動的解析で安全評価を行う設計手法が望ましいと考える。

KeyWords : 弾性支持ばり, 曲げ解析, 正弦規則波, 境界条件, 非線形近似計算

1. はじめに

弾性支持されたはりに外力を加える解析モデルは地中構造物や基礎構造物の設計において基本モデルとされる。地震応答計算においても弾性支持されたはりに強制変位を加える応答変位法が多くの設計指針で採用されている。はり解析は軸力解析と曲げ解析に分類できるが、ばね支持効果を見込んだ方程式により応答が簡単に計算できる。

1995年に起きた兵庫県南部地震の被害を教訓に設計地震動が引き上げられ、レベル1、レベル2地震動の考え方が定着した。それと同時にコンピュータの高性能化に伴い、地盤や構造物の複雑な変形を解析できるようになり、設計ツールの整備も格段に進んだ。はり解析の必要性は低下したようにも考えられるが、はりバネモデルの簡便さとこれまでの実績を考えれば、適用範囲を明確にして設計計算方法として活用するのが望ましい。

筆者はこれまでに、応答変位法による軸解析について境界条件の影響や地盤ばねの降伏の影響を見込んだ計算式を提案してきた。非線形解析であってもバイリニア程度の簡単なモデルであるなら、解析解の利用が便利であることを提案している。本研究は、軸力解析の方程式を曲げ解析に応用して解析解を導いた結果をまとめている。軸力解析と曲げ解析は択一ではなく、両者の結果を重ね合わせて地震応答を評価する必要がある。

応答変位法の応用を前提とするために、変位振幅と波長は与えられるものとして定式化を行う。正弦

規則波を入力条件とするため、地盤の不整形性などの不規則波となる現象は扱うことができない。しかしながら、構造物の断面変化や塑性ヒンジなどの構造条件の変化は解析に織り込むことができる。通常のはり解析と同様に境界条件を扱えるようになると、構造の基礎検討を簡単に行えるようになる。応答変位法と総称される計算手法でどこまで地中構造物の地震応答解析が可能かを検討し、構造物の終局状態まで追跡できるように改良するための課題は何かを明確にしていく必要がある。

2. 弾性支持はりの基礎方程式

(1)基礎方程式

軸直角方向の変位を $y(x)$ 、曲げ剛性を EI 、軸直角方向のバネ係数を K_n 、分布力を $q(x)$ として、支配方程式は

$$EIy'''' + K_n y = q(x) \quad (1)$$

となる。特性方程式は

$$EI\lambda^4 + K_n = 0 \quad (2)$$

となる。 $\lambda = \alpha + \beta i$ において、 α と β が実数となる解を計算すると

$$\lambda = (\pm 1 \pm i) \left(\frac{K_n}{4EI} \right)^{1/4} \quad (3)$$

となる。複号の組み合わせで4とおりの解がある。一般解は指数と三角関数の掛け合わせとなる。

$\lambda_b = \sqrt[4]{K_n/4EI}$ と置き換え、実数解に変換して式で表わすと次式となる。

$$y(x) = e^{\lambda_b x} (A \sin \lambda_b x + B \cos \lambda_b x) + e^{-\lambda_b x} (C \sin \lambda_b x + D \cos \lambda_b x) \quad (4)$$

ここに λ_b は曲げ剛性と軸直角方向の地盤バネ係数の比から決まる定数であり、指数関数の係数ならびに三角関数の係数となる。特定の繰返しを決める定数であり、波動方程式の解の波数に相当する量となっている。この値が小さければ繰返しの間隔が長くなり、大きければ繰返しの間隔が短くなる。 λ_b を本論文中では固有波数とよぶこととする。

(2)弾性支持の影響

単純な問題で弾性支持の影響を分析する。図1に示すように長さ L 、曲げ剛性 EI の単純ばりに等分布力 q が作用する例題を考える。弾性支持の無い単純ばりの場合には、最大曲げモーメントは $qL^2/8$ 、最大たわみは $5qL^4/384EI$ となる。この問題を弾性支持の一般解を用いて計算する。一般解と特解をあわせると

$$y(x) = e^{\lambda_b x} (A \sin \lambda_b x + B \cos \lambda_b x) + e^{-\lambda_b x} (C \sin \lambda_b x + D \cos \lambda_b x) + q/K_n \quad (5a)$$

であり、境界条件は

$$y(0) = y(L) = 0, \quad -EIy''(0) = -EIy''(L) = 0 \quad (5b)$$

となる。弾性支持の無い問題と同様に境界条件から未定係数が決められ、たわみ曲線が求められる。たわみの式は省略するが、最大たわみの結果を示す。

$$y(L/2) = \frac{q}{K_n} \left\{ 1 - \frac{2 \cos(L\lambda_b/2) \cdot \cosh(L\lambda_b/2)}{\cos L\lambda_b + \cosh L\lambda_b} \right\} \quad (6)$$

バネ支持でない場合の最大たわみとバネ支持の場合の最大たわみの比率を計算する。図2に $L\lambda_b$ をパラメータとして比率を計算した結果を示す。弾性支持としたときのたわみの比は1以下となり、 $L\lambda_b$ の値が大きくなるほど中間点のたわみが減少する。弾性支持により反力が分散して作用することにより、変形が抑制されている。

