

理論誤差を指標とした損傷同定のための 最適計器配置・最適起振振動数の決定手法

古川愛子¹・大塚久哲²

¹正会員 博(工) 九州大学大学院 助教 工学研究院 建設デザイン部門(〒 819-0395 福岡市西区元岡 744) E-mail: furukawa@doc.kyushu-u.ac.jp ²正会員 工博 九州大学大学院 教授 工学研究院 建設デザイン部門(〒 819-0395 福岡市西区元岡 744) E-mail: otsuka@doc.kyushu-u.ac.jp

本研究は,連立方程式の理論誤差に基づき,モデル化誤差と計測ノイズの影響下で精度よい損傷同定結果を 得るための最適計器配置および最適起振振動数の決定方法を提案するものである.連立方程式の係数行列の条 件数が小さい計器配置および起振振動数を選択すれば,精度よい同定結果が期待できる.既に筆者らによって 提案されたマイクロ起振器を用いた損傷同定手法を対象としたが,他の振動データを用いた同定手法にも適用 が可能である.片持ち梁を利用した数値シミュレーションを通して,理論誤差に与える計器配置・起振振動数 の影響を調べた.検討結果を踏まえ,最適計器配置・最適起振振動数の決定方法を提案し,3層フレームを用い て提案手法の有効性の検証を行った.

Key Words : damage identification, optimal sensor placement, optimal excitation frequencies, theoretical error, simultaneous equation

1. はじめに

大地震に備えて一刻も早い耐震補修・補強の実施が 叫ばれている現在,構造物の損傷の評価や,さらには 使用限界までを含めた健全度を判定する技術が求めら れている.次の大地震に備えて各種構造物の耐震診断・ 耐震改修を促進することは管理者の責務であり,その 為にも構造物の健全度を評価する簡易なシステムの構 築は急務である.このような背景の下,振動特性の変 化を利用した構造物の損傷検出に関する研究は過去数 多く行われている.

筆者らは,マイクロ起振器を用いた損傷同定手法の 開発を行ってきた¹⁾.筆者らの提案手法では,異なる 計器配置と起振振動数の組み合わせ毎に,部材の剛性 低下率と減衰増加率を求めるための方程式が成立する. 計器配置・起振振動数の組み合わせを様々に変えて振 動データを蓄積することで連立方程式を構築し,剛性 低下率と減衰増加率を求めることができる.

同定に用いる振動データの種類は異なっていても、こ のように計測データを蓄積して連立方程式を構築し、損 傷を同定するという手法は数多い^{2),3)}.連立方程式に基 づく多くの損傷同定手法において、現状では、同定に 用いる振動データの選定は任意である.どのように計 器を配置し、どのような振動データを集めて連立方程 式を構築すればよいのかについては、数値実験により 同定精度を比較している程度であり、理論的に検討を 行った研究は例が無い.

損傷同定を困難にする原因の中に,モデル化誤差と 計測ノイズの問題がある.既往の研究では,確率論に基 づいた解決が主流である^{4),5)}.他の解決手法としては, 同定に用いる振動データに前処理を施して,ノイズの 取り除かれたデータを用いて同定を行なうことで,同 定精度を向上しようというものがある^{6),7)}.

以上から,信頼性の高い振動データの選定方法(連 立方程式の構築方法)の確立が重要であり,またモデ ル化誤差・計測ノイズの影響を考慮することが必要で あると考えられる.これに対し,本研究は,マイクロ 起振器を用いた同定手法を対象とし,最適計器配置お よび最適起振振動数の決定手法を提案するものである. 「最適」とは「モデル化誤差・計測ノイズの影響下で精 度良い結果が期待できる」という意味であり,連立方 程式の解に含まれる理論誤差に基づき,理論誤差が小 さくなる計器配置・起振振動数を「最適」と見なす.

片持ち梁を利用した数値シミュレーションを通して, 理論誤差に与える計器配置・起振振動数の影響を調べた.検討結果を踏まえ,最適計器配置・最適起振振動 数の決定方法を提案した.そして,3層フレーム構造物 に対し,提案手法に基づいて選択された最適計器配置・ 最適起振振動数を用いて損傷同定を行い同定精度を確 認することで,提案手法の有効性を示すことができた. 提案手法は,他の同定手法であっても,連立方程式を 構築するタイプの手法であれば適用が可能である. 2. 損傷同定手法

(1) 損傷のモデル化

構造物の損傷は,剛性および減衰の変化を伴うと考 えられる.本研究では,剛性が低下した要素を損傷箇 所とみなし,その減少割合を損傷の指標として用いる. また,構造物の質量は損傷前後で不変と仮定する.

