

非定常地震応答の自乗平均値の 積分値の簡易推定法

青木 繁¹・深野 あづさ²

¹東京都立産業技術高等専門学校教授 ものづくり工学科(〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40)
E-mail:aoki@Tokyo-tmct.ac.jp

²東京都立産業技術高等専門学校准教授 ものづくり工学科(〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40)

地震入力を受ける構造物の応答は地震波自体が非定常不規則過程であるために、非定常不規則過程となる。このような場合に応答の自乗平均値を解析的に求めることは困難であることが多い。本研究では、応答の自乗平均値を定常確率過程論を用いて求める近似解法を提案した。解析モデルとして、1自由度系および2自由度系(主構造物系に設置されている付加構造物系のモデル)を用いて、提案した手法の有効性について検討した。入力として、定常確率過程に包絡関数を乗じることによって得られる模擬地震波を用いた。多くのパラメータを用いて計算した結果、応答の自乗平均値の積分値が厳密解と一致することを明らかにした。

Key Words : Nonstationary Random Vibration, Envelope Function, Mean Square Value, Earthquake Excitation, Energy

1. はじめに

構造物の地震応答は、地震波自体が非定常特性をもつために、非定常不規則過程となる。このような応答の統計的特性を表す代表として自乗平均値がある¹⁾。構造物の応答の自乗平均値はエネルギーとも関連している。地震応答のエネルギーは、地震動入力を受ける構造物の吸収エネルギーや累積損傷を評価するために用いられる²⁾。構造物の非定常応答の自乗平均値を理論的に求める方法は複雑であるため、近似計算法が用いられることがある^{3,4)}。

本論文では、地震動入力として、定常白色雑音に振幅非定常特性を表す包絡関数を乗じて得られる非定常白色雑音を用いた。構造物の基本的なモデルとして1自由度系を用いた。さらに、建物などの主構造物系に設置されている機器・配管・機械設備などの付加構造物系の応答について検討するために2自由度系を用いた。比較的容易に求まる定常応答を用いた近似解法を提案し、応答の自乗平均値の積分値を求めた。その結果、近似解は厳密解と一致することが明らかになった。

構造物の基本的なモデルとして図-1に示す1自由度系を用いた。図中の m は質量、 c は減衰係数、 k はばね定数、 x は質点の絶対変位、 y は地表面の絶対変位を表す。質点と地表面の間の相対変位 $z(x-y)$ に関する運動方程式は、

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2z = -\ddot{y} \quad (1)$$

ここで、 $\zeta(c/2\sqrt{mk})$ は減衰比、 $\omega_n(\sqrt{k/m})$ は固有円振動数を表す。 \cdot は時間 t に関する微分を表す。入力地震動 $\ddot{y}(t)$ としては、次式で与えられる非定常白色雑音を用

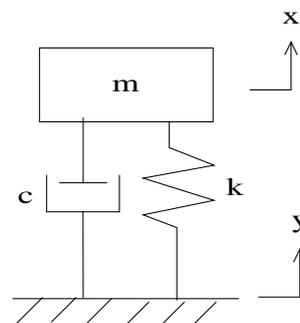


図-1 1自由度系

2. 1自由度系の解析法

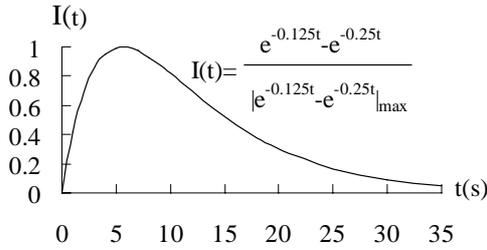


図2 包絡関数

いた．

$$\ddot{y}(t) = I(t)s_y(t) \quad (2)$$

ここで， $I(t)$ は地震動の非定常振幅特性を表す包絡関数， $s_y(t)$ は定常白色雑音を表す．包絡関数は次式で示される関数⁵⁾を用いた．

$$I(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{|e^{-at} - e^{-bt}|_{lmax}} \quad (3)$$

本論文では $a=0.125$ ， $b=0.25$ とした．その包絡関数を図-2 に示す．

(1) 非定常解析

相対変位 z の応答の自乗平均値は次式で与えられる自己相関関数から求まる⁶⁾．

$$R_z(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, t_1)G^*(\omega, t_2)S_0 d\omega \quad (4)$$