ここで $L\lambda_b$ の意味について考える。はり長さ L と固有波数 λ_b の積は無次元量となる。固有波数 λ_b はバネ係数が大きいほど大きくなり、曲げ剛性が大きいほど小さくなる量である。また一定外力が作用するはりでは、はり長さが長いほどたわみや断面力が大きくなる。無次元化したはり長さ $L\lambda_b$ は、はりの復元力を決定するパラメータであり、 $L\lambda_b$ が小さいと曲げ剛性 EI が優勢となり、逆に $L\lambda_b$ が大きいと地盤バネ K_n が優勢となる。本論文中では $L\lambda_b$ を剛性比とよ

ぶこととする。

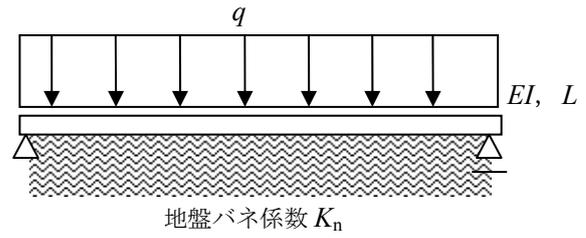


図1 弾性支持された単純ばり

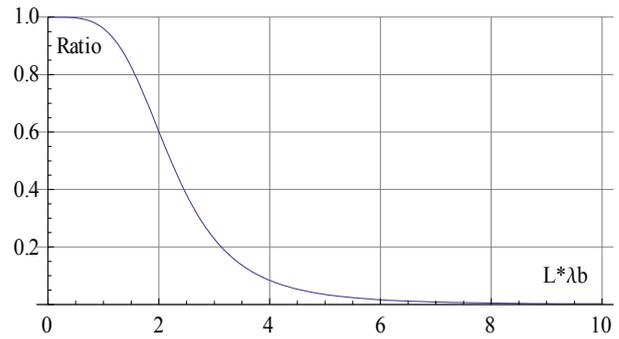


図2 剛性比による最大たわみの変化

(3)地盤変位を受ける問題

次に地震波動による曲げ変形を考える。波長が L 、振幅が Y である正弦波を考える。軸直角変位を y 、曲げ剛性を EI 、軸線直角方向の地盤バネを K_n とすると

$$EIy'''' + K_n y = K_n Y \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

が支配方程式となる。無限長さにおいて方程式が成り立つ条件にすると、式(4)で示した一般解は指数関数を含むために解とはなりえない。一般解は特定の境界条件を与えたときに影響する因子である。一般解を無視して周期条件を満足する結果を計算すると式(8a)となる。係数 C_b は無次元量であり、曲げ剛性、バネ係数、波長から決められる。軸変形においても同様に係数が決められるが、周期境界の影響で指数関数の一般解を無視するのは同様である。

$$y = C_b Y \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (8a)$$

$$C_b = \frac{K_n}{EI \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 + K_n} = \frac{(L\lambda_b)^4}{4\pi^4 + (L\lambda_b)^4} \quad (8b)$$

図3に C_b の変化を示す。剛性比 $L\lambda_b$ は弾性支持されたはりの応答を支配するパラメータとなるが、剛性比が大きければ $C_b \rightarrow 1$ となり、地盤変位に追従す

る。逆に剛性比が小さければたわみは小さくなり、地盤変位に追随しなくなる。構造物の特性とバネ特性から決まる固有波数と波長が関連して構造物の曲げ応答が計算できる。

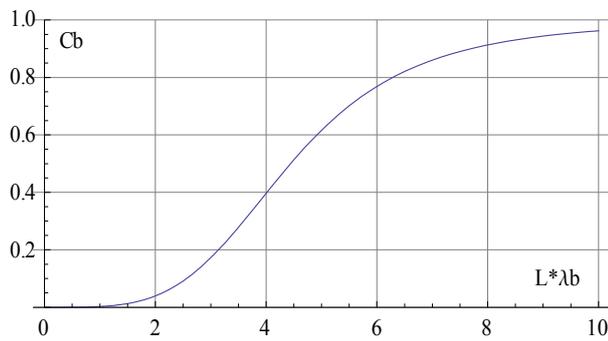


図3 係数 C_b の剛性比による変化

3. 正弦規則波による構造分析

(1) 基本的な考え方

弾性支持されたはり是一般解に指数関数が含まれるために、その影響を無くすることができる周期境界を仮定して、三角関数を入力関数とした軸直角応答の公式を導いた。ここで前提となっているのは無限に同じ構造が連続し、一定の波長をもった正弦波が作用することである。無限に連続する構造物は存在せず、必ず始まりと終わりがある。また無限に連続する正弦波も自然界には存在しない。減衰もするし、波長も変化するはずである。多くの設計指針で用いられている正弦波入力への解は、数学的な単純化を目的としてつくられた式であり、現実の応答を大まかに近似しているにすぎないことに注意する必要がある。

実際の構造物は有限の長さであり、地盤条件も構造条件も変化する。地盤震動解析を行えば、場所によって振動数や波長が変化する波動が地中構造物に作用する。前項で示したはり解析の結果を現実に近付けるためには、境界条件を反映した解や無限に繰り返す正弦波以外の解を利用する必要がある。

汎用の地盤震動解析により数値計算を行えば、これらの問題は解決され、複雑に条件が変化するときの応答計算結果が得られる。しかし数値解析は特別な条件で得られる一つの情報であり、ある条件を変えたときに応答がどのようになるかは推測しがたい。複数のケースを解析し傾向分析を行えばおよその特徴はつかめるが、解析ケースの範囲内の推定にとどまる。一方で解析解は、複雑な条件には対応できないもののパラメータの見極めには適しており、主要なパラメータが応答にどのように影響するかを分析する手掛かりになる。