構造物全体系の剛性・減衰マトリクス(K,C)は,各 要素の剛性・減衰マトリクスの集合体として次式のようにモデル化できる.

$$K = \sum_{e=1}^{n} K^{e} \qquad C = \sum_{e=1}^{n} C^{e}$$
(1)

ここで, n は梁要素の総数であり, K^e , C^e は e 番目の梁 要素の剛性・減衰マトリクスである.損傷により e 番 目の梁要素の剛性マトリクスが δk_e (無次元)の割合で減 少し,減衰マトリクスが δc_e (無次元)の割合で増加した とすると,全体剛性・減衰マトリクスの変化量は,

$$\delta K = \sum_{e=1}^{n} \delta k_e K^e \qquad \delta C = \sum_{e=1}^{n} \delta c_e C^e \tag{2}$$

となる.剛性低下率 δk_e および減衰増加率 δc_e が同定の 対象となるパラメータである.

(2) 損傷前の構造物の応答

損傷前の周波数領域における運動方程式は,

$$[-\omega^2 M + i\omega C + K]X(\omega) = F(\omega)$$
(3)

である.ここで, *X*(ω) と *F*(ω) は, 変位と外力のフー リエ振幅である.変位応答 *X*(ω) は次式の通りである.

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad H(\omega) = \left[-\omega^2 M + i\omega C + K\right]^{-1} \quad (4)$$

ここで, *H*(ω) は伝達関数である.

(3) 損傷後の構造物の応答

損傷により剛性マトリクスが δK 低下,減衰マトリクスが δC 増加し,変位が $\delta X(\omega)$ 増加すると,損傷後の運動方程式は次式のようになる.

 $[-\omega^2 M + i\omega(C + \delta C) + (K - \delta K)](X(\omega) + \delta X(\omega)) = F(\omega)$ (5) 式 (3) を式 (5) に代入し, 2 次以上の微小項を無視し, 式 (2), (4) を用いて整理すると, 変位の増分 $\delta X(\omega)$ に 関する方程式となる.

 $[-\omega^2 M + i\omega C + K]\delta X(\omega) = \sum_{e=1}^n (\delta k_e K^e - i\omega \delta c_e C^e) H(\omega) F(\omega)(6)$

式 (6) を応答の増分 $\delta X(\omega)$ について解くと,

$$\delta X(\omega) = \sum_{e=1}^{n} (\delta k_e H(\omega) K^e - i\omega \delta c_e H(\omega) C^e) H(\omega) F(\omega)$$
(7)

となる.式 (4) に示す損傷前の変位 *X*(ω) に,上式 (7) で求まった損傷による変位増分 δ*X*(ω) を加えることに より,損傷後の応答 *X*'(ω) が求まる.

$$X'(\omega) = H(\omega)F(\omega) + \sum_{e=1}^{n} (\delta k_e S^e(\omega) + \delta c_e T^e(\omega))F(\omega)$$
(8)

ここに, $S^{e}(\omega) \ge T^{e}(\omega)$ はそれぞれ次の通りである.

 $S^{e}(\omega) = H(\omega)K^{e}H(\omega)$ $T^{e}(\omega) = -i\omega H(\omega)C^{e}H(\omega)$ (9)

(4) 損傷同定のための連立方程式の構築

起振器をノード*i*,計測点をノード*j*とする.起振器 がノード*i*において構造物に与える外力のフーリエ振幅 を $F_i(\omega)$ とする.計測点であるノード*j*において計測さ れる加速度応答のフーリエ振幅を $a(i, j, \omega)$ とする.式 (8)より, $a(i, j, \omega)$ は次式の通りとなる.

$$a(i, j, \omega) = -\omega^2 X'_j(\omega) = -\omega^2 H_{ji}(\omega) F_i(\omega)$$
(10)
$$-\omega^2 \left(\sum_{e=1}^n \delta k_e S^e_{ji}(\omega) + \sum_{e=1}^n \delta c_e T^e_{ji}(\omega) \right) F_i(\omega)$$

式 (10) において, $H_{ji}(\omega)$, $S_{ji}^{e}(\omega)$, $T_{ji}^{e}(\omega)$ は損傷前の 構造物のパラメータM, C, K および振動数 ω から求ま る既知の値である.また, $a(i, j, \omega)$ は損傷後のフーリエ 振幅であり, 計測により得られる値である.式 (10) を 整理し, 左辺に未知の項, 右辺に既知の項を移項する と,次式のようになる.

$$-\omega^{2} \sum_{e=1}^{n} S_{ij}^{e}(\omega) F_{i}(\omega) \delta k_{e} - \omega^{2} \sum_{e=1}^{n} T_{ij}^{e}(\omega) F_{i}(\omega) \delta c_{e}$$
$$= a(i, j, \omega) + \omega^{2} H_{i}(\omega) F_{i}(\omega)$$
(11)

 i, j, ω の組み合わせを様々に変え, m 種類の計測を 行うと,式(11)の方程式が m 個得られることになる. ここで,式(11)の係数行列と右辺の値は複素数である ので,実数部と虚数部に分けると, 2n 個の未知数 δk_e , δc_e に対する 2m 個の連立方程式(損傷同定方程式)が 得られることになる.非減衰系の場合は,係数行列は 実数であり, n 個の未知数 δk_e に対する m 個の連立方程 式(損傷同定方程式)が得られることになる.