ここで， $G(\omega, t)$ は次式で与えられる．

$$G(\omega, t) = \int_0^t h(t-\xi)I(\xi)e^{i\omega\xi} d\xi \quad (5)$$

ここで，

$$h(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right) \quad (6)$$

$G^*(\omega, t)$ は $G(\omega, t)$ の共役複素数であり， S_0 は式(2)における定常白色雑音のパワースペクトル密度を表す．また， $i = \sqrt{-1}$ である．相対速度 \dot{z} の自己相関関数および相対変位と相対速度の相互相関関数は⁶⁾，

$$R_{\dot{z}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_z(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (7)$$

相対変位の自乗平均値 $\sigma_z^2(t)$ および相対速度の自乗平均値 $\sigma_{\dot{z}}^2(t)$ は次式から求まる．

$$\sigma_z^2(t) = R_z(t, t) \quad (8)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = R_{\dot{z}}(t, t) \quad (9)$$

(2) 定常近似

式(4)の積分で $I(t)$ が ω に独立であるとする， $\sigma_z^2(t)$

および $\sigma_{\dot{z}}^2(t)$ は，

$$\sigma_z^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(\omega)|^2 d\omega \quad (10)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega \quad (11)$$

ここで，

$$H_d(\omega) = \frac{-1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega i} \quad (12)$$

$$H_v(\omega) = \frac{-\omega i}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega i} \quad (13)$$

式(10)および式(11)の積分は定常応答に対するものであり，それぞれ次式のようになる．

$$\sigma_z^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} \quad (14)$$

$$\sigma_{\dot{z}}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} \quad (15)$$

式(14)および式(15)は，式(4)を用いて式(8)および式(9)を用いる場合と比較して簡便である．式(10)および式(11)の近似が適切であるならば非定常不規則振動解析が容易となる．本論文では，式(14)および式(15)で得られた値を近似解，式(4)を用いて式(8)および式(9)で得られた値を厳密解とよぶことにする．

応答の自乗平均値の時間に関する0から無限大までの積分値は次式で表される．

$$I_z = \int_0^{\infty} \sigma_z^2(t) dt \quad (16)$$

近似解を用いると， I_z は次式のようになる．

$$I_z = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)\left(|e^{-at} - e^{-bt}|_{lmax}\right)^2} \frac{\pi}{2\zeta\omega_n^3} S_0 \quad (17)$$

相対速度に対しては，

$$I_{\dot{z}} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)\left(|e^{-at} - e^{-bt}|_{lmax}\right)^2} \frac{\pi}{2\zeta\omega_n} S_0 \quad (18)$$

(3) 解析結果

式(8)の相対変位の自乗平均値については，式(4)の積分を式(5)を用いて数値的に積分することにより求めた．

表-1 1自由度系の応答の自乗平均値の積分値 ($T_n=1.0s$)

ζ	変位応答($m^2 \cdot s$)		速度応答($m^2/s^2 \cdot s$)	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解
0.01	6.75	6.75	2.66×10^2	2.67×10^2
0.02	3.38	3.38	1.33×10^2	1.33×10^2
0.05	1.35	1.35	5.31×10	5.33×10

表-2 1自由度系の応答の自乗平均値の積分値 ($\zeta=0.01$)

$T_n(s)$	変位応答($m^2 \cdot s$)		速度応答($m^2/s^2 \cdot s$)	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解
0.2	5.40×10^{-2}	5.40×10^{-2}	5.31×10	5.33×10
0.5	8.44×10^{-1}	8.44×10^{-1}	1.33×10^2	1.33×10^2
0.8	3.46	3.46	2.13×10^2	2.13×10^2
1.0	6.75	6.75	2.66×10^2	2.67×10^2

式(9)の相対速度の自乗平均値については式(7)の偏微分を数値的に計算して求めた。

表1に固有周期 $T_n(2\pi/\omega_n)$ を1.0sに固定し、減衰比 ζ を変化させた場合の結果を示す。表2に減衰比 ζ を0.01に固定し、固有周期 T_n を変化させた場合の結果を示す。表1および表2から、近似解は厳密解とほぼ一致することが明らかになった。