境界条件の分析には正弦規則波を利用するのが便

利である。ある波長をもった波が一定速度で進行する正弦規則波を入力関数と考える。関数で表記すれば

$$f(t, x) = A \sin(\omega t - \xi x) = A \exp(i\omega t - I\xi x) \quad (9)$$

となる。波長を L とすると $\xi = 2\pi/L$ であり、 x 軸の正方向に進行する正弦波を表わしている。前述の正弦波入力による応答は、ある時刻で静止させた波動を作用させる計算を行っていることになる。または定常波の最大振幅時の変形を計算しているとも考えられるが、移動することは考慮されていない。入力波動が移動する影響は位相に表れる。ある点がいとも同じ位相になるのではなく、位相変化のある状態で応答を計算する必要がある。

振動解析においては振幅が 1、振動数が ω の定常振動を構造物に作用させて応答特性の分析が行われる。振幅が 1 である正弦規則波を考えて、地中構造物の応答特性を分析することは有用であると考えられる。振動解析においてはパラメーターは振動数だけであるが、進行正弦波の場合には、周波数 ω と波数 ξ あるいは波長 L の 2 つとなる。波動伝播問題であるために、最も簡略化しても 2 つのパラメータが必要になる。

(2) 曲げ変形と境界条件

図4に示すように $x > 0$ の領域に一樣なはりを置き、 $x = 0$ の境界条件を変化させる。構造条件、弾性支持条件ともに半無限領域で一樣とする。無限大で発散しない条件からたわみの方程式は、

$$y(t, x) = C_b e^{-I\omega x} \{ Y(x) + C \exp(\lambda_b(-1+I)x) + D \exp(\lambda_b(-1-I)x) \} \quad (10)$$

となる。方程式を解き易くするために、指数で一般解を仮定する。たわみの 3 階微分まで計算するために計算が簡単に行えるかたちとする。振幅 1 の正弦規則波を強制変位として作用させて、 $x = 0$ の境界条件に応じた未定係数 C 、 D を計算できる。

$x = 0$ を自由境界とした例を説明する。行き止まりの地中構造物があった場合の地震応答となる。先端部分において、曲げ拘束、せん断拘束はないため断面力は 0 となる。境界条件を式で表わせば

$$M(0) = -EIy''(0) = 0 \quad (11a)$$

$$Q(0) = -EIy'''(0) = 0 \quad (11b)$$

となる。式(10)を境界条件に代入すれば未定係数 C と D を決めることができる。正弦規則波の位相変化を含んだかたちで、境界条件を満足する未定係数が計算できる。

方程式を解くと係数が得られ、一般解に代入して整理すると先端のたわみとたわみ角が虚数を含んだかたちで求められる。虚数が含まれるのは位相変化を見込んで計算したことによる。

$$y(t,0) = \frac{2\lambda_b(\lambda_b + \xi I)}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I} e^{i\omega t} \quad (12a)$$

$$y'(t,0) = \frac{2\lambda_b^2 \xi I}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I} e^{i\omega t} \quad (12b)$$

が計算結果である。計算結果の実数部のみを求めれば、時間応答が計算できる。また振幅の絶対値を計算すれば、たわみとたわみ角の最大値が計算できる。振幅 1、振動数 ω 、波数 ξ の正弦規則波を入力したときの地中構造物の先端部の応答が計算できたことになる。正弦規則波は時間変化する入力であり、構造物も時間変化する応答となる。

式(8b)に示した C_b と $\xi=2\pi/L$ を用いて方程式を簡略化して先端の振幅を計算する。

$$|y(t,0)| = \sqrt{C_b} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L\lambda_b}\right)^2} \quad (13a)$$

$$|y'(t,0)| = \frac{2\pi}{L} \sqrt{C_b} \quad (13b)$$

が計算結果である。前述のように C_b は剛性比 $L\lambda_b$ によって変化する。地盤変位振幅を 1 としているが、地盤変位の波長と振幅、さらに構造系の固有波数によって応答が決まるのは無限長の場合と同じである。図 5 に入力振幅を 1 としたときの自由端の変位応答を示す。剛性比によっては地盤変位以上の変位振幅となることがわかる。最大で地盤変位の 1.3 倍程度になる。地盤バネが優勢な場合には地盤変位に追従して動くことになる。

同様の計算により、境界条件を変化させたときの境界点の応答を計算した結果を表 1 に整理する。各欄の上段に複素数の解、下段に絶対値を計算した振幅を示している。複素数の解では地盤変位の波数 ξ を用い、振幅の表記は剛性比 $L\lambda_b$ を用いている。入力した正弦規則波の振幅は 1 であり、入力条件として固有波数 λ_b 、規則波の波数 ξ 、振幅 Y を与えればたわみなどの応答振幅が求められる。たわみ、たわみ角、曲率の振幅は C_b の平方根に比例する式となる。

単純な境界条件ならば、境界値の応答も簡単な式で表わすことができることを示したが、曲げとせん断の拘束条件の組み合わせはいろいろと考えられる。ここで示した計算により公式化は可能である。

