

要素破壊の相関性を考慮したネットワーク 最大フロー評価のシミュレーション

能島 暢呂¹

¹岐阜大学工学部社会基盤工学科教授 (〒501-1193 岐阜市柳戸1-1)

E-mail:nojima@gifu-u.ac.jp

最大フローを指標としたライフラインの地震時ネットワーク機能評価において、ネットワーク要素破壊の相関性が及ぼす影響について考察した。まず相関を有する複数事象の結合事象の生起確率の数値計算解と効率的なシミュレーション・アルゴリズムについて述べた。その数値計算例として、3種類の小規模なネットワークモデルを対象として、要素の破壊事象の相関係数をパラメトリックに変化させ、最大フローの確率分布およびその期待値に及ぼす影響について検討した。並列システムでは最大フローの期待値は相関係数にほとんど影響を受けないが、確率分布は相関とともにばらつきが大きくなった。一方、直列システムの最大フローの期待値は相関係数に敏感であることが明らかとなった。

Key Words : *lifeline network, component failure, correlation, Monte Carlo simulation, effective algorithm, maximum flow*

1. はじめに

ライフライン地震災害の防止軽減策を検討するためには、ネットワークシステムの地震時機能性を適切に評価することが重要である。ノードとリンクでモデル化されるライフラインの構成要素の破壊がネットワーク機能に及ぼす影響を評価するため、要素の破壊確率に基づく確率論的なシステム信頼性解析の方法がよく用いられる。例えば筆者は、道路ネットワークの最大フローを指標とした方法を提案し、効果的なネットワーク信頼度向上を目的として、ライフライン要素の重要度解析を行った¹⁾。

こうした既往研究では、各要素の破壊事象を無相関すなわち確率統計的に独立と仮定する場合が多い。しかし近年では、要素破壊の相関性を考慮して、より高度な評価を行う必要性が指摘されている。例えばLee and Kiremidjian²⁾⁻³⁾は、道路ネットワークの地震リスク評価において、地震動および橋梁被害の相関を考慮する方法を提案し、総損失額評価や、連結信頼性評価、耐震化計画のための重要度評価などに及ぼす相関の影響について考察している。

ライフライン以外の地震防災分野でも相関を取り入れたリスク評価への要請は高まっている。特に、複数建物を扱うポートフォリオリスク評価においては、施設群の同時被害による損失分布特性の評価が重要となるが、そこでは地震動の空間相関や建物の耐力の相関が大きく影響するため、その評価法に関する研究が行われている⁴⁾⁻⁵⁾。また、ほとんどの原

子力発電サイトが複数プラントを有するわが国では、複数プラント間における耐力および応答の相関を考慮して、多数基立地サイトのための地震PSA手法を開発する必要性が指摘されている⁶⁾。日本原子力学会の確率論的安全評価手順⁷⁾でも、プラント間の損傷の相関係数を考慮した炉心損傷確率の解析例が示されている。実際に新潟県中越沖地震では、柏崎刈羽原子力発電所の全7基が機能停止した。複数施設の被害の相関性を考慮した地震リスク評価は重要性を増すものと考えられる。

以上のような背景のもとで本研究では、筆者による最大フローによるネットワーク機能評価¹⁾に再度焦点を絞り、地震時のネットワーク要素破壊の相関が最大フロー評価に及ぼす影響について考察することを目的としたものである。

まず基礎的事項として、2要素の機能関数に基づいて導かれる要素破壊事象の相関係数を示す。次に、相関を有する複数事象の結合事象の生起確率の数値計算解について述べる。さらに一般化された問題として、 n 次元正規分布の多重積分を行うための効率的なシミュレーション・アルゴリズムを紹介する。さらにそのアルゴリズムを応用した数値計算例として、小規模な3種類のネットワークモデル（直列・並列システム、3ルートシステム）において、要素間の相関係数をパラメトリックに変化させ、最大フローの確率分布およびその期待値に及ぼす影響について検討する。