3. 2自由度系の解析法

建物などの主構造物系に設置されている機器・配管・機械設備などの付加構造物系の応答について検討するために、図-3に示す2自由度系を用いた。このモデルでは付加構造物系(上の系)と主構造物系(下の系)をそれぞれ1自由度系でモデル化している。付加構造物系と主構造物系の相対変位 $z_s(x_s-x_p)$ および主構造物系と地盤の相

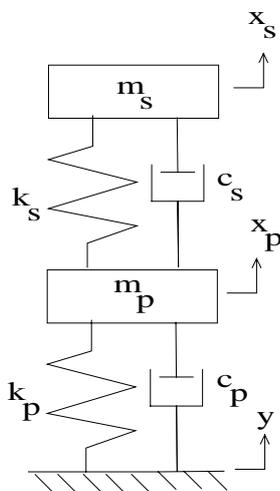


図-3 付加構造物系の力学モデル

対変位 $z_p(x_p-y)$ は次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_s + 2\zeta_s \omega_s (1+\gamma) \dot{z}_s + \omega_s^2 (1+\gamma) z_s - 2\zeta_p \omega_p \dot{z}_p - \omega_p^2 z_p &= 0 \\ \ddot{z}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{z}_p + \omega_p^2 z_p - \gamma (2\zeta_s \omega_s \dot{z}_s + \omega_s^2 z_s) &= -\ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $\zeta_s (= c_s / (2\sqrt{m_s k_s}))$ および $\zeta_p (= c_p / (2\sqrt{m_p k_p}))$ はそれぞれ付加構造物系および主構造物系の減衰比、 $\omega_s (= \sqrt{k_s / m_s})$ および $\omega_p (= \sqrt{k_p / m_p})$ はそれぞれ付加構造物系および主構造物系の固有円振動数、 $\gamma (= m_s / m_p)$ は付加構造物系と主構造物系の質量比を表す。

(1) 非定常解析

ここでは付加構造物系と主構造物系の相対変位 z_s および相対速度 \dot{z}_s に着目する。相対変位 z_s の応答の自乗平均値は次式で与えられる自己相関関数から求まる。

$$R_{z_s}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} G_s(\omega, t_1) G_s^*(\omega, t_2) S_0 d\omega \quad (20)$$

ここで、 $G_s(\omega, t)$ は非定常不規則過程に対するパワースペクトル密度関数である。 $G_s^*(\omega, t)$ は $G_s(\omega, t)$ の共役複素関数である。

$$G_s(\omega, t) = \int_0^t h_s(t-\xi) I(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \quad (21)$$

ここで、 $h_s(t)$ は相対変位応答に対する単位インパルス応答関数を表す。

相対変位 z_s の自乗平均値は

$$\sigma_{z_s}^2(t) = R_{z_s}(t, t) \quad (22)$$

式(20)の積分は複雑である。応答の二乗平均値はモーメント方程式を解くことによって得られる。運動方程

式を次式のような状態方程式で表す．

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (23)$$

ここで，

$$\mathbf{z}^T = \{z_p \quad z_s \quad \dot{z}_p \quad \dot{z}_s\} \quad (24)$$

$$\mathbf{f}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -\ddot{y}\} \quad (25)$$

2次モーメントに関するモーメント方程式は次式で得られ⁷⁾，10元連立1階微分方程式となる．

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{G}^T + \mathbf{D} \quad (26)$$

ここで，

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & a_4 & -a_1 & a_3 \\ a_2 & -a_6 & a_1 & -a_5 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで， $a_1 = 2\zeta_p\omega_p$ ， $a_2 = \omega_p^2$ ， $a_3 = 2\zeta_s\omega_s\gamma$ ， $a_4 = \omega_s^2\gamma$ ， $a_5 = 2\zeta_s\omega_s(1+\gamma)$ ， $a_6 = \omega_s^2(1+\gamma)$ となる．さらに，

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_p}^2 & \kappa_{z_p z_s} & \kappa_{z_p \dot{z}_p} & \kappa_{z_p \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p z_s} & \sigma_{z_s}^2 & \kappa_{\dot{z}_p z_s} & \kappa_{z_s \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p \dot{z}_p} & \kappa_{\dot{z}_p z_s} & \sigma_{\dot{z}_p}^2 & \kappa_{\dot{z}_p \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p \dot{z}_s} & \kappa_{z_s \dot{z}_s} & \kappa_{\dot{z}_p \dot{z}_s} & \sigma_{\dot{z}_s}^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi S_0 \{I(t)\}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