3. 理論誤差に基づく損傷同定の誤差

(1) 損傷同定の誤差

損傷を同定するための連立方程式(損傷同定方程式) を以下のように表す.

$$Ax = b \tag{12}$$

ここに,前節における導出からわかる通り,マトリック スAは質量M,減衰C,剛性Kマトリックスから構成 される.また,ベクトルbは,損傷前後におけるフーリ 工振幅の差に対応し,計測によって得られる.ベクトル xが $\delta k_{e}, \delta c_{e}$ に対応しており,部材毎の損傷度を表す.

未知数より多くの計測データを蓄積すれば,正しい 解が得られるかと言えば,そうとは限らない.この原 因として以下が考えられる.

- 計測ノイズがあれば, b に誤差 δb が含まれることになり, 推定値 x にも誤差が含まれる.
- モデル化誤差があれば, A に誤差 δA が含まれることになり, 推定値 x にも誤差が含まれる.

 計測データの選定(起振点,計測点,起振振動数) が非適切であることによる誤差.このとき,計測 ノイズとモデル化誤差がなくても推定値に誤差が 含まれる.

(2) 最適計測器配置と最適振動数

計測ノイズとモデル化誤差に対しては,出来るだけ 計測ノイズとモデル化誤差が含まれないように努力す ることが必要であるが,これには限界がある.本研究で は,計測ノイズやモデル化誤差の影響を受けにくい計 器配置や起振振動数を選択するという対応策を考える. すなわち,連立方程式の理論誤差を小さくする「最適 計測器配置と最適振動数」を決定する問題となる.そ れは同時に,非適切性の問題を解決することになる.

(3) データ数が未知数と等しい連立方程式の理論誤差 データ数と未知数が等しい場合の連立方程式の理論

誤差について検討する⁸⁾.

Aに含まれる誤差を ϵF , bに含まれる誤差を ϵf とする. このときの x の推定値を $x(\epsilon)$ とする.

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = b + \epsilon f \tag{13}$$

ここに, A にも b にも誤差が含まれないとき ($\epsilon = 0$)の推定値を x(0) = x とする.式 (13)を展開して,

$$\dot{x}(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x(\epsilon) - x(0)}{\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0} A^{-1}(f - Fx(\epsilon)) = A^{-1}(f - Fx(0)) \qquad (14)$$

 $x(\epsilon)$ のテーラー展開は,

$$x(\epsilon) = x(0) + \dot{x}(0)\epsilon + O(\epsilon^2)$$
(15)

$$= x(0) + A^{-1}(f - Fx(0))\epsilon + O(\epsilon^2)$$
(16)

となる.これより,推定値xの相対誤差は

$$\frac{\|x(\epsilon) - x\|}{\|x\|} = |\epsilon| \|A^{-1}\| \left\{ \frac{\|f\|}{\|x\|} + \|F\| \right\} + O(\epsilon^2) \quad (17)$$

となる.ここに,||·||はマトリクスおよびベクトルのノ ルムを表し,|·|はスカラーの絶対値を表す.コーシー・ シュワルツの不等式

$$||b|| = ||Ax|| \le ||A||||b||$$
(18)

より

$$\frac{|x(\epsilon) - x||}{||x||} \le \mathcal{K}(A) \left(|\epsilon| \frac{||f||}{||b||} + |\epsilon| \frac{||F||}{||A||} \right)$$
(19)

ここに, ||A||||A⁻¹|| は A の条件数 K(A) と呼ばれる.

$$\mathcal{K}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \tag{20}$$

以上より,推定値の相対誤差は,モデル化誤差 *F*,計測 ノイズ *f* と条件数 *K*(*A*) によって決まることがわかる.

モデル化誤差,計測ノイズを小さくすれば,推定値 の相対誤差が小さくなることは明らかであるが,前述 のとおり限界がある.モデル化誤差,計測ノイズの存 在下で,できるだけ推定誤差を小さくするには,条件 数 $\mathcal{K}(A)$ を小さくすればよいことになる.条件数は,用いるノルムによって異なるが,ユークリッドノルムを用いた場合の条件数 $\mathcal{K}_2(A)$ は,

$$\mathcal{K}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$$
(21)

となる.すなわち,係数行列Aの特異値分解によって 得られる最大特異値 $\sigma_1(A)$ と最小特異値 $\sigma_n(A)$ の比で ある.

本研究で提案する最適計器配置および最適起振振動 数の決定手法は,連立方程式の係数行列の条件数が小 さい計器配置と起振振動数を選ぶというものである.

