

マスーバネ系モデルにおける 粘性境界設定の簡便法

李 相勲1・中沢 正利2・遠藤 孝夫3

 ¹東北学院大学准教授
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 ²東北学院大学教授
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 ³東北学院大学教授
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 ³東北学院大学教授
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 E-mail:naka@tjcc.tahoku-gakuin.ac.jp
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 E-mail:naka@tjcc.tahoku-gakuin.ac.jp
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

 E-mail:tendo@tjcc.tahoku-gakuin.ac.jp
 工学部環境建設工学科(〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1)

粘性境界の設定式が伝播速度に比例する形であることに着目して、半無限連続高架橋を想定したマスー バネ系モデルを対象に粘性境界の設定速度を変化させ最適なエネルギー吸収能を持たせることを試みた. その為、マスーバネ系モデルにおける質量m、軸方向バネ係数k、地盤連結バネ係数k'を変化させたパラメ トリック解析を行い、無次元化したグラフから簡便に最適の伝播速度を求める簡便式を提案する.また、 粘性境界設定のための伝播速度がその設定方法から減衰定数に何らかの影響を受けることを考慮し、減衰 定数hを変化させた場合についてもパラメトリック解析を行い、各減衰定数ごとの簡便式を提案する.

Key Words : Wave Velocity, Viscous Boundary, Parametric Analysis, Damping factor

1. はじめに

連続高架橋のように同形式の構造が非常に長く連続す る構造物に対し動的解析を行う際、その一部を取り出し 両端を自由境界として取り扱うのが一般的である.しか しこの方法は、対象構造物の中に不規則的な構造を含ん でいる場合、高架橋の長さ方向に発生する波動の流れに 対応できないという問題がある. 著者の一人はこのよう な離散系半無限体問題を解決するため、マスーバネ系モ デルを用いて周波数領域の解析であるエネルギー伝達境 界¹⁾と、時間領域での解析を目的とした粘性境界²⁾を提 案した.後者の研究より、連続高架橋のような離散系半 無限体においても地盤のような連続体の場合と同様に、 波動の伝播速度に基づき粘性境界を設定することができ ることが分かった.連続体の場合では、実体波に対し波 動を縦波と横波に分け、境界面の鉛直方向応力とせん断 方向応力をそれぞれ縦波の伝播速度 Va と横波の伝播速 度 Vsに比例させることで設定している³. しかし,表面 波については波動が分散するため標準的な粘性境界では その機能が期待できず、まだその対応策が十分に研究さ れていないのが現状である.このことは離散系の場合で も同様で、地盤連結バネの影響により波動が分散するた

め、粘性境界のための設定速度を一意的に定義すること は困難である⁴.

そこで本研究では、まず連続高架橋をマスーバネ系モ デルに置き換え、その一部を解析領域として切り取る. その両端に粘性境界を設け、伝播速度を変化させながら 動的解析を行う.その応答波形を正解波形と比較するこ とで粘性境界の性能を最も高める伝播速度を取り出す. この一連の過程に従って、モデルを変えながらパラメト リック解析を行い、粘性境界の設定に最適の伝播速度を 簡便に求める簡便式を提案する.また、減衰定数を変え た場合についても同様な検討を行い、その影響について 議論する.

2. 離散系における粘性境界設定時の伝播速度

半無限に連続する高架橋を図-1 に示すようなマスー バネ系モデルに置き換え,有限の解析領域を取り出した 場合,その両端に次式で表される力 fを適用することで 粘性境界を設定することになる^{3,4}. ただし,ここでは 橋軸方向の波動の伝播のみを考える.

$$f = mV\dot{u} \tag{1}$$

ここで, m は質量, V は縦波速度(橋軸方向の伝播速 度), i は質点の速度である. 地盤連結バネ k=0 の場 合の基本縦波速度 V_0 は次式で表される.

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

ただし、kは橋軸方向のバネである.

上記の2つの式は地盤の場合の標準粘性境界の設定と 全く同様の形ではあるが、構造物の場合は橋脚など地盤 連結バネの存在により、伝播速度Vの定義が困難になる ことがその問題点である.ここに、数値解析を用いて地 盤連結バネ係数k'による位相速度の変化を調べた結果⁴ を示す. 解析条件は、質量m=2.0ton, 軸方向バネ係数 k=5000kN/m, 地盤連結バネ係数k'=0, 10, 100, 500, 1000kN/m である.この5ケースの、基本縦波速度に対する位相速 度の比VVV0と角振動数ωの関係を表したのが図-2である. これより, k'=0を除いた全てのケースで位相速度がωに 依存していることが分かる.これはk'=0以外の場合,波 動が分散することを示している.参考文献4)には、k'=0 以外の場合、波動の速度を議論するには群速度の概念を 導入する必要があり、その粘性境界の設定には基本縦波 速度の代わりに群速度を用いることで対応できることが 示されている.

