

SPHシミュレーションに基づく液体貯蔵タンク 側壁に作用するスロッシング荷重の評価

小野 祐輔¹·岩本 哲也²·Charles Scawthorn³

¹京都大学大学院助手 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂) E-mail:ysk@mbox.kudpc.kyoto-u.ac.jp ²京都大学大学院修士課程学生 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂) E-mail:iwamoto.tetsuya@t03.mbox.media.kyoto-u.ac.jp ³京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂) E-mail:scawthorn@quake.kuciv.kyoto-u.ac.jp

SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法は、複雑な境界形状を有する流体の挙動を追跡するのに適した数値 解析手法である.本論文では、地震によって引き起こされる液体貯蔵タンクのスロッシング現象を対象とした数 値解析にSPH法を適用した二次元解析を行った.SPH法によって得られた解析結果から液体貯蔵タンク側壁に 作用する荷重を求め、Housner(1957)の理論から得られる値との比較を行うことで、SPH法によって液体貯蔵タ ンクに作用するスロッシング荷重の評価を行えることを示した.SPH法は複雑な境界形状に対しても容易に適用 できることから、スロッシング抑制を目的としたタンク構造の開発に利用することが期待できる.

Key Words : Sloshing, Fluid storage tank, Earthquake and Smoothed Particle Hydrodynamics

1. 序論

地震によって発生する液体燃料貯蔵タンクのスロッ シングは、比較的大きなマグニチュードの地震によって 生成される長周期地震動と共振することで振幅が増大 し、火災や内容物の流出といった災害につながる.近 年、地震動の予測手法の高度化や地下構造の解明が 進んだことにより、大都市圏の臨海部に設置された液 体燃料貯蔵タンクは高い被災ポテンシャルを有してい ると考えられるようになった.そのため、地震時のスロ ッシングの規模と、スロッシングによるタンクへの作用 荷重を予測することは、重要な研究課題である.

本研究では、SPH法¹⁾と呼ばれる数値解析によって、 固定屋根を含む液体貯蔵タンクに作用するスロッシン グ荷重の評価を試みる.SPH法では連続体において各 種の物理量を評価する位置を粒子として離散化し、時 間ごとに各々の粒子における密度や速度など評価する. 歴史的に見ると、SPH法は圧縮性流体の数値解析法と して宇宙物理学における星雲の衝突や分裂などを解析 する手法として提案された^{2,3)}.その後、メッシュ生成 が不要で大変形解析に適正が高いというメリットが注 目され,複雑な自由表面形状を持つ自由表面流れ^{4.6}や 弾性体⁶⁻⁸⁾,構造物と流体の相互作用の解析⁹⁻¹¹⁾などに も適用された.さらには地盤工学の分野にも応用¹²⁻¹⁶⁾ が試みられている.

2. 解析手法

(1) ナビエ・ストークス方程式とその離散化

本論文では、タンク内の流体を粘性を有するニュー トン流体とし、その運動を次のナビエ・ストークス方 程式によって表す.

$$\frac{Dv^{\alpha}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + f^{\alpha}$$
(1)

ここで v^{α} は流速の x^{α} 成分であり、 t は時間、 $\sigma^{\alpha\beta}$ は応力テンソルの成分、 f^{α} は流体に作用す る物体力の x^{α} 成分を表す. ただし、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$
(2)

である.

 $\sigma^{\alpha\beta} = -p \, \delta^{\alpha\beta} + \mu V^{\alpha\beta}$ (3)

 ここで p は圧力, μ は粘性係数, $V^{\alpha\beta}$ は変形速
 度テンソルを表す. $\delta^{\alpha\beta}$ はクロネッカーのデルタであ

 る.また,変形速度テンソル $V^{\alpha\beta}$ は次式で与えられ

 る.

$$V^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial v^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}$$
(4)

式(4)を SPH 法にしたがって離散化することにより, 次式を得る¹⁾.

$$V_{i}^{\alpha\beta} = \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} (v_{j}^{\beta} - v_{i}^{\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{i}^{\alpha}} + \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} (v_{j}^{\alpha} - v_{i}^{\alpha}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{i}^{\beta}}$$

$$- \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} (v_{j}^{\gamma} - v_{i}^{\gamma}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{i}^{\gamma}}$$

$$(5)$$

ここで、添字i, jは離散化された個々のSPH 粒子を表し、 m_i , ρ_i はそれぞれ粒子iの質量、密度である. W_{ij} は粒子i, jの組み合せに対するカーネル関数である.