(4) データ数が未知数より多い連立方程式の理論誤差次に,データ数が未知数より多い場合の連立方程式の理論誤差について検討する⁸⁾.最小二乗法により解を求めることとする.

$$\min \ ||Ax - b||_2 \tag{22}$$

誤差がある場合は,

$$\min \quad \|(A + \epsilon F)x(\epsilon) - (b + \epsilon f)\|_2 \tag{23}$$

こなる.式 (23) を展開して,

$$\dot{x}(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{x(\epsilon) - x(0)}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} (A^T A)^{-1} \left\{ A^T (f - F x(\epsilon)) + F^T (b - A x(\epsilon)) \right\}$$

$$= (A^T A)^{-1} A^T \left\{ (f - F x) + F^T (b - A x) \right\}$$
(24)

これより $x(\epsilon)$ のテーラー展開は次の通りである.

$$x(\epsilon) = x(0) + \dot{x}(0)\epsilon + O(\epsilon^2)$$
(25)

$$= x(0) + (A^{T}A)^{-1}A^{T} \left\{ (f - Fx) + F^{T}(b - Ax) \right\} \epsilon + O(\epsilon^{2})$$

$$\begin{split} \|f\|_{2} < \|b\|_{2} & \mathcal{E} \|F\|_{2} < \|A\|_{2} \, \mathcal{L} \mathcal{I} , \, \text{推定値} \, x \, \mathcal{O} \text{相対誤差は} \\ \\ \frac{\|x(\epsilon) - x\|_{2}}{\|x\|_{2}} & \leq |\epsilon| \left\{ \begin{array}{c} \|A\|_{2} \|(A^{T}A)^{-1}A^{T}\|_{2} \left(\frac{\|f\|_{2}}{\|A\|_{2}\|x\|_{2}} + \frac{\|F\|_{2}}{\|A\|_{2}} \right) \\ & + \|A\|_{2}^{2} \|(A^{T}A)^{-1}\|_{2} \frac{\|b - Ax\|_{2}}{\|A\|\|_{2}} \frac{\|F\|_{2}}{\|A\|\|_{2}} \end{array} \right\} (26) \end{split}$$

となる . $||A||_2 ||(A^T A)^{-1} A^T||_2 \geq ||A||_2^2 ||(A^T A)^{-1}||_2$ は条件数 $\mathcal{K}_2(A)$ を用いて以下のように表される .

$$\mathcal{K}_2(A) = \|A\|_2 \|(A^T A)^{-1} A^T\|_2$$
(27)

$$\mathcal{K}_2^2(A) = \|A\|_2^2 \|(A^T A)^{-1}\|_2 \tag{28}$$

以上は特異値分解により導出できる.よって相対誤差は $\frac{\|x(\epsilon) - x\|_2}{\|x\|_2} \leq$ (29)

$$|\epsilon| \left\{ \mathcal{K}_{2}(A) \left(\frac{||f||_{2}}{||A||_{2}||x||_{2}} + \frac{||F||_{2}}{||A||_{2}} \right) + \mathcal{K}_{2}^{2}(A) \frac{||b - Ax||_{2}}{||A||_{2}||x||_{2}} \frac{||F||_{2}}{||A||_{2}} \right\}$$

となる.データ数が未知数より多い場合の推定値の相 対誤差は,2つの項から構成される.第1項は,モデル 化誤差 F,計測ノイズ f,条件数 $\mathcal{K}_2(A)$ であり,データ 数と未知数の数が等しいケースと同様である.第2項 は,モデル化誤差 ||F||,最小二乗誤差 $||b - Ax||_2$,条件 数の二乗 $\mathcal{K}_2^2(A)$ の積によって決まる.



図-1 片持ち梁の解析モデル



図-2 片持ち梁の損傷モデル

モデル化誤差,計測ノイズの存在下で第1項,第2項 を小さくするには,条件数 $\mathcal{K}_2(A)$ が小さくなるような 計器配置,起振振動数を選択すればよいことがわかる.

4. 数値解析による検討

(1) 解析モデル

解析に用いた片持ち梁の概念図を図-1 に示す.長さ 85cm,幅3.0cm,厚さ0.3cmであり,材質はヤング率 2.5×10¹¹N/m²,密度が7.1×10³kg/m³の鋼である.減衰 は考慮せず,非減衰系としてモデル化した.

(2) 損傷モデル

損傷モデルを図-2 に示す.要素9の剛性低下率が 0.1(10%)であり,それ以外の要素の剛性低下率は0.0 である.表-1 に損傷前後の固有振動数を示す.

(3) モデル化誤差および計測ノイズ

モデル化誤差として,損傷前の要素質量・剛性マト リックスに1%の一様乱数を加えた.計測ノイズとして, 損傷後のフーリエ振幅に1%の一様乱数を加えた.

(4) 検討ケース

検討ケースを表-2 に示す.ケースAは,データ数と 未知数が等しいケースとした.要素数が17 であるため, 起振点と計測点の組み合わせを変えることで17 通りの 計測データを集めた.起振振動数を1 通りとし,起振 振動を0.1Hz から300Hz まで0.1Hz 刻みで変化させた. ケース A1 は,起振点を1 点に固定し,計測点を自由 な節点2 から節点18 までの17 節点としたものである. ケース A2 は,計測点数をケース A1 の約半分とし,起 振点数を2 倍にしたものである.