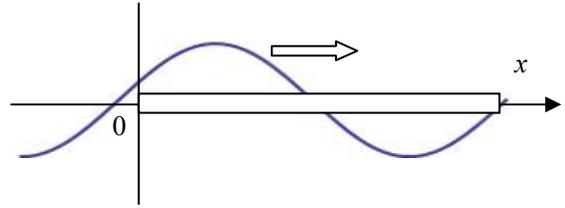


図 4 境界条件を設定したはりモデル

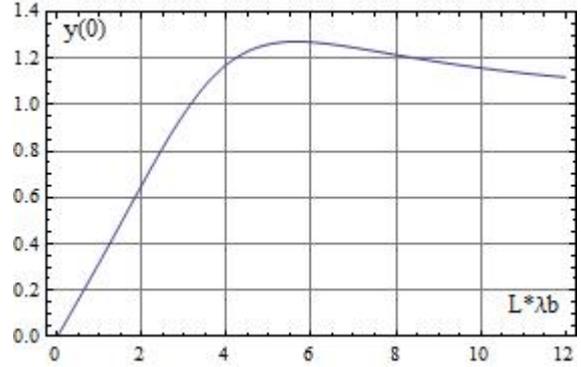


図 5 先端のたわみの剛性比による変化

表 1 境界条件を変化させた解

条件	$x=0$ の計算式
自由境界 $y(0)=0$ $y''(0)=0$	$y(0) = \frac{2\lambda_b(\lambda_b + \xi I)}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I}$ $ y(t,0) = \sqrt{C_b} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{L\lambda_b}\right)^2}$ $y'(0) = \frac{2\lambda_b^2 \xi I}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I}$ $\frac{ y'(0) }{\lambda_b} = \frac{2\pi}{L\lambda_b} \sqrt{C_b}$
固定境界 $y(0)=0$ $y'(0)=0$	$y''(0) = \frac{4\lambda_b^4}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I}$ $\frac{ y''(0) }{\lambda_b^2} = 2\sqrt{C_b}$
ヒンジ境界 $y(0)=0$ $y''(0)=0$	$y'(0) = \frac{2\lambda_b^3}{2\lambda_b^2 - \xi^2 + 2\lambda_b \xi I}$ $\frac{ y'(0) }{\lambda_b} = \sqrt{C_b}$

4. 構造変化がある場合の応答計算

(1)基礎方程式

地中構造物が直線であれば、軸剛性や曲げ剛性、軸方向の地盤バネ係数や軸直角方向の地盤バネ係数が途中で変化する場合にも正弦規則波を用いて解析することができる。区間 k においてたわみの解を

$$y_k(x) = C_{bk} \exp(-I\xi x) + A_k \exp(\lambda_{bk}(1+I)x) + B_k \exp(\lambda_{bk}(1-I)x) + C_k \exp(\lambda_{bk}(-1+I)x) + D_k \exp(\lambda_{bk}(-1-I)x) \quad (14a)$$

ただし

$$C_{bk} = \frac{4\lambda_{bk}^4}{\xi^4 + 4\lambda_{bk}^4} \quad (14b)$$

$$\lambda_{bk} = \sqrt[4]{\frac{K_{nk}}{4EI_k}} \quad (14c)$$

とする。区間 $k-1$ との境界で 4 つの境界条件を指定すれば未定係数を決められる。無限遠まで続く場合には、発散する項の係数を 0 にする。境界を $x=0$ として剛結の場合の境界条件を式で書けば

$$\begin{aligned} y_{k-1}(0) &= y_k(0) \\ y'_{k-1}(0) &= y'_k(0) \\ EI_{k-1}y''_{k-1}(0) &= EI_k y''_k(0) \\ EI_{k-1}y'''_{k-1}(0) &= EI_k y'''_k(0) \end{aligned} \quad (15a \sim 15d)$$

となる。境界条件に合わせて、指数関数と三角関数を組み合わせた曲線をフィッティングさせる計算を順次行っていくことになる。

軸解析についても同様に示すと

$$u_k(x) = C_{ak} \exp(-I\xi x) + E_k \exp(\lambda_{ak}x) + F_k \exp(\lambda_{ak}x)$$

$$C_{ak} = \frac{\lambda_{ak}^2}{\xi^2 + \lambda_{ak}^2}$$

$$\lambda_{ak} = \sqrt{\frac{K_{tk}}{EA_k}}$$

$$u_{k-1}(0) = u_k(0)$$

$$EA_k u'_{k-1}(0) = EA_k u'_k(0) \quad (16a \sim 16e)$$

となる。境界条件に合うように曲線を当てはめていくのはまったく同じである。

正弦規則波を用いた応答計算は、水平成層地盤の重複反射計算に似ている。重複反射計算では各層の変位は三角関数となり、波数が変化する条件で境界条件に合う振幅を求める計算を行う。上述の弾性支持したはりの解析では、変位が指数関数と三角関数を組み合わせたかたちとなり、軸剛性、曲げ剛性、地盤バネの変化に見合った振幅を決め

る計算となる。この計算では、波数に相当する量が構造条件により規定される。

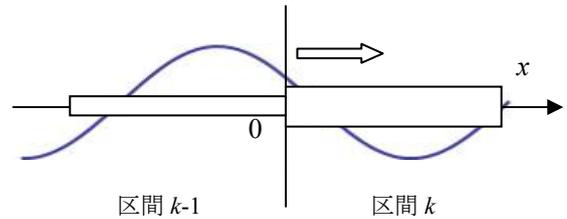


図 6 区間ごとに構造が変化するモデル

(2)計算例

2種類の断面の地中構造物が $x=0$ において接合されている問題を計算してみる。 $x<0$ を区間 1, $x>0$ を区間 2 とし、構造条件は $EI_1:EI_2=3:1$, $\lambda_{b1}=0.015(1/m)$, $\lambda_{b2}=0.02(1/m)$ とする。この構造系に波長 200m の正弦規則波を入力して、接合部付近の応答を計算する。この例題では、左右の無限遠で発散する項を無視して、一般解の 4 つの未定係数について 4 元連立方程式を解くことになる。