次に,式(1)を SPH 法にしたがって離散化すると次 式となる¹⁾.

$$\frac{Dv_i^{\alpha}}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} \frac{m_j \partial W_{ij}}{\rho_j \partial x_i^{\beta}} + f_i^{\alpha}$$
(6)

一方,

$$\sum_{j} \sigma_{i}^{\alpha\beta} \frac{m_{j}}{\rho_{i}\rho_{j}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{i}^{\beta}} = \frac{\sigma_{i}^{\alpha\beta}}{\rho_{i}} \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_{i}^{\beta}} = \frac{\sigma_{i}^{\alpha\beta}}{\rho_{i}} \frac{\partial 1}{\partial x_{i}^{\beta}} = 0$$
(7)

から、これを式(6)の両辺に加えることで次式を得る.

$$\frac{D v_i^{\alpha}}{Dt} = \sum_j m_j \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + f_i^{\alpha}$$
(8)

式(8)によれば、粒子*i*の粒子*j*に対する作用と、粒子 *j*の粒子*i*に対する作用が等しくなるので、運動量保存 則が成り立っていることが分かる.

SPH 法による流体解析では,解析の安定性のために 式(8)にさらに人工粘性項を加えたものを運動方程式 として用いることが多い.すなわち,

$$\frac{Dv_i^{\alpha}}{Dt} = \sum_j m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} + \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + f_i^{\alpha} \quad (9)$$

である.ここで、人工粘性項 Π_{ij} は Monaghan によって次式で与えられている¹⁾.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi} \bar{c}_{ij} \phi_{ij} + \beta_{\Pi} \phi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0 & v_{ij} \cdot x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$
(10)

ただし,

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij} v_{ij} \cdot x_{ij}}{|x_{ij}|^2 + \varphi^2} \tag{11}$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2} (c_i + c_j) \tag{12}$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j) \tag{13}$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j)$$
 (14)

$$v_{ij} = v_i - v_j \tag{15}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \tag{16}$$

である. α_{Π} , β_{Π} は定数, $\phi=0.1h_{ij}$ は粒子が 互いに近づくケースにおける解の発散を防ぐために導 入されたパラメータである. c_i , h_i はそれぞれ粒 子iの音速,影響半径を表す. 本論文では文献^{5,9,10)}を 参考にして $\alpha_{\Pi}=0.01$, $\beta_{\Pi}=0$ とする. また音速 c_i については,

$$c = n\sqrt{200 \, g \, H} \tag{17}$$

と与える. η は定数で0.1とする.人工粘性は粒 子が極めて接近した時のみに発生する減衰であるので 解析全体に粘性として及ぼす影響は小さい.gは重力 加速度,Hは初期状態におけるタンク内溶液の水深で ある.

(2) 状態方程式

SPH法は本来, 圧縮性流体を対象とした解析法で あるため, 水のような非圧縮性流体解析に適用するた めには特別な取り扱いが必要となる.これまでに, SMAC-SPH法¹¹⁾など, 非圧縮性を厳密に取り扱うこ とのできる手法が提案されているが,本論文では標準 的な SPH法のアルゴリズムがそのまま適用でき,これ までにその妥当性が検証されている Monaghan⁵⁾の疑似 圧縮性を採用する.この方法では, 圧力を次式の状態 方程式にしたがって計算する.

$$p = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right]$$
(18)

ここで、 ρ_0 は初期密度を表す. y は定数で、本 論文では Monaghan⁵⁾にしたがい7とした. また、Bは 流体の圧縮性を決める定数係数であり、文献¹⁾を参考 にして 1.013×10^5 [Pa]を用いた.

(3) 密度の更新

SPH 法による疑似非圧縮性流体解析では,密度変化に応じて状態方程式から流体の圧力が算定される.



図-1 壁面粒子と流体粒子

SPH 法では,密度を更新するアルゴリズムとしていく つかのものが知られているが,本論文では最も基本的 な次式¹⁾を用いる.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_i W_{ij} \tag{19}$$

(4) 境界条件

本論文では、SPH解析に用いる粒子を流体粒子と壁 面粒子に分類する.流体粒子は通常のSPH粒子である. 壁面粒子は、流体粒子と同様に密度の計算を行うが 移動を拘束する.流体粒子の密度の更新を行う際に、 壁面粒子近傍で粒子数の不足による密度の低下を防ぐ ため、壁面粒子は三層配置する.