ケース B は, データ数が未知数より多いケースとし, 起振点と計測点の組み合わせを変えることで 34 通りの 計測データを集めた.ケース A と同様に起振振動数を 変化させた.ケース B1 は, ケース A1 の 17 データに

表-1 片持ち梁の固有振動数 (Hz)

モード	1	2	3	4	5	6
損傷前	3.26	20.4	57.1	112.0	185.1	276.6
損傷後	3.25	20.3	57.1	111.3	185.0	275.0

表—2 片持ち梁の検討ケース

(a) 計測データ数と未知数の数が等しい場合

ケー ス名	起振 節点	計測 節点	デー 夕数	総デー タ数
A1	18	2-18	17	17
A2	9	3,5,7,9,11,13,15,17	8	17
	18	2,3,5,7,9,11,13,15,17	9	

(b) 計測データが未知数より多い場合

ケー	起振	計測	デー	総デー
ス名	節点	節点	タ数	タ数
B1	9	2-18	17	34
	18	2-18	17	
B2	2	15,17	2	34
	4	3,5,7,9,11,13,15,17	8	
	8	3,5,7,9,11,13,15,17	8	
	14	3,5,7,9,11,13,15,17	8	
	18	3,5,7,9,11,13,15,17	8	

加えて, 起振点を9とする17データを用いるものである.ケースB2は, 起振点を5節点, 計測点を8節点として, 合計34データを用いるものである.

5. 計器配置とデータ数の異なる各ケースの 比較および起振振動数の影響の検討

(1) 条件数

図-3に各ケースの条件数を示す.条件数は式(21)に よって算出した.横軸が起振振動数,縦軸が条件数(対 数軸表示)である.起振振動数の値によって,条件数 が大きく異なることがわかる.起振振動数に対する条 件数のばらつきはケースによって異なり,データ数の 多いケース B1, B2 の条件数が小さく,データ数が増 えるにつれ条件数が小さくなる傾向にある.データ数 が未知数と同じで,全節点において計測データがない ケース A2 の条件数は大きい.条件数がピーク値をとる 起振振動数の数は,ケース B1, B2 に比べてケース A1 では多い.この理由は,ケース A1 では未知数とデータ 数とが等しくデータ数に余裕がないため,モデル化誤 差や計測ノイズが解の精度を悪化させやすいのに対し, ケース B1,B2 ではデータ数が十分に多いため,ケース A1 ほど悪化させないためと考えられる.

次に, ケース A1 を基準として, ケース A1 とその他 3 つのケースを比較する.

ケース A1 と B1 の比較より, ケース A1 の 17 データ に加えて新たな 17 データを用いたケース B1 では, 各 振動数に対する条件数が小さくなるだけでなく, ピー クをとる起振振動数の数が少なくなっている.ケース A1では,条件数の変動が激しく多数の起振振動数に対 して条件数がピーク値をとるのに対し,ケースB1では 条件数がピークをとる起振振動数は0-300Hzの間では 6つだけであり,これらは解析モデルの固有振動数(表 -1)に対応している.

ケース A1 と A2 の比較より, 全節点における計測 データがないため起振点数を増やして同数のデータを 集めたケース A2 の条件数は,ケース A1 に比べて 1–2 オーダー大きくなっている.一方,条件数がピーク値 をとる起振振動数の数はケース A2 の方が少ない.

ケース A1 と B2 の比較より,全ての節点における計 測データがなくても,その代わりに起振点の数を十分 に増やし,未知数より十分多いデータを集めたケース B2 では,起振振動数によってはケース A1 より小さい 条件数が得られ,かつ条件数がピーク値をとるデータ 数が減る.但し,固有振動数に相当する起振振動数に 対する条件数はケース A1 より大きい.

条件数の大きさは総データ数と関係し,条件数のピークは,同じ計測点に対し起振点の異なるデータが複数 あることと関係している.

(2) 条件数と同定誤差の関係

図-4 に条件数と同定誤差の関係を示す.各起振振動 数に対する条件数を横軸に,同定誤差を縦軸にとった. 各点は様々な起振振動数に対応する.同定誤差は同定 結果と真値の差の二乗和の平方根とした.条件数が小 さいほど同定誤差が小さい傾向にある.本手法に限っ たことであるが,誤差を約0.1以下に抑えるには,条件 数をケースA1で 1.0×10^3 以下,ケースB1で 3.0×10^2 以下にする必要がある.誤差を約0.01以下に抑えるに は,条件数をケースA1で 2.0×10^2 以下,ケースB1で 2.0×10^2 以下にする必要がある.

(3) 同定誤差

図-5 に起振振動数と同定誤差の関係を示す.

全てのケースで,図-3の条件数がピーク値をとる起振振動数とその周辺の振動数に対する同定誤差が大きいので,同定に用いるのは避けるべきであるとわかる.

低い起振振動数において,条件数が下に凸となって いるところがあるが,それより高い振動数で下に凸と なっているところより条件数が大きく,対応する誤差 も小さいとは言えず,誤差の変動も大きい.この理由 は,低い起振振動数では損傷がフーリエ振幅の変化に 及ぼす影響が小さいため,データの実質的な情報数が 十分でないためであり,さらにノイズの影響が相対的 に大きくなるため誤差が大きくなると考えられる.条 件数が下に凸となっていても,低い振動数は選ばない



方がよいと考えられる.