(2) 定常近似

式(20)の積分で $I(t)$ が ω に独立であると仮定すると，相対変位応答および相対速度応答に対する自乗平均値はそれぞれ次式で与えられる．

$$\sigma_{z_s}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(\omega)| d\omega \quad (30)$$

$$\sigma_{\dot{z}_s}^2(t) = \{I(t)\}^2 S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_v(\omega)| d\omega \quad (31)$$

ここで， $H_s(\omega)$ および $H_v(\omega)$ はそれぞれ入力に対する付加構造物系の相対変位および相対速度に関する周波数応答関数で表す．この場合に， $H_s(\omega)$ は次式で表される．

$$H_s(\omega) = \frac{R_s(\omega)}{R_m(\omega)} \quad (32)$$

$$H_v(\omega) = \frac{R_v(\omega)}{R_m(\omega)} \quad (33)$$

ここで，

$$\begin{aligned} R_m(\omega) = & \omega^4 - \{2\zeta_p\omega_p + 2\zeta_s\omega_s(1+\gamma)\}\omega^3 i \\ & - \{\omega_p^2 + \omega_s^2(1+\gamma) + 4\zeta_p\zeta_s\omega_p\omega_s\}\omega^2 \\ & + (2\zeta_p\omega_p\omega_s^2 + 2\zeta_s\omega_s\omega_p^2)\omega i + \omega_p^2\omega_s^2 \end{aligned} \quad (34)$$

$$R_s(\omega) = -(2\zeta_p\omega_p\omega i + \omega_p^2) \quad (35)$$

$$R_v(\omega) = -(2\zeta_p\omega_p\omega^2 + \omega_p^2\omega i) \quad (36)$$

式(30)および式(31)の積分は定常不規則過程に対するものである．この積分は次の行列式を用いて計算することができる⁷⁾．

$$I_4 = \frac{\pi}{\lambda_4} \frac{\begin{bmatrix} \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{bmatrix}} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = 1 \\ \lambda_3 = 2\zeta_p\omega_p \\ \lambda_2 = \omega_p^2 + \omega_s^2(1+\gamma) + 4\zeta_p\zeta_s\omega_p\omega_s \\ \lambda_1 = 2\zeta_s\omega_s\omega_p^2 + 2\zeta_p\omega_p\omega_s^2 \\ \lambda_0 = \omega_s^2\omega_p^2 \end{cases} \quad (38)$$

式(30)に対して，

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_1 = (2\zeta_p\omega_p)^2, \quad \xi_0 = \omega_p^4 \quad (39)$$

式(31)に対して，

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_2 = (2\zeta_p\omega_p)^2, \quad \xi_1 = \omega_p^4, \quad \xi_0 = 0 \quad (40)$$

したがって，たとえば変位応答の自乗平均値は次式のようになる．

$$\sigma_{z_s}^2(t) = \{I(t)\}^2 I_4 S_0 \quad (41)$$

式(30)および式(31)は，式(20)または式(26)を用いる場合と比較して簡便である．式(30)および式(31)の近似が適切であるならば非定常不規則振動解析が容易となる．本論文では，式(30)および式(31)で得られた値を近似解，式(26)を用いて得られた値を厳密解とよぶことにする．

変位応答の自乗平均値の時間に関する0から無限大までの積分値は次式で表される．

$$I_{z_s} = \int_0^{\infty} \sigma_{z_s}^2(t) dt \quad (42)$$

表-3 付加構造物系の応答の自乗平均値の積分値 ($\gamma=0, \zeta_p=0.05, T_s=T_p=1.0s$)

ζ_s	変位応答($m^2 \cdot s$)		速度応答($m^2/s^2 \cdot s$)	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解
0.01	5.70×10^2	5.70×10^2	2.24×10^4	2.20×10^4
0.02	2.45×10^2	2.45×10^2	9.62×10^3	9.43×10^3
0.05	6.89×10	6.89×10	2.69×10^3	2.64×10^3

表-4 付加構造物系の応答の自乗平均値の積分値 ($\gamma=0, \zeta_s=0.01, \zeta_p=0.05$)