2. 相関を有する要素群の同時破壊確率の評価

(1) 2要素の機能関数と要素破壊事象の相関係数

2つの要素 1, 要素 2 を考え, 作用する荷重と耐力を正規変量としてそれぞれ (荷重, 耐力) = (X_1, Y_1) および (X_2, Y_2) で表す. なお原変量が対数正規変量の場合は対数変換して正規変量としておく. それらの平均を $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \mu_{Y_1}, \mu_{Y_2}$, 標準偏差を $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \sigma_{Y_1}, \sigma_{Y_2}$, 荷重の相関係数を $\rho_{X_1 X_2} = \rho_X$, 耐力の相関係数を $\rho_{Y_1 Y_2} = \rho_Y$ とし, 荷重と耐力は無相関とする. 各要素の破壊を表す事象 E_1 および E_2 は, それぞれ機能関数 $g_1(X_1, Y_1) = Y_1 - X_1$ および $g_2(X_2, Y_2) = Y_2 - X_2$ の負領域で表され, その相関係数は次式で求められる.

$$\rho_{g_1 g_2} = \frac{\text{Cov}[g_1, g_2]}{\sigma_{g_1} \sigma_{g_2}} = \frac{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \rho_X + \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2} \rho_Y}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2} \sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2}} \quad (1)$$

(2) 相関を有する複数事象の結合事象の生起確率の数値計算解

相関がある場合, 要素 1 と要素 2 の両方が破壊する確率 $P[E_1 E_2] = P[g_1 < 0 \cap g_2 < 0]$ は解析的に求められない. 2次元正規分布 $f(x_1, x_2)$ に従う 2変量 X_1, X_2 に関して, $-\infty < X_1 \leq b_1$ および $-\infty < X_2 \leq b_2$ の重なり合う矩形領域で規定される 2重積分の問題は, 媒介変数 z を導入すれば 1次元の積分に帰着することが知られている⁸⁾.

$$P[E_1 E_2] = \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\sqrt{|\rho|}z + \alpha_1}{\sqrt{1-|\rho|}}\right) \Phi\left(\frac{\delta_\rho \sqrt{|\rho|}z + \alpha_2}{\sqrt{1-|\rho|}}\right) \phi(z) dz \quad (2)$$

ここに, $b_i = \Phi^{-1}(P[E_i])$,

$$\alpha_i = \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (i=1, 2), \quad \delta_\rho = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \geq 0 \\ -1 & \text{if } \rho < 0 \end{cases}$$

数値積分やモンテカルロ法では, 高次元になると多重積分の計算量が膨大となる. ただし, 事象の数が $n \geq 3$ でも, $\rho_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ ($i \neq j$), $\rho_{ii} = 1$ と書ける場合には, 上記と同様に媒介変数 z を導入すれば 1次元の積分に帰着する⁸⁾.

$$P[E_1 E_2 \cdots E_n] \\ = \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{b_2} \cdots \int_{-\infty}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (3) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{\sqrt{\lambda_i} z + \alpha_i}{\sqrt{1-\lambda_i}}\right) \phi(z) dz$$

ここに, $b_i = \Phi^{-1}(P[E_i])$, $\alpha_i = \frac{b_i - \mu_i}{\sigma_i}$ ($i=1, \dots, n$).

(3) n 次元正規分布の多重積分の数値計算解

Genz⁹⁾ は, n 次元正規分布の多重積分

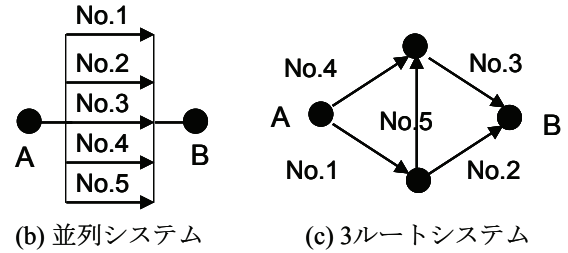
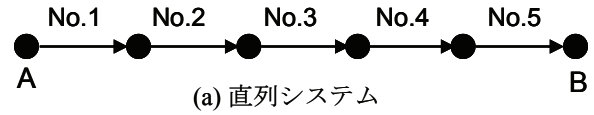


図-1 対象とするネットワーク

表-1 リンクの特性値

No.	リンク信頼度 Q_i	リンク容量 C_i
1	0.75	40
2	0.90	30
3	0.80	50
4	0.85	30
5	0.70	20

$$P[a, b] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (4)$$

を効率的なシミュレーションにより求めるアルゴリズムを提案した. 次に示す 3 回の変数変換によって積分領域を条件化することで, 重要サンプリング¹⁰⁾と同等の効果をj得るものである.