一方,高い起振振動数では,損傷に対する振動特性の感度が大きくなり,条件数も小さくなるものと考えられ,誤差の変動も小さい.

以上のように,振動特性は起振振動数によって損傷 に対する感度が異なるため,条件数が最も小さい起振 振動数に対する精度が最も優れているというわけでは ないが,損傷に対する感度の低い低振動数を避ければ, 条件数が下に凸となっている起振振動数で同定誤差の 大きいところは少ないので,選択するとよいと考えら れる.

ケース A1 の条件数がピーク値をとる起振振動数の数 が多かったことに対応して,ケース A1 の同定誤差も起 振振動数に対する増減が激しい.

(4) 剛性低下率の同定結果

図-6 に,様々な起振振動数におけるフーリエ振幅に 対して損傷同定を行い同定された剛性低下率を要素毎 に示す.起振振動数,要素番号,真値は,要素9の剛 性低下率が0.1 で,それ以外の要素の剛性低下率が0.0 である.条件数がピーク値を示した起振振動数におい て真値との差が大きい.また,約20Hz以下の低い起振 振動数において同定精度が悪いが,この理由は前述の 通りである.

以上から,未知数に等しいデータ数しか計測しない 場合は,ケースA1のように全節点における計測データ を集める方がよいこと,条件数がピーク値をとる周辺 の起振振動数と20Hz以下の低次の振動数を同定に用い なければ,精度よい同定結果が得られるが,そのよう な起振振動数は少ないことがわかった.

一方,未知数より多い十分な数のデータ数を集める 場合は,条件数がピーク値をとる周辺の起振振動数と 20Hz以下の低次の振動数を同定に用いなければ,精度 よい同定結果が得られること,データ数と未知数の数 が等しいケースよりも同定精度が悪くなる起振振動数 が少ないことがわかった.

以上の検討は,モデル化誤差として損傷前の要素質 量・剛性マトリックスに1%の一様乱数を与え,損傷後 のフーリエ振幅に1%の一様乱数を与えた場合の検討結 果である.どの程度の誤差レベルまでなら損傷同定が 可能であるかについては,構造モデルや損傷レベルに 依存するため,具体的な値を述べることはできない.本 検討で用いた解析・損傷モデルの場合は,5%程度の誤 差レベルまで同定が可能であり,1%の場合の結果と同 様の傾向を示した.確率論⁵⁾などの導入によって更な る精度向上が期待できると考えられる.

(5) 複数の起振振動数を組み合わせる効果の検討

起振振動数を複数組み合わせることの効果を調べる.

a) 検討ケース

検討ケースを表-3 に示す.ケース C はデータ数が未 知数と等しいケースである.ケース A1, A2 と同じ計器



配置で, 起振振動数をケース A1 で条件数の小さかった 81.9Hz に固定したものをケース C1, C2 とする.ケース C2 において計測点の不足を補うために異なる 2 つの起 振点を用いた代わりに, ケース A1 で条件数の小さかっ た 81.9Hz と 231.0Hz の 2 つの起振振動数を用いたもの をケース C3, 比較的近い 81.9Hz と 77.0Hz としたもの をケース C4 とする.77.0Hz を選定したのは, 81.9Hz と同様に 3 次と 4 次モードの間にあり 81.9Hz と近い振 動数であること, ケース A1 において条件数が下に凸と なっている起振振動数であること,以上の 2 つの理由 による.

ケース D はデータ数が未知数より多いケースである.ケース B1 で異なる 2 つの起振点を用いた代わりに 81.9Hz と 231.0Hz の 2 つの起振振動数を用いたものを ケース D1,81.9Hz と 77.0Hz の 2 つの起振振動数を用 いたものをケース D2 とする.

b) 解析結果

表-4 に各ケースの条件数を,図-7 に剛性低下率の同 定結果を示す.ケース C1 と C3,ケース D1 と D2 は全 て同じ結果になった.

ケース C1 のように全節点での計測データが得られな い場合は, C2 のように起振点の種類を増やすよりも, C3 のように条件数が小さく値が離れた 2 通りの起振振 動数を用いた方が条件数が小さく,同定精度もよい.し かし,ケース C4 のように隣接した 2 つの起振振動数を 用いた場合は条件数が大きく同定精度も悪い.ケース C1 の 17 データに異なる起振振動数による 17 データを 追加したケース D1, D2 はどちらも条件数が小さく同 定精度もよいが,値が離れた 2 通りの起振振動数を用 いた方が条件数が小さく同定精度がよい.