図 7 に計算結果を示す。図 7(a) は $x=0$ が腹になる時の地盤変位とたわみを示している。方程式を解いた結果の実数部分をプロットしている。曲げ剛性が大きく、固有波数が小さい $x<0$ においてたわみが小さくなり、 $x>0$ において大きくなっている。

図 7(b) はたわみ曲線の絶対値を計算した結果であり、各部の振幅となっている。接合部分から離れると一定値に収束する。指数関数が一定値に向けて減衰させる効果を持つ。接合部分ではゆるやかに変動しながら両側に接続している。

図 7(c) は曲率を計算した結果である。曲げ剛性が急変する条件で計算しているために、 $x=0$ で不連続になっている。構造変化部の曲げ剛性の小さい側では曲率が急増している。振幅のグラフでは緩やかな変動にみえた波長の短い変動が、微分することによって顕著になった結果である。こうした境界部での変化は弾性支持したはりの一般解の影響によるものである。

地盤変位振幅を 1 とした結果を示したが、この解は時間変化する単振動の項を省略している。特定の地震動を設定すれば、諸数値を代入して最大たわみ、最大曲げモーメントなどに換算できる。さらに入力地震動を x 軸に沿って伝播する波動に展開すれば、各部位の応答の時間変化を計算することもできる。正弦規則波を用いた応答計算は、応答変位法を高度化する方法になる。

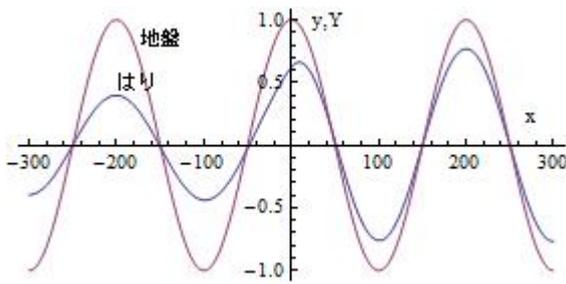


図 6(a) 地盤変位とはりのたわみ

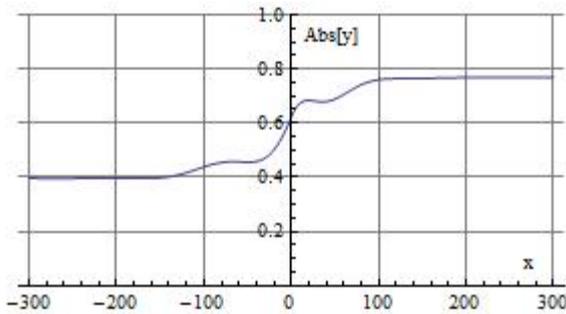


図 6(b) たわみの振幅の分布

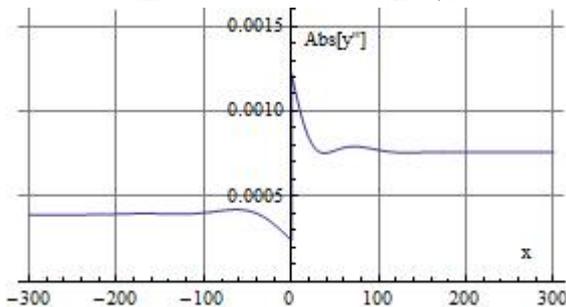


図 6(c) 曲率の分布

5. 非線形性を考慮した応答変位法

5.1 解析法の概要

地盤や構造物の非線形特性は通常、骨格曲線により規定される。入力値に対する応答を骨格曲線に基づいて力のつり合いから評価する準静的解析は非線形挙動の簡易な解析手法として多用されている。準静的という表現はある入力値に対する応答を計算するとき、単純なつり合い方程式とならないので、入力を徐々に大きくしてつり合い計算を行い、所定の入力値に達するまで増加させる計算を行うことによる。静的なつり合いが基礎となるが、入力値を増減させて繰り返し計算を行う手法である。

地下構造物の軸方向の耐震解析において 3 とおりの非線形性のパターンがある。第 1 は地震動入力の非線形性である。第 2 は構造物の剛性の非線形性であり、第 3 は地盤バネの非線形性である。これらを軸直角変位の方程式を再掲して説明する。軸方向においてもまったく同様である。

$$EIy'''' + K_n y = K_n y_g \quad (17)$$

まず、はり解析の前提として地盤変位分布 y_g を指定する必要があるが、地盤変位の固有振動数あるいは固有モードは入力地震動の振幅によって変化する。地盤変位は表層地盤の非線形挙動の影響を受けるために、入力地震動に対して曲げ応答が単純に比例するわけではない。表層地盤の応答特性に応じて振幅と波長を設定する必要がある。

次に曲げ剛性 EI に関する非線形性があげられる。一般に構造材料はひずみが大きくなるとフックの法則が成り立たない性質がある。 E はひずみによって一定値ではなく、大ひずみではヤング率が小さくなる。さらに断面 2 次モーメント I も一定ではなく変形が大きくなると増減がある。亀裂を生じるような材料であれば、急減に断面積が減少するケースも考えられる。

また地盤バネ係数 K_n も非線形性を示すことが実験により確認されている。地盤と構造物の相対変位が一定の範囲内では地盤からの反力は相対変位に比例するが、一定値を超すと比例しなくなる特性を有している。