(i) コレスキー分解により無相関な変数に変換

(ii) 正規変換により被積分関数を一様分布に変換

(iii) 線形変換により積分領域を $[0, 1]$ に変換

(iv) $[0, 1]$ の一様乱数 $n-1$ 個でサンプル 1 つを生成

ここで毎回の試行で得られるのは, Hit-or-Miss のサンプルではなく確率の評価値であるので計算効率がよく, 低確率の場合にも精度良く確率を算出できるのが特徴である. 本研究では Nadarajah¹¹⁾ および Ambartzumian, et al.¹²⁾ に記載された確率評価値との比較を通じて, その精度と有効性を確認した.

3. ネットワーク最大フロー評価の数値計算例

図-1 に示す 5 リンクからなるネットワーク 3 種類におけるノード A~B 間の最大フロー問題に適用した数値計算例を示す. リンク特性としては表-1 に示すようにリンク信頼度 (非破壊確率) とリンク容量が与えられている.

図-1 (a) は直列システムで, 平常時の最大フローは最小リンクに規定されて 20 である. リンク破壊が生じると直ちに最大フローは 0 となる. 図-1 (b) は並列システムで, 平常時の最大フローは全リンク容量の総和にあたる 170 である. リンク欠損が生じるとその分だけ最大フローが減少する. また図-1