3. 伝播速度に関するパラメトリック解析

ここでは、マスーバネ系モデルにおいて基本縦波速度 の代わりにさまざまな速度で設定した粘性境界を設け、 衝撃による各応答変位波形を比較することで、粘性境界 における設定速度の影響を検討する.比較するのは、粘 性境界を設けない質点数201のモデルの応答変位と、さ まざまな速度で設定した粘性境界を設けた質点数51のモ デルの応答変位である.201質点モデルは中央から発生 した波が両側の境界から反射し測定する点に到達するま での波形を比較対象にすることで正解とみなす.ここで、 正解とするモデルの質点数を増加させると比較可能な時 間が長くなる.

(1) 解析条件

図-1のマスーバネ系モデルにおいて、質点数を51とし、 モデルの質量とバネ係数を変えながらパラメトリック解 析を行う.各解析ケースの組合せは、質量mの2ケース と軸方向バネ係数kの2ケースの総4ケースに対し、地盤 連結バネ係数k'を11ケース設定する.これらの44ケース に対し減衰定数を各々h=0.01,0.02,0.05の3ケースのレーリ ー減衰を用いる.以上の計132ケースについて、伝播速 度におけるエネルギー吸収能の影響について検討する.



(2) 解析方法

粘性境界の設定に用いる伝播速度がエネルギー吸収 能に与える影響を調べるために,201質点モデルの応答 波形(正解)と各伝播速度別の粘性境界を設けたモデル (51質点)の応答波形を比較した.波形の比較には Waveform Chain Code (以下WCC)による方法⁵を利用し た.衝撃荷重作用後比較対象時間までの,201質点モデ ルの76から126までの質点の応答変位と,51質点モデル においての粘性境界の設定速度の変化に対する応答変位 を比較する.具体的には、これら2つの波形の平均勾配 差を求め、数値が小さいほど基準となる正解波形に近い と見なす.すなわち、数値が小さいほどエネルギー吸収 能がよいことと判定する.

(3) 解析結果(減衰定数:h=0.01)

a) *m=*2ton, *k=*5000kN/mの場合

まず,比較対象時間 t を求める. 201 質点モデルにお いて比較したい点を 76 番目の質点(または 126 番目の 質点)とすると,中央点(100 番目の質点)に与えた衝 撃荷重により発生した波動の先が 76番目(126番目)の 質点に到達した時間を t₁とし,さらに波形が進み1番目

(201 番目)の質点に到達した時間を <u>t</u>とする.76 番目 と 126 番目の質点の波形においては,波動が境界面を反 射して再び 76,126 質点に戻ってくるまでは反射波の影 響がないので,比較対象時間は <u>t</u>+2×(<u>t</u>-t)までである.

一例として地盤連結バネk'=0kN/mの場合を考えると, t_1 =0.34sec, t_2 =1.64secであるので,比較対象時間を計算す ると2.94secである.そのときの応答波形を図-3に示す. 同ケースにおいて、粘性境界を設定するための伝播速度 を変化させながら解析を行い、それぞれの伝播速度と正



図-3 応答波形(m=2ton, k=5000kN/m, k'=0, h=0.01)

(<i>m</i> =2ton, <i>k</i> =5000kN/m, <i>k</i> '=0, h=0.01)			
Vの値	平均勾配差(%)	平均曲率差(%)	
51	1.448	0.212	
50	1.444	0.212	
49	1.445	0.212	
48	1.452	0.212	
47	1.462	0.212	
46	1.477	0.213	
45	1.496	0.214	
44	1.518	0.215	
43	1.544	0.216	
42	1.573	0.218	

表-1 WCCによる比較

解との平均勾配差と平均曲率差を表-1に示す. ここで最 も正解に近い波形はこれら2つの値が最も小さい V=50EA/secの場合である. (マスーバネ系モデルである ので速度は単位時間当たりに進む質点数EAで表す.) 以下,このように求めた速度を最適伝播速度と呼ぶ. k=10,20,50,100,250,500,750,1000,2000,3000kVmの場合も 同様な方法で最適伝播速度を求めていく.