自由表面付近において、粒子数の不足により密度が 低下し負圧が発生する. そこで、閾値 β に対して

$$\beta > \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \tag{20}$$

を満たすとき、その粒子は自由表面にあるとみなして、 密度を初期密度に置き換える.本論文で示す数値計 算では、 β として0.95を用いている.

(5) 時間積分

時間積分には Leap-frog 法を用いる. Leap-frog 法で は, 粒子の速度 v と位置座標 x を次式によって更新す る.

$$v(t + \frac{1}{2}\delta t) = v(t - \frac{1}{2}\delta t) + \delta t \frac{dv}{dt}(t)$$
(21)

$$x(t+\delta t) = x(t) + \delta t v \left(t + \frac{1}{2} \delta t\right)$$
(22)

ここで, δt は解析ステップの時間間隔を表す.

(6) タンクに作用する荷重の評価法

壁面粒子に一番近い水粒子の圧力の値を壁面にかか る荷重として評価する.また,粒子法の特徴として圧 力が短時間で局所的に変化し,圧力分布に偏りが生じ てしまう.そこで,解析中に得られている近傍粒子の

表-1 解析パラメータの諸元

24 74171 7	
タンク幅	1.0 m
タンク高さ	1.0 m
初期状態での水深	0.5 m
流体の密度	$1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
流体の粘性係数	$1.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^{-1} \text{s}$
重力加速度	9.8 m/s ²



図-2 タンクのモデル

ペアを利用して、次式による圧力の平滑化を行った.

$$p_i' = p_i - \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} p_{ij} W_{ij}$$
(23)

ここで $p_{ij}=p_i-p_j$ であり, $\epsilon=0.5$ とした.

さらに安定した圧力評価を行うため、時間方向に対 しても前後20ステップずつの幅を持つ長方形ウィンド ウを用いて平滑化処理を行い、その結果を壁面粒子の 圧力とする.

4. 解析結果

(1) 解析条件

解析条件は実験値との比較のため、文献¹⁷⁾を参照し て表-1のように設定した.このモデルの固有円振動数 は5.31Hzである.外力は正弦波 $A\omega^2 \sin \omega t$ を慣性 力として与える.振幅 A は 0.0093 m、入力正弦波の 円振動数 ω は5.311 rad/s とする.その他、解析に 必要なパラメータは、影響半径 0.0052 m、計算時間 間隔1.0×10⁻³ s、計算ステップ数 12,000(計算時間12 秒)である.影響半径はその中に粒子が十分含まれる ように、初期粒子配置間隔の2.6倍とした.基本的に は影響半径を大きくすることによって精度が向上する が、その分近傍粒子ペアの探索に要する計算時間が増 大する.

粒子は初期状態において間隔 0.02 m の均等格子状 に配置した.総粒子数は1,974 個となった.本論文で



図-3 SPH解析による静水圧分布



図-4 SPH 解析と理論値の静水圧分布の比較

は、予備的な解析を行って解析結果の変化がほとんど ないことを確認することにより、粒子数(初期粒子間 隔)及び影響半径を設定した.また、解析開始から最 初の2秒間は、重力のみを作用させた状態で粒子の圧 力分布を安定させ、その後に正弦波による加振を行う.

(2) 静水圧分布

ここでは流体の静水圧分布について, SPH法による 解析結果と理論値の比較を行う.静水圧の理論値は 次式によって求められる.

$$p = \rho g h \tag{24}$$

ここでhは水面から鉛直下向きを正とした場合の水深の値である.

重力のみを作用させた状態で2秒間のSPH解析を行って得られた液体の圧力分布を図-3に示す.液面からの深さに比例して大きな圧力が得られている.図-4は液体の圧力について、SPH法による解析値を横軸に、式(24)から求めた理論値を縦軸にとり、両者の関係を粒子毎にプロットしたものである.傾き1の直線上にプロットされていることから、SPH法から得られた値は



図-5 SPH 解析と実験"のスロッシング波高の比較

理論値と良く一致していることが分かる.しかしなが ら,理論値と比べて圧力が大きな粒子でSPH法による 解析結果が小さくなっている.これは,状態方程式に よって圧力が密度の関数として求められるが,初期密 度のまま変化しない壁面粒子に影響されて,境界付近 の流体粒子の密度が小さめに評価されるためである.