以上の理由により、入力地震動が 2 倍になれば、曲げ応答も 2 倍になるという論理が成り立たない。入力値に応じて実験データや解析データに基づいた非線形特性を反映させて解析を行わなくてはならない。問題の種別によっては線形計算をした場合に比べて応答値が低減される場合もある。逆に線形計算に比べてはるかに大きな応答値になることもあるが、事実にはできるだけ忠実に計算したのであるから真実味は高いといえる。ただし骨格曲線をもとにしたつり合い計算はあくまで大胆に近似した一つの結果であって、動的な影響を無視した静的なつり合い計算の範囲内での応答値である点に注意する必要がある。

この章では応答変位法を応用して地盤バネと構造部位が降伏して非線形挙動となる解析手法について述べる。完全弾塑性型の降伏を前提とした解析解について紹介する。

5.2 地盤が降伏する問題

(1) 完全弾塑性のバイリニア計算

鈴木は軸変形に関してバイリニアモデルを定式化しているが、その方法に倣って曲げ変形を定式化する。地盤変位が小さいときには、曲げモーメントは地盤変位に比例して増加し、地盤変位が十分大きくなると地盤変位に関係なく曲げモーメントが一定値になる関係をバイリニアでモデル化する。地盤バネの条件は図 7 とする。すなわち、地盤変位とたわみの相対変位が A_g 以上では、地盤反力は一定値にする。比例区間の地盤バネ係数は K_n であり、降伏後は $K_n A_g$ となる。

波長 L の定常波入力を考える。図 8 上段にイメー

ジ図を示すが、地盤の振幅が降伏条件に達する前は、地盤変位とたわみ曲線は相似となる。地盤とはりの軸直角方向の相対変位が降伏条件 Δ_g になるときの地盤変位の振幅を Y_1 とする。このとき次式が成り立つ。

$$Y_1 - C_b Y_1 = \Delta_g$$

$$Y_1 = \frac{\Delta_g}{1 - C_b} = \frac{1}{4\pi^4} (4\pi^4 + (L\lambda_b)^4) \Delta_g \quad (18a, 18b)$$

次に図8下段に示すように半波長分の区間の地盤バネがすべて降伏して等分布力が反転して繰り返し作用する状態を考える。一定の波長において完全弾塑性型の地盤バネがすべての区間で降伏した状態が最大曲げモーメントとなる。この状態と曲げモーメントが地盤変位に比例して増加する状態を線形接続する。接続点の地盤変位を Y_2 とする。節となる位置をヒンジ支点と考えれば、長さ $L/2$ のはりに等分布力 $K_n \Delta_g$ が作用するモデルで計算できる。曲げモーメントのつり合いは

$$EI \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 C_b Y_2 = \frac{1}{32} K_n \Delta_g L^2 \quad (19a)$$

となり、このときの地盤変位の振幅は

$$Y_2 = \frac{(L\lambda_b)^4}{32\pi^2 C_b} \Delta_g = \frac{\pi^2}{8} Y_1 \quad (19b)$$

となる。 Y_2 は軸力の増加に地盤反力が抵抗できなくなる時の地盤変位となるが、波長、すべりを生じる相対変位、地盤ばねと曲げ剛性の比率から計算できる。線形に接続しているため、部分的に降伏していく状態よりも断面力は大きく計算される。

次に最大変位について分析する。バイリニア近似において比例区間を延長すると地盤変位 Y_2 におけるたわみは $C_b * Y_2$ となる。計算すると

$$C_2 Y_2 = \frac{(L\lambda_b)^4}{32\pi^2} \Delta_g \quad (20a)$$

となる。一方、全区間の地盤バネが降伏する条件での最大変位は長さ $L/2$ の単純はりで考えると

$$y_{\max} = \frac{5(L\lambda_b)^4}{1536} \Delta_g \quad (20b)$$

であり、およそ両者が一致する結果となる。異なる解析モデルを解析接続しているために、完全に一致はしないが、完全弾塑性型の地盤バネで支持された地下構造物の曲げ変形をおよそ追跡できるモデルとなっている。

2つの解析結果をグラフで示す。地盤変位が降伏し始める条件の Y_1 であるときの腹の位置での曲げモーメントを M_1 として無次元化する。

$$M_1 = \frac{K \Delta_g L^2}{8\pi^2} \quad (21)$$

であり、 Y_1 の計算式は式(18b)に示している。横軸は地盤変位の振幅 Y を地盤バネが降伏し始める Y_1 で無次元化している。地盤が降伏し始める条件は最大曲げモーメントのおよそ0.8倍となっている。