図-4は、51質点モデルに最適伝播速度で設定した粘性 境界を設けた場合と粘性境界を設けない場合と201質点 モデルの場合と比較したものである.比較対象は、51質 点の境界付近である5番目の質点においてのそれぞれの 応答変位と、それに対応する201質点モデル(正解波 形)の80番目質点における応答変位であり、地盤連結バ ネk=0,10,20,50,100,250kN/mの6ケースの結果について表 している.いずれの場合も最適伝播速度で設定した粘性 境界により波動エネルギーが吸収され、正解波形をよく 再現していることが分かる.ここには省略するが、残り の5のケースについてもその傾向は同様である.

b) *m=*2ton, *k=*10000kN/mの場合

この場合の比較対象時間パは、k'=0kN/mの場合を考え ると、t_i=0.25sec, t₂=1.17secであるので、2.09secとなる.t₁ とt₂の時点の応答波形を図-5aに示す.aのk=5000kN/mの 場合に比べてkの値が大きいので、伝播速度が速くなり 反射波が帰ってくるのも早くなっている.また同ケース において、伝播速度を変化させながら粘性境界を設定し て行った解析結果を表-2に示す.ここで最適伝播速度は 平均勾配差と平均曲率差が最も小さいときのV=71EA/sec である.k'=10, 20, 50, 100, 250, 500, 750, 1000kN/mの場合も 同様な方法で最適伝播速度を求めていく.



図-4 k'の変化による変位応答の比較(m=2.0ton, k=5000kN/m).

c) m=5ton, k=5000kN/mの場合

k'=0kN/mの場合, t₁=0.55sec, t₂=2.61sec であるので,比 較対象時間 t は 4.61sec となる. その波形を図-5b に示す. また同ケースにおける各伝播速度とそのときの正解との 平均勾配差を表-3 に示す. この場合の最適伝播速度を 求めると V=31EA/sec である. また, k'=0 以外の場合も 同様な方法で最適伝播速度を求めていく.

d) m=5ton, k=10000kN/mの場合

比較対象時間 t は, k'=0kN/m の場合, t₌=0.40sec, t₌=1.86sec であるので, 3.32sec となる. その波形を図-5c に示す. また**表-4** に, 同ケースにおける各伝播速度と そのときの正解との平均勾配差を示す. この場合の最も 正解に近い波形が V=44EA/sec のときである.

前述したように*k*'=0kN/m以外の場合においても同様の 方法で, a, b, c, dの4ケースについて最適伝播速度を求 める. すなわち, *k*'の値が0, 10, 20, 50, 100, 250, 500, 750, 1000, 2000, 3000kN/mの総計44ケースについて最適伝播速 度を求める.

4. 伝播速度の提案式

半無限離散系構造物に粘性境界を設定する際の最も重要な因子である伝播速度についてパラメトリック解析を行った. 3.の一連の過程からも分かるように,最適の 伝播速度については,一意的に定義することは困難であり,数値計算的に求めるのもわずらわしい作業である.

しかし、伝播速度 V と構造物の諸特性 (*m*, *k*, *k*) には 何らかの関係があることは明らかである. 図-6 は、3. のパラメトリック解析の結果を、横軸を k'kにし、縦軸 を VV_0 にして表したものである. ここで V_0 は $\sqrt{k/m}$ で 表される値である. この図から分かるように、若干のば らつきはあるものの、k'k と VV_0 はある一定の関連性を 示している. この結果を代表する近似曲線として、縦軸 の最小値に漸近する指数曲線を仮定した. その指数曲線 の近似式を最小2乗法を用いて求めると、次のように書 くことができる.

$$V/V_0 = 0.6 + 0.26e^{-9.65k'/k}$$
(3)



1 比較对家时间07日昇(召員点07心合友但

速度 V

32

31 30

29

28 27

26

25

24

23

表-2 WCC による比較

1 100001 NU 12 0

(m=210n, k=10000 kIV/m, k=0)			
速度 V	勾配差(%)	曲率差(%)	
72	1.500	0.311	
71	1.499	0.311	
70	1.501	0.311	
69	1.504	0.311	
68	1.509	0.312	
67	1.516	0.312	
66	1.524	0.313	
65	1.535	0.313	
64	1.548	0.314	
63	1.563	0.315	

曲率差(%)

0.130

0.130

0.130

0.131

0.132

0.133

0.135

0.137

0.139

0.141

勾配差(%)

1.425

1.414

1.417

1.437 1.467

1.504

1.549

1.601

1.661

1.727

表-4 WCCによる比較				
(<i>m</i> =5ton, <i>k</i> =10000kN/m, <i>k</i> '=0)				
速度 V	勾配差(%)	曲率差(%)		
45	1.423	0.186		
44	1.420	0.186		
43	1.427	0.186		
42	1.440	0.187		
41	1.456	0.187		
40	1.476	0.188		
39	1.501	0.189		
38	1.529	0.191		
37	1.561	0.193		
36	1.596	0.195		



ここで, k/k が 0.6 より大きい場合については検討され ていないが,一般的に橋脚の曲げ剛性である k'の値は上 部構造の軸方向剛性 k よりずっと小さいと予想されるこ とから,上記の提案式は有効に利用できることと考えら れる.