以上より,全節点での計測データが得られない場合 は,起振点の種類を増やすよりも,条件数の小さい異

表-3 検討ケース(複数の起振振動数を組み合わせる場合)

ケー	起振	計測	起振振	総デー
ス名	節点	節点	動数 (Hz)	タ数
C1	18	2-18	81.9	17
C2	18	2,3,5,7,9,11,13,15,17	81.9	17
	9	3,5,7,9,11,13,15,17	81.9	
C3	18	2,3,5,7,9,11,13,15,17	81.9	17
	18	3,5,7,9,11,13,15,17	231.0	
C4	18	2,3,5,7,9,11,13,15,17	81.9	17
	18	3,5,7,9,11,13,15,17	77.0	
D1	18	2-18	81.9	34
	18	2-18	231.0	
D2	18	2-18	81.9	34
	18	2-18	77.0	

表-4条件数(複数の起振振動数を組み合わせる場合)

C1	C2	C3	C4	D1	D2
960.7	11307.8	3750.4	48032.1	107.74	230.50



図-7 同定結果(複数の起振振動数を組み合わせる場合)

なる起振振動数を選択すれば,計器の配置換えを行う ことなく精度よい同定結果が得られる.このときの条 件数の小さい起振振動数は,ケースA1の単一起振振動 数による検討から決定できる.

6. 最適計器配置・最適振動数の決定手法

(1) 提案する最適計器配置・最適振動数の決定手法

以上の検討結果を踏まえ,提案する最適計器配置お よび最適起振振動数の決定手法は以下の通りである.

a) 要素数以上の計測点数が得られる場合

Step 1 計器配置を変え,要素数に等しい,または要素 数より多い数の計測点数を集める.

Step 2 様々な起振振動数に対して,損傷同定方程式の 係数行列の条件数 *K*₂(*A*) を計算する. Step 3 多くの起振振動数に対して条件数 *K*₂(*A*) が閾値より小さい場合 Step 4 へ,大きい場合 Step 5 へ.
 Step 4 精度のよい同定結果が得られる計器配置であると考えられるので,低振動数を避けて条件数の小さい起振振動数を選択する.

Step 5 単一の起振振動数では精度よい結果が得られな い可能性がある.低振動数を避け,条件数が小さく隣接 していない起振振動数を複数組み合わせることで新し い連立方程式を構築し,条件数が小さければ採用する. b) 要素数より少ない計測点数しか確保できない場合 Step 6 実験の制約上,要素数より少ない計測点数しか 確保できない場合であっても,計測しない仮想の計測 点を追加して,要素数に等しい計測点数を仮定する.

Step 7 様々な起振振動数に対して, 仮定した損傷同定 方程式の係数行列の条件数 *K*₂(*A*) を計算する.

Step 8 低振動数を避け,条件数が小さく隣接していな い起振振動数を複数選択し,確保できる計測点数と組 み合わせることで,要素数以上のデータを蓄積し,新し い連立方程式を構築し,条件数が小さければ採用する.

閾値は,数値実験等を通して最適な値を決定する必要がある.本節においては,前節における条件数と同 定誤差の関係を踏まえ,十分な精度が期待できる値と して閾値を100に設定した.

(2) 3層フレームを用いた提案手法の検証

a) 解析モデル

解析に用いた 3 層フレームの概念図を図-8 に示す. 高さ 9m (各層高さ 3m),幅 7.5m である.材質はヤン グ率 2.15×10¹¹N/m²,密度が 7.1×10³kg/m³の鋼である. 損傷前の減衰マトリックスはレーリー減衰を採用し,1 次および 9 次モードに対する減衰定数を共に 2% とした.

b) 損傷モデル

3層フレームの損傷モデルとして,図–9(a) に示す損傷 率を想定した.要素2,6,8の剛性がそれぞれ5%,10%,5% 低下し,減衰がそれぞれ5%,10%,5%増加すると想定し た.損傷要素の減衰増加率は,剛性低下率と同じ値に 設定したが,同定の際は,各要素の剛性低下率・減衰 増加率を独立として方程式を解く.

c) 計器配置・起振振動数の組み合わせ

表-5 に示すケース E1 の計器配置により,要素数に 等しい計測点数を集めた(Step 1).この計器配置に対 し,起振振動数を様々変えて条件数を算出したものが 図-9(b)である(Step 2).100以下の小さい条件数を与 える起振振動数があるので(Step 3),起振振動数を適切 に選べば精度よい同定結果が得られる計器配置である と考えられる.低い起振振動数を避けて,条件数が小 さい92.4Hz と 129.2Hz を同定に用いるとする(Step 4).



図-93層フレームの損傷モデルおよび条件数

表-53層フレームの計器配置と起振振動数の組み合わせ

ケー	起振	計測	起振振	総デー
ス名	節点	節点	動数 (Hz)	タ数
E1	4	2,3,4,6,7,8	92.4	12
	8	2,3,4,6,7,8	92.4	
E2	4	2,3,4,6,7,8	92.4	12
	4	2,3,4,6,7,8	129.2	
E3	4	2,3,4,6,7,8	47.0	12
	4	2,3,4,6,7,8	47.0	
E4	4	2,3,4,6,7,8	92.4	24
	8	2,3,4,6,7,8	92.4	
	4	2,3,4,6,7,8	129.2	
	8	2,3,4,6,7,8	129.2	

ケース E1 は, 起振点を2点として起振振動数として 92.4Hz を用いる.ケース E2 は起振点を1点として, 起 振振動数として条件数が小さい2つの振動数を用いる. ケース E3 は条件数の大きい47.0Hz を用いるので同定 精度は悪いと予想される.ケース E1, E2 は精度よい同 定結果が期待できるが, さらに計測点を増やしたもの がケース E4 であり, E4 は E1 と E2 に比べて精度が高 いと予想される.

d) 同定結果

図-10 に各ケースの剛性低下率の同定結果を示す. ケースE1 とE2 では良い精度で同定でき,ケースE3 の 同定精度は悪い.ケースE4 は,ケースE1,E2 より精 度が高く,前項において予想した通りである.