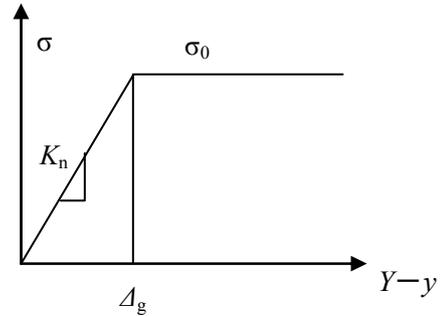


図7 地盤ばねの非線形モデル

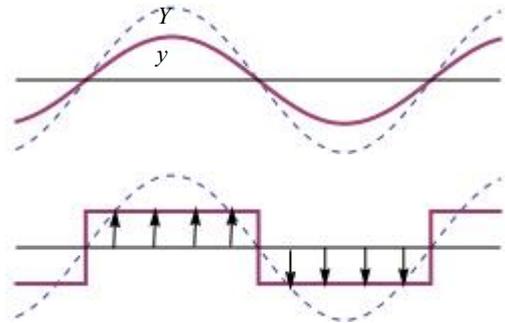


図8 はりの応答と最大荷重図

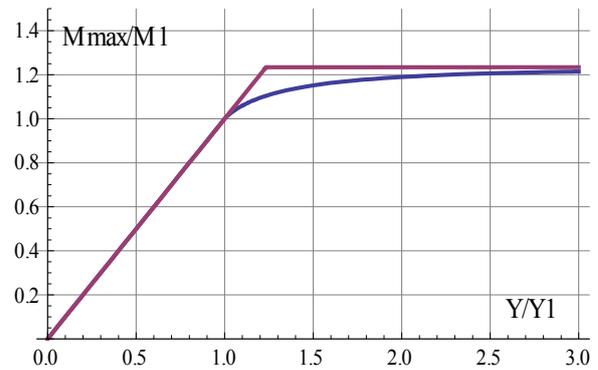


図9 地盤変位と最大曲げモーメントの関係

(2)部分的に地盤ばねが降伏する場合

Shinozuka & Koike は軸変形に関して、地盤変位の節と構造変位の節が一致し、地盤バネが降伏しても節の位置は変化しない条件を置いて、部分的に地盤バネが降伏する場合の軸力を計算する解析解を示している。この方法にならってある区間の地盤バネが完全降伏する場合の曲げモーメントを計算する。計算のイメージ図を図10に示している。地盤変位の振幅を Y 、波長を L とする。地盤バネの部分的な降伏

が始まる地盤変位を式(18b)で求めた Y_1 として、降伏する区間の開始位置 x_0 は

$$x_0 = \frac{L}{2\pi} \sin^{-1} \frac{Y_1}{Y} \quad (22)$$

となる。区間 $(x_0, L/2-x_0)$ では地盤バネが降伏するため、等分布力 $K_n \Delta_g$ が作用する。

せん断力は分布外力の1回積分で表わされる。腹となる $x=L/4$ ではせん断力 Q が0になることを用いて積分するとせん断力分布が求められる。

$$Q(0) = (1-C_b)K_n Y \int_0^{x_0} \sin \frac{2\pi x}{L} dx + K_n \Delta_g \left(\frac{L}{4} - x_0 \right)$$

$$Q(x) = \begin{cases} Q(0) - (1-C_b)K_n Y \int_0^x \sin \frac{2\pi x}{L} dx & (0 < x < x_0) \\ K_n \Delta_g \left(\frac{L}{4} - x \right) & (x_0 < x < L/4) \end{cases} \quad (23)$$

次に節の位置では曲げモーメントが0であることを用いてせん断力を積分し、腹となる $x=L/4$ での最大曲げモーメントを計算すると

$$M\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{K_n \Delta_g L^2}{8\pi^2} \left\{ 2 - \frac{4\pi x_0}{L} \sqrt{\left(\frac{Y}{Y_1}\right)^2 - 1} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{2\pi x_0}{L}\right)^2\right) \right\} \quad (24)$$

となる。波長が L である正弦波が作用するたわみ問題で、部分的に地盤ばねが降伏する時の曲げモーメントが上式より計算できる。

図9に式(24)で計算した曲げモーメントの増加グラフを示しているが、バイリニアのグラフは部分的な降伏を考えた解析解とよく一致している。

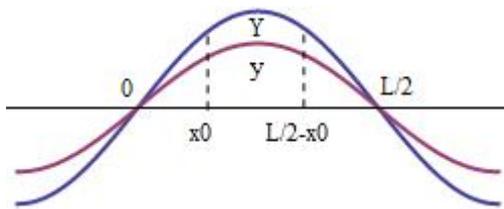


図10 地盤ばねの部分的な降伏のモデル図

5.2 構造部位が非線形となる問題

地盤変位による曲げ変形が大きくなると塑性ヒンジが形成される。管の材質と断面形状から決まる塑性モーメント M_p を用いて、ヒンジ解析を行う。構造部位の非線形モデルを図11に示す。曲率の増加に対して、曲げモーメントは2本の折れ線で表わされる挙動を仮定する。正弦波入力を仮定し、最大曲げモーメントは正弦波の腹の位置で発生するとき曲げモーメントの最大は

ーメントの最大は

$$M_{\max} = EIC_b \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 Y \quad (25)$$

で計算できる。最大モーメントとなる地盤変位の腹の位置において塑性モーメントに達するとヒンジが形成される。このとき完全弾塑性と仮定するとヒンジになる時の地盤変位 Y_p が計算できる。

$$Y_p = \frac{M_p}{EIC_b} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{\kappa_p}{C_b} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad (26)$$

すなわち構造条件の固有波数 λ_b と降伏曲率 κ_p と地盤変位波長からヒンジとなる条件が決まる。

塑性ヒンジが形成されるとたわみの方程式が変化する。周期境界条件が乱れて指数関数が関係するようになる。 $x=0$ の位置で曲げモーメントが最大となって塑性ヒンジができ、腹の部分が移動することなく変位が増大するとして方程式を解くと

$$y(x) = \begin{cases} \frac{4\pi^2 C_b Y - L^2 \kappa_p}{2(L\lambda_b)^2} e^{\lambda_b x} (\cos \lambda_b x - \sin \lambda_b x) + C_b Y \cos \frac{2\pi x}{L} & \text{ただし } x < 0 \\ \frac{4\pi^2 C_b Y - L^2 \kappa_p}{2(L\lambda_b)^2} e^{-\lambda_b x} (\cos \lambda_b x + \sin \lambda_b x) + C_b Y \cos \frac{2\pi x}{L} & \text{ただし } x > 0 \end{cases} \quad (27)$$