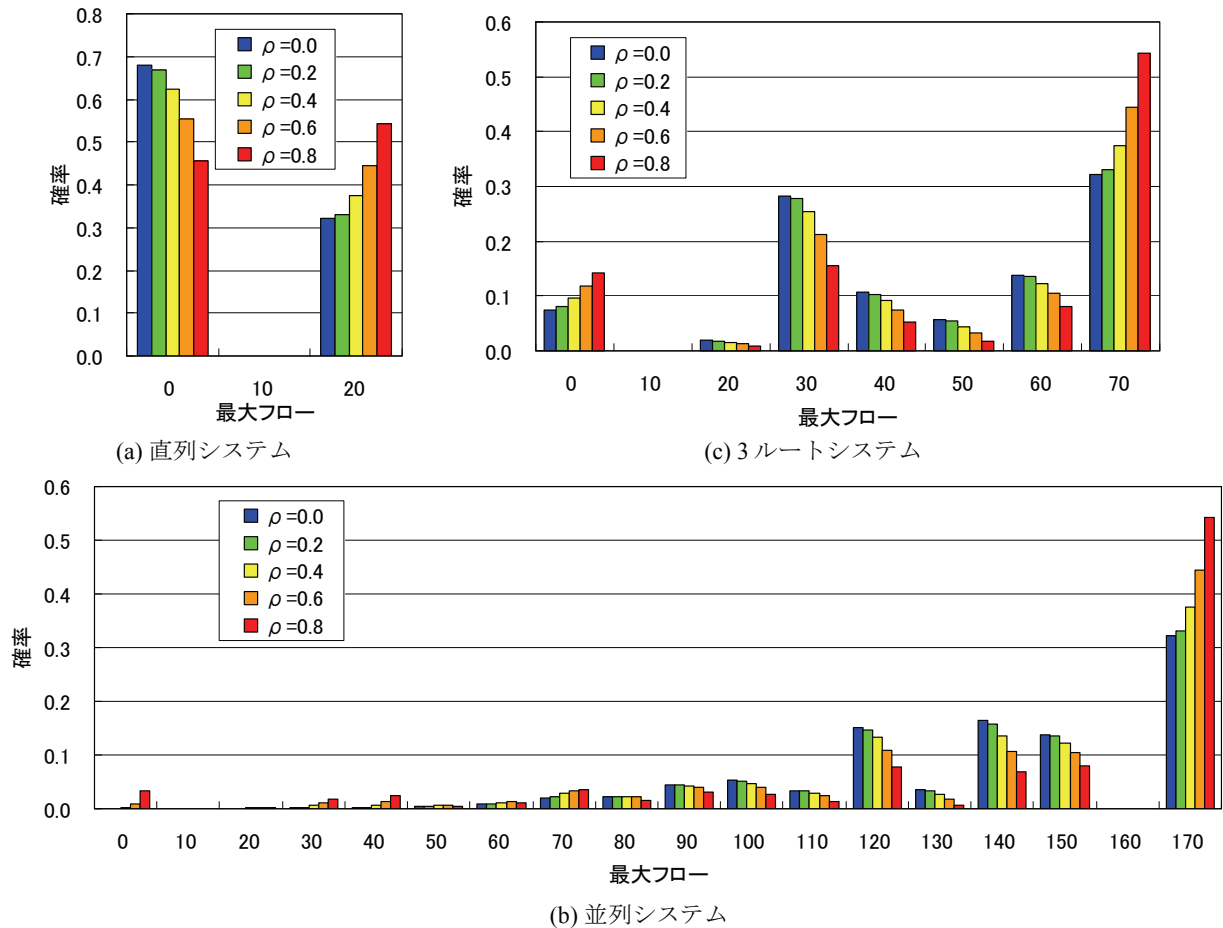


図-2 各ネットワークの最大フローの確率分布

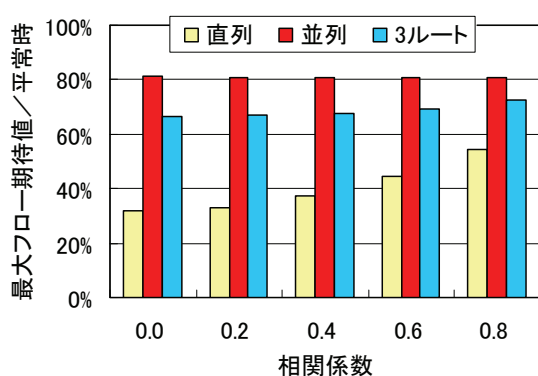


図-3 最大フローの期待値の平常時に対する比率

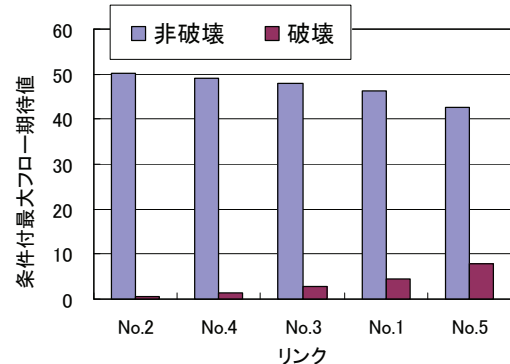


図-4 各リンクの非破壊・破壊を条件とした条件付の最大フロー期待値 (3 ルートシステム, $\rho=0.8$)

(c)ではノード A~B 間に 3 種類のルートがあるので、ここでは 3 ルートシステムと呼ぶ。平常時の最大フローは 70 である。相関係数については、全リンクで一様として、 $\rho = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ とパラメトリックに変化させた。この設定では式(3)による評価も可能であるが、ここでは Genz のアルゴリズムを用いてシミュレーションを行った。すなわち $a_i = -\infty$, $b_i = \Phi^{-1}(1-Q_i)$ として、相関する 5 次元標準正規変量の 2^5 種類の積分領域をリンク破壊パターンに対応させた。試行回数は 10000 回とし、確率の推定値の変動係数が 1% 以下で試行打ち切った。

図-2 に最大フローの確率分布の結果を示す。図-

2 (a)の直列システムでは、フローの保持には全リンクの非破壊が必須である。リンク間の相関が高いほど全リンクが同時に被災を免れる可能性が高くなるため、 $\rho=0.8$ の場合に最良の結果となっている。

図-3 に示すように、最大フローの期待値は相関係数に対して敏感である。全要素が一体となって機能を保持するというシステムの特徴が現れている。

図-2 (b)の並列システムでは最大フローのとりうる値は 15 種類存在する。ここでも $\rho=0.8$ で平常時最大フローを保ちうる確率が最大となっているが、分布のばらつきは大きく、最大フローが 0 となる確

率が最大なのもやはり $\rho=0.8$ である。相関が高いほど分布のばらつきは大きく、相関が低いほど分布のばらつきは小さい。また最大フローの期待値(図-3)は相関係数の影響をほとんど受けていない。