5. その他の結果および提案式

(1) 減衰定数 h=0.02の場合

4. で提案した減衰定数 h=0.01 の場合と同様に,減 衰定数 h=0.02 の場合に対し,質量 mの2ケース,軸方 向バネ係数 kの2ケース,地盤連結バネ定数 k'の9ケー スの計44 ケースに対して最適伝播速度 Vを求めた.そ の結果を,横軸を k'kにし,縦軸を VV6にして図-7 に表 す.また,この結果を代表する近似曲線として,縦軸の 最小値に漸近する指数曲線を仮定し最小2乗法を用いて その式を求めると,次のように書くことができる.

$$V/V_0 = 0.52 + 0.37e^{-13.9k'/k}$$
⁽⁴⁾

(2) 減衰定数 h=0.05の場合

減衰定数 h=0.05 の場合に対しても、質量 m の 2 ケース,軸方向バネ係数 k の 2 ケース,地盤連結バネ定数 k' の 9 ケースの計 44 ケースに対して最適伝播速度 V を求めた.その結果を、横軸を k'kにし、縦軸を VVV₀にして図-8 に表す.また、その近似曲線を最小 2 乗法を用いて求めると、次のように書くことができる.

$$V/V_0 = 0.50 + 0.32e^{-9.74k'/k}$$
(5)

(3) 減衰定数ごとの比較

いままで求めた 3 つの式(以下簡便式という)におけ る減衰定数の影響を検討するため、これらの関連性を調 べる.図-9に各減衰定数 0.01, 0.02, 0.05 における最適伝 播速度を求める簡便式の曲線を示す.

この図より,各減衰定数の値に対する曲線がそれぞれ 異なっているのがわかる.また一部異なってはいるが, 同じ剛性の条件に対し,減衰定数が大きいほど伝播速度 の値が小さいとの傾向が見受けられる.しかし,その比 例関係が線形的に一定の値で増減しているわけではなく, 減衰定数がある値以上になると一定の値に収束している ようにも見受けられる.

以上,減衰定数と伝播速度を求める簡便式の間には何 らかの関係があることは示したものの,今回ではデータ の数が少なかったため,その関連性を明確に述べるまで には至らなかった.

6. 結論

本研究で行ったパラメトリック解析の結果であるk^{*}k とVV₀の関係グラフから粘性境界の設定に用いる伝播速 度Vを求める式を次のように提案する.

・ 減衰定数 h=0.01 のとき

 $V / V_0 = 0.6 + 0.26e^{-9.65k'/k}$

・ 減衰定数 h=0.02のとき

 $V/V_0 = 0.52 + 0.37e^{-13.9k'/k}$

・ 減衰定数 h=0.05のとき

$$V/V_0 = 0.50 + 0.32e^{-9.74k'/k}$$

ここに、
$$V_0$$
: 基本縦波速度 ($V_0 = \sqrt{k/m}$)

- *m*: 質量
- k: 軸方向バネ係数
- k': 地盤連結バネ係数

上記の3つの提案式の比較より最適伝播速度を求める には減衰定数を考慮すべきであることは分かったものの, 今回の研究ではデータの数が少なかったため,その関連 性を明確に述べるまでには至らなかった. 今後広い範囲 の減衰定数に対する検討を行いその影響を究明したい.

参考文献

- 李相勲,田邉忠顕:連続したマスーバネ系モデルを用 いた連続高架橋構造物の伝達境界の定式化,コンク リート工学年次論文集, Vol.24, No.2, pp.1165-1170, 2002.
- 2) 李相勲,田邉忠顕:時間領域解析におけるマスーバネ 系モデルを用いた離散系半無限体の境界設定,土木 学会地震工学論文集, Vol.27, paperNo.78, 2003.
- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L. : Finite dynamic model for infinite media, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.95, pp.859-877, 1969.
- 4) 李相勲,中沢正利,遠藤孝夫,石川雅美:半無限連続 高架橋における粘性境界の設定,土木学会応用力学 論文集, Vol.8, pp.189-198, 2005
- Samman, M.J. and Biswas, M. : Vibration testing for nondestructive evaluation of bridges. I : Theory, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.120, pp.269-289, 1994

(2007.4.6 受付)

APPROXIMATION EXPRESSIONS OF WAVE VELOCITY OF VISCOUS BOUNDARY FOR INFINITELY LONG ELEVATED BRIDGE

Sanghun LEE, Masatoshi NAKAZAWA and Takao ENDO

A continuing elevated bridge is replaced with mass-spring system model, and a part of the bridge is cut out as an analytical area. A viscous boundary is installed at both ends, and dynamic analyses are carried out changing the wave velocity of the viscous boundary. The result is compared with a result of a very long model corresponding to the solution with infinite length. A wave velocity is chosen so that the good performance of a viscous boundary is exhibited. The parametric analyses are carried out changing the model of various structural properties, and approximation expressions for various damping factors are suggested to obtain the wave velocity easily for setting a viscous boundary.