$T_s=T_p(s)$	変位応答($m^2 \cdot s$)		速度応答($m^2/s^2 \cdot s$)	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解
0.2	4.56	4.56	4.49×10^3	4.40×10^3
0.5	7.12×10	7.12×10	1.12×10^4	1.10×10^4
0.8	2.92×10^2	2.92×10^2	1.80×10^4	1.76×10^4
1.0	5.70×10^2	5.70×10^2	2.24×10^4	2.20×10^4

表-5 付加構造物系の応答の自乗平均値の積分値 ($\zeta_s=0.01, \zeta_p=0.05, T_s=T_p=1.0s$)

γ	変位応答($m^2 \cdot s$)		速度応答($m^2/s^2 \cdot s$)	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解
0	5.70×10^2	5.70×10^2	2.24×10^4	2.20×10^4
0.01	9.61×10	9.61×10	3.74×10^3	3.67×10^3
0.02	5.30×10	5.30×10	2.04×10^3	2.00×10^3
0.05	2.32×10	2.32×10	8.64×10^2	8.47×10^2

近似解を用いると、 I_{z_s} は式(39)を用いて次式のようになる。

$$I_{z_s} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b) \left(\left| e^{-at} - e^{-bt} \right|_{\max} \right)^2} I_4 S_0 \quad (43)$$

相対速度の時間に関する積分は

$$I_{z_s} = \int_0^{\infty} \sigma_z^2(t) dt \quad (44)$$

近似解は、式(40)を用いて、

$$I_{z_s} = \frac{(a-b)^2}{2ab(a+b) \left(\left| e^{-at} - e^{-bt} \right|_{\max} \right)^2} I_4 S_0 \quad (45)$$

(3) 解析結果

付加構造物系の応答は固有周期が主構造物系のそれと一致するときに大きく増幅される。この条件 ($T_s=T_p$) での結果を示す。

表-3、表-4および表-5にそれぞれ付加構造物系の減衰比 ζ_s 、両構造物系の固有周期 ($T_s=T_p$) および付加構造物系と主構造物系の質量比 γ を変化させた場合の付加構造物系の応答の自乗平均値の積分値を示す。速度応答に関しては近似解が厳密解よりやや小さくなる傾向があるが、全体に近似解は厳密解とほぼ一致することが明らかになった。

4. まとめ

地震動入力として、定常白色雑音に振幅非定常特性を表す包絡関数を乗じて得られる非定常白色雑音を用いた。構造物の基本的なモデルとして1自由度系を用いた。さらに、建物などの主構造物系に設置されている機器・配管・機械設備などの付加構造物系の応答について検討するために2自由度系を用いた。比較的容易に求まる定常応答を用いた近似解法を提案し、応答の自乗平均値の積分値を求めた。その結果、近似解は厳密解と一致することが明らかになった。

参考文献

- 1) Clough, R.W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures (Second edition), McGraw-Hill, New York, 1993.
- 2) Soong, T.T. and Dargush, G.F. : Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- 3) Hasselman, T., Probabilistic Displacement Time History of a Single-Degree-of-Freedom System, Proceedings of ASCE, Engineering Mechanics Division, Vol.98, No.6, pp.519-530, 1972.
- 4) Bucher, C.G., Approximate Nonstationary Random Vibration Analysis for MDOF Systems, Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.51, No.No.1, pp.197-200, 1988.
- 5) Shinozuka, M. and Sato, Y.m, Simulation of Nonstationary Random Process, Proceedings of ASCE, Engineering Mechanics Division, No.EM1, Feb.,

SIMPLIFIED ESTIMATION METHOD OF INTEGRAL OF MEAN SQUARE VALUE OF NONSTATIONARY SEISMIC RESPONSE

Shigeru AOKI and Azusa FUKANO

The response of the structure subjected to earthquake excitation is nonstationary random process because earthquake excitation is nonstationary random process. In such a case, it is usually difficult to obtain mean square value of the response analytically. In this paper, an approximate method to obtain mean square value of the response using stationary random process. Using single-degree-of-freedom system and two-degree-of-freedom system, the effectiveness of the proposed method. It is shown that the proposed method gives exact value of integral of mean square value of the response for various values of parameters.