(3) スロッシング波高

スロッシングの波高に着目し,SPH法による解析結 果と実験値¹⁷⁾との比較検討を行う.タンク内左壁にお ける水位の時刻歴の実験値と解析結果を比較したもの を図-5に示す.SPH法によっても、スロッシングの波高 が徐々に大きくなっていく様子が再現できている.特 にスロッシングの周期は,解析結果と実験値の良い一 致が見られる.波高に関しては,解析結果の方が実験 値と比べて小さくなっている.これは粒子法の特徴と して,入力された外力が粒子の微小振動に転換される 傾向にある事が一因として考えられる¹⁸⁾.また,数値 解析を安定させるために導入している人工粘性による 影響も考えられる.そこで,人工粘性を除いた場合に ついても解析を行ったが,スロッシングが定常状態に 達する前に粒子が飛び散り解析が破綻した.

解析に用いる粒子数の影響を調べるために、初期粒 子配置間隔を二分の一、四分の一にしたケースについ ても解析を行ったが、図-5からほとんど変化はなかった.

(4) 動水圧分布

Housner¹⁹⁾は、図-2に示す座標系において慣性力による動水圧を次式のように求めた.

$$p = \rho \, a \, H \, \sqrt{3} \left(\frac{h}{H} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right) \frac{\sinh \sqrt{3} \frac{x}{H}}{\cosh \sqrt{3} \frac{l}{H}} \tag{25}$$

一方,スロッシングによる自由表面の変化による動水 圧を次式のように求めた.



図-6 SPH 解析による水圧分布

$$p = -\rho \frac{l^2}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right) \frac{\cosh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{y}{l}}{\sinh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{H}{l}} \omega^2 \theta_H \quad (26)$$

ここで, θ_H は自由表面の水平面に対する傾きである.式(25)と式(26),さらに静水圧を足し合わせたものが動水状態における各座標での圧力となる.

図-6に加振開始から3.0秒後,7.0秒後の圧力分 布のSPH法による解析結果を示す.一方,図-7は同 様に加振開始から3.0秒後,7.0秒後について,SPH 解析によって得られた流体粒子の圧力を横軸に,各流 体粒子位置に置ける圧力をHousnerの式で求めた値を 縦軸にとってプロットしたものである.ただし,

Housner の式の計算に必要な水面の傾き θ は, SPH 解析結果の波高から求めた値を用いた.加振開始から 3.0秒後ではプロットした点が傾き1の直線に沿って分 布しており, SPH解析によって精度良く流体中の圧力 が求められている.一方, 7.0秒後では,ほとんどの 流体粒子について SPH解析結果の方がHousner の式か ら求めた値よりも大きくなっている.これは,水面変 形が大きくなってくると,例えば図-7(b)のように水面



(b) 7.0 秒後

図-7 SPH 解析と Housner による理論値との比較



図-8 タンク側壁に作用する荷重

形状が直線的でなくなり Housner の式を導出する際の 水面形状が直線的であるという仮定が満足されなくな ることが原因として考えられる.

(5) タンク側壁に作用する荷重

図-8は、各時刻においてSPH解析結果から得られた

圧力を積分することでタンク側壁に作用する荷重を求 め、Housnerによる理論値と比較したものである.両者 は良く一致している.時刻が進みスロッシングの振幅 が大きくなるにしたがって、SPH解析結果と理論値と の違いが現れてくるのは、(4)で述べたものと同様に、 理論式を導く際水面が直線的であるという仮定が成り 立たなくなることが一因として挙げられる.

5. 結論

本論文ではSPH法を用いてスロッシング解析を行い, スロッシング荷重評価の妥当性を検証した.SPH法に よるタンクのスロッシング解析では,周期については実 験値と良く一致し,波高についてはやや小さい値が得 られた.また,SPH法による数値解析によって求めた 静水状態における圧力分布は理論値と良く一致した. スロッシング中の流体の圧力について,スロッシングの 振幅が小さい時にはSPH解析結果と理論値がほぼ一致 し,振幅が大きくなるとSPH解析の方が大きな値とな った.さらに,スロッシング中にタンクの側壁に作用す る荷重に関しても,SPH解析により理論値と良く一致 する値を得ることができた.