図-2 (c)の3ルートシステムでは最大フローは7種類の値をとりうる。平常時の最大フロー70を保ちうるのは全リンク無被害の場合で、最大フローが0となるミニマルカットセットは(No. 1, 4), (No. 2, 3), (No. 1, 3), (No. 2, 4, 5)の4つである。いずれのケースにおいても $\rho=0.8$ で確率が最大となり、並列システムと同様の傾向が現れている。相関係数が大きいほど最大フローの期待値(図-3)は大きくなっているが、直列システムほどの差は見られない。

図-4 は、各リンクの非損傷・損傷を条件とした条件付の最大フロー期待値(3ルートシステム)である。両者の差は各リンクの破壊がシステム機能に及ぼす影響の大きさを表す重要性を表し、非破壊確率の大きな順となっている。

4. 結 語

本研究では、ネットワーク要素破壊の相関性が地震時ネットワーク機能評価に及ぼす影響について考察した。今回は最大フローを評価指標としたが、連結信頼度や最短距離を指標とした評価などにも応用可能である。今後、シナリオ地震の設定から、地震動および要素の耐力の相関評価、ネットワーク機能評価に至る一貫した流れで適用する方針である。なお現実的な規模のシステムを対象とする場合には、状態列挙法とモンテカルロ法とを組み合わせる効率化¹⁾を図るなどの検討の余地があろう。

謝辞：(独)原子力安全基盤機構の亀田弘行 技術顧問および耐震安全部・解析評価部の皆様には、有益なご助言をいただきました。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Nojima, N.: Performance-Based Prioritization for Upgrading Seismic Reliability of a Transportation Network, *Journal of Natural Disaster Science*, Vol.20, No.2, pp.57-66, 1999.
- 2) Lee, R. and Kiremidjian, A. S.: A Loss Analysis Method and Evaluation for Correlated Bridges in a Transportation Network, *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, Geneva, Switzerland, Paper No.1663, Sept. 2006.
- 3) Lee, R. and Kiremidjian, A. S.: Uncertainty and Correlation for Loss Assessment of Spatially Distributed Systems, *Earthquake Spectra*, Vol.23, Issue 4, pp.753-770, Nov. 2007
- 4) 林 孝幸・福島誠一郎・矢代晴実：地震動強度の空間的な相関がポートフォリオの地震リスクに与える影響，日本建築学会構造系論文集，第 600 号，pp.203-210，2006.2.
- 5) 中村孝明：相関を考慮した建物群の地震損失確率関数の評価，日本建築学会構造系論文集，第 73 巻，第 623 号，pp.49-56，2008.1.
- 6) Hakata, T.: Seismic PSA method for Multiple Nuclear Power Plants in a Site, *Reliability Engineering and System Safety*, No.92, pp.883-894, 2007.
- 7) (社)日本原子力学会：原子力発電所の地震を起因とした確率論的安全評価手順：2007 (AESJ-SC-P006:2007)，2007.10.
- 8) Tong, Y. L.: *The Multivariate Normal Distribution*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag New York Inc., 271p., 1990.
- 9) Genz, A.: Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities, *Journal of Computing Graph Stat.* 1, pp.141-149, 1992.
- 10) Melchers, R. E.: *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Second Edition, Appendix C: Bivariate and Multivariate Normal Integrals, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, pp.386-400, 1999.
- 11) Nadarajah, S.: On the Approximations for Multinormal Integration, *Computers & Industrial Engineering*, Vol.54, pp.705-708, April 2008.
- 12) Ambartzumian, R., Der Kiureghian, A., Ohanian, V., and Sukiasian, H.: Multinormal Probability by Sequential Conditioned Importance Sampling: Theory and Application, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.13, pp.299-308, 1998.

SIMULATION AND EVALUATION OF NETWORK MAXIMUM FLOW UNDER CORRELATED COMPONENT FAILURES

Nobuoto NOJIMA

This study explores the effects of correlated component failures on post-earthquake network functionality, specifically, probability distributions of the maximum flow between a given origin-destination pair on the affected network. Numerical methods and an effective algorithm to evaluate the joint probability of correlated component failures are introduced. Examples are shown for small-sized representative models such as series and parallel systems. The distribution of maximum flow for a parallel system shows a longer tail with increasing correlation, although the expected value of that does not vary much. On the other hand, the expected value for a series system is sensitive to the correlation.