が得られる。 $x=0$ 以外の腹の位置では塑性ヒンジはできないものとして方程式解いている。計算は4章で述べた構造変化があるときの方法によっている。解の表記はわかりやすさのため、指数関数、三角関数を用いている。図12にたわみ曲線の変化を示している。たわみ曲線から塑性ヒンジが形成されてからの塑性ヒンジの位置でのたわみは

$$y(0) = C_b \left\{ Y + \frac{2\pi^2}{(L\lambda_b)^2} (Y - Y_p) \right\} \quad (28a)$$

となり、屈曲角 ϕ は

$$\phi = -\frac{8\pi^2 C_b}{L^2 \lambda_b} (Y - Y_p) \quad (28b)$$

の式から計算できる。塑性ヒンジ形成以降は、たわみ曲線が変化し、 $x=0$ で折れ曲がりが進展し、たわみが増大する。図3に C_b と $L\lambda_b$ の関係を示しているが、 C_b は増加関数になるため屈曲角 ϕ は増加関数と現象関数のかけ合わせとなり、特定の条件でピークを持つ増減となる。塑性ヒンジ形成以降のたわみの増加の模式図を図13に示している。

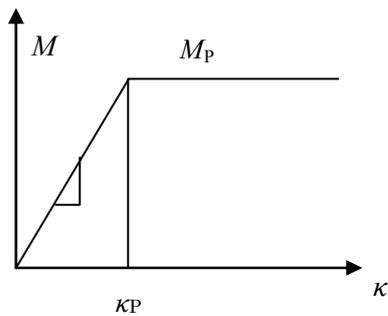


図 11 曲げ変形の完全弾塑性モデル

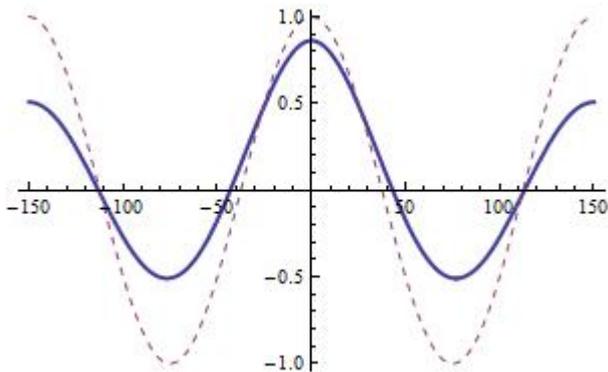


図 12 ヒンジ形成以降のたわみ曲線

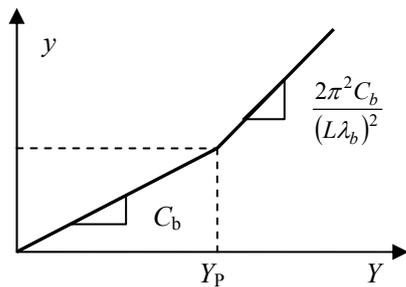


図 13 最大たわみの増加曲線

6. まとめ

多くの設計で採用されている応答変位法の計算手法を応用して、地中構造物の曲げ変形に関する計算方法を提案した。正弦波入力を進行波である正弦規

則波とし、自由端、固定端などの境界条件を考慮した解析解を示している。さらに構造条件が異なる箇所に対しても同様の計算手法で応答計算が行えることを示した。構造変化部で生じる断面力の増大を動的解析を用いなくても評価が可能となる。

またバイリニア近似を用いて、地盤バネの降伏や構造部位の降伏を解析解で追跡できることを示した。非線形挙動は稀に発生する地震動に対する構造設計において重視される。解析解を用いて概略の構造諸元を決めて、最終的に動的解析で安全評価を行う設計手法が望ましいと考える。L2 地震動で評価を行えば L1 地震動も包含するといして省略するケースもありうるが、変形特性を吟味して、複数の要求性能に応じて部材の仕様を設定するのが望ましい。正弦規則波を用いた解析手法と簡易な非線形計算は簡易評価のツールとして有用である。

正弦規則波による境界部の応答の定式化にはさまざまなバリエーションが考えられる。設計に有用な解析解についてさらに検討を進め報告する予定である。また完全弾塑性型のバイリニアモデルだけでなく、より扱いやすい形式についても研究を進める予定である。

参考文献

- 1) 高田至郎：ライフライン地震工学，共立出版，1991.
- 2) 大塚久哲：最新地中・基礎構造物の耐震設計，九州大学出版会，2008.
- 3) 土木学会：地下構造物の耐震性能照査と地震対策ガイドライン（案），土木学会，2011.
- 4) 鈴木崇伸：応答変位法による地中構造物の軸変形解析に関する一考察，土木学会地震工学論文集 Vol.30，2009.
- 5) 鈴木崇伸：非線形なばねで支持されたはりの近似解析法，土木学会論文集 No.689/ I -57,2001.
- 6) M. Shinozuka, T. Koike: Estimation of structural strains in underground lifeline pipes, Lifeline Earthquake Engineering-Buried Pipelines Seismic Risk, ASME, New York, 1979.

A Study on Rotational Deformation of Underground Structures Using Response Displacement Method

Takanobu SUZUKI

Response displacement method is used in seismic designing of underground structures. In both axial deformation and rotational deformation, special solutions of differential equation which are calculated by cyclic boundary, are available so as to be simple calculation. This report proposes conducts of boundary conditions of bending equation of beam on elastic springs and non-linear calculation method using bi-linear model which is applied to materials of beam and soil spring. Calculation with sinusoidal regular wave and bi-linear characteristics is useful for improvement of response displacement method.