以上の結果は、スロッシングによるタンクに作用す る荷重を評価するにあたり、SPH解析が有効な手段で あることを示している.SPH解析では複雑なタンクの形 状や遮蔽板による影響を容易に解析に取り入れること ができるので、未だ不明な点の残る人工粘性や粒子分 割の影響を明らかにした上で、スロッシング抑制対策 の検討に利用できるように発展させたい.

参考文献

- G.R. Liu, M.B. Liu: Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method, World Scientific Publishing, 2003.
- 2) L.B. Lucy: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The Astronomical Journal*, vol.82,

No.12, pp.1013-1024, 1977.

- R.A. Gingold and J.J. Monaghan: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Vol.181, pp.375-389, 1977.
- 4) 伊澤精一郎他:自由表面及び相変化を伴う非圧縮性流れのSPHシミュレーション,第19回数値流体力学シンポジウム,2005.
- J.J. Monaghan: Simulating Free Surface Flows with SPH, Journal of Computational Physics, Vol.110, pp.399-406, 1994.
- 6) J.P. Gray, J.J. Monaghan and R.P. Swift: SPH elastic dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.6641-6662, 2001.
- 7) 酒井譲,山下彰彦: SPH理論に基づく粒子法による構造 解析の基礎的検討,日本機械学会論文集A編,Vol.67, No.659, pp.1093-1102, 2001.
- 8) 朱武燮, 酒井譲,山下彰彦: SPH法による弾塑性解析手法の検討(第1報,2次元小変形問題),日本機械学会論文集A編,Vol.68,No.669,pp.772-778,2002.
 0) 第回志志,中山三, SPU社による202.
- 9) 篠原寿充,中山司: SPH法による液体一固体連成問題の 数値解析,第17回数値流体力学シンポジウム,2003.
- 10)篠原寿充,岡部啓一,中山司:ウォータージェットによる固体切断の数値シミュレーション,中央大学理工学研究所論文集, Vol. 10, pp. 21-32, 2004.
- 11)陸田秀実、土井康明: SPH法による砕波と沿岸構造物の 相互作用に関する数値解析,第19回数値流体力学シン ポジウム,2005.
- 12)M.Naili, T. Matsushima and Y. Yamada: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.8, pp.591-599, 2005.
- (13) 学本英貴他:豊浦砂の高解像度X線CT画像を利用した三次元多孔質体モデルの構築およびSPHによる透水シミュレーション,応用力学論文集, Vol.9, pp.649-657, 2006.
- レーション,応用力学論文集, Vol.9, pp.649-657, 2006. 14)小野祐輔,西田真悟,清野純史:SPH法による土構造物 の弾塑性解析,応用力学論文集, Vol.9, pp.717-723, 2006.
- 15)西田真悟,小野祐輔,清野純史: SPH法による土構造 物の崩壊シミュレーション,第12回日本地震工学シンポ ジウム論文集,2006.
- 16)小野祐輔,西田真悟,清野純史: SPH法による盛土破 壊シミュレーションとそのCG化,地域安全学会論文集, Vol.8, pp. 1-6, 2006.
- 17)T. Okamoto and M. Kawahara: Two-dimensional sloshing analysis by the Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods, Proceedings of JSCE, Vol.441/I-18, pp.39-49, 1992.
- 18) 越塚誠一: 粒子法, 丸善, 2005.
- 19)G.W. Housner: Dynamic Pressure on Accelerated Fluid Containers, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1957.

(2007.4.6 受付)

EVALUATION OF SLOSHING INDUCED LOAD ACTING ON LIQUID STORAGE TANK WALL USING SPH SIMULATION

Yusuke ONO, Tetsuya IWAMOTO and Charles SCAWTHORN

Sloshing generated by earthquake ground motion can cause a severe damage to a liquid storage tank. To avoid a damage the prediction of the load acting on the storage tank walls is fundamental and the numerical simulation will be much helpful. In this paper the SPH(smoothed particle hydrodynamics) is introduced to simulate sloshing in the rigid rectangular tank. The sloshing load acting on the storage wall was evaluated from the pressure of the SPH particles. The load estimated by the SPH shows good agreement with those from the laboratory test and theory shown in the literatures.