7. まとめ

本研究では,マイクロ起振器を用いた同定手法を対 象とし,最適計器配置および最適起振振動数の決定手



法を提案した.マイクロ起振器を用いた同定手法は,振 動データ毎に得られる方程式を組み合わせた連立方程 式を解くことで部材毎の損傷度を同定する.連立方程 式の解に含まれる理論誤差に基づき,理論誤差が小さ くなる計器配置・起振振動数を「最適」と見なすこと とした.損傷同定の推定誤差の上界は,モデル化誤差, 計測ノイズと連立方程式の係数行列の条件数によって 与えられるため,モデル化誤差,計測ノイズの存在下 で精度よい解を得る為に,条件数が小さい連立方程式 となる計器配置・起振振動数を選択することとした.

片持ち梁を用いた数値解析を通して,計器配置と起 振振動数が条件数や同定誤差に与える影響を調べた.

その結果,適切なデータの数を増やすことで条件数 が小さくなることがわかった.条件数が非常に大きな 値(ピーク値)を取り,大きな誤差を与える起振振動 数があるが,データ数を増やすことで,このような起 振振動数の数を減らすことができることがわかった.

低い起振振動数と条件数がピーク値をとる起振振動 数は、同定誤差が大きいので避けるべきであることが わかった.条件数が下に凸となる起振振動数に対する 同定誤差は比較的小さいので、選択するとよいことが わかった.また、十分な数の計測点が得られない場合 は、条件数が小さい起振振動数を複数用いてデータを 蓄積すれば、起振点数を増やすよりも同定精度が高く なること、隣接した起振振動数を用いる場合は、起振 点数を増やすよりも効果が低いことがわかった.

片持ち梁の検討結果を踏まえ,最適計器配置・最適 起振振動数の決定方法を提案した.3層フレーム構造物 に適用し,提案手法の有効性を示すことができた.

提案手法は,他の同定手法であっても,連立方程式 を構築するタイプの手法であれば適用が可能である.

今後は,実測データを用いて本手法の実用性・有用 性を検討したいと考えている.

謝辞: 本研究は,前田記念工学振興財団の研究助成 を受けて実施した.記して謝意を表す.

参考文献

- Furukawa A., Kiyono J.: Structural damage identification based on harmonic excitation force, *Structural Heath Monitoring and Intelligent Infrastructure*, Vol. 1, pp.535-542, 2003.11.
- 2) Hassiotis S, Jeong GD.: Identification of stiffness reduction using natural frequencies, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.121, pp.1106-1113. 1995.
- 阿部雅人,藤野陽三,長山智則,池田憲二:常時微動計測 に基づく非比例減衰系の構造同定と長大吊橋への適用例, 土木学会論文集, No.689/I-57, pp.261-274, 2001.10.

- Xia Y, Hao H, Brownjohn JMW, Xia P.: Damage identification of structures with uncertain frequency and mode shape data, *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, Vol.31, pp.1053-1066. 2002.
- 5) 古川愛子,大塚久哲,清野純史: ブートストラップ仮説 検定を用いた統計的損傷同定手法について,応用力学論 文集, Vol.7, pp.1187-1194, 2004.08.
- Ni,Y.Q.: Experimental investigation of seismic damage identification using PCA-compressed frequency response functions and neural networks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.290, pp.242-263, 2006.
- 古川愛子,清野純史,大塚久哲:独立成分分析を用いた 起振応答の抽出法と損傷同定問題への適用,応用力学論 文集, Vol. 9, pp.43-54, 2006.8
- Gene H. Golub, Charles F. Van Loan: Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

(2007.4.6 受付)

OPTIMAL SENSOR PLACEMENT AND OPTIMAL EXCITATION FREQUENCIES FOR DAMAGE IDENTIFICATION BASED ON THEORETICAL ERROR

Aiko FURUKAWA • Hisanori OTSUKA

This paper presents a method to determine the optimal sensor placement and optimal excitation frequencies for damage identification based on the theoretical error of simultaneous equations. The damage identification technique under consideration estimates the structural damage by solving the simultaneous equations. Damage identification with the sensor placement and excitation frequencies whose condition number of coefficient matrix of the simultaneous equation is small is expected to give high accuracy even though there exists modeling error and measurement noise. The validity of the technique was confirmed through the numerical study on a cantilever beam and a three-story frame structure.