

解析信号ウェーブレットによる 時間周波数特性を考慮した入力地震動表現

本田 利器¹・宮本 崇²

¹正会員 工博 東京大学 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

²学生会員 東京大学 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

設計地震動の表現にはフーリエ表現が広く用いられるが、これは、地震動の周波数特性の時間的变化（時間周波数特性）を表現するには適しておらず、例えば非線形応答解析への適用を考えると使いにくさがある。本研究では、近年、波形合成に使われるようになってきているウェーブレット変換を利用し、入力地震動の使いやすい波形の表現を提案し、その有効性を検証する。

Key Words : Wavelet Transform, Time-Frequency Characteristics, Input Ground Motion, Fourier Transform, Nonlinear Dynamic Analysis

1. はじめに

設計地震動の規定には、構造物の線形性を前提に、地震動や構造物の周波数特性に着目したフーリエ振幅スペクトルや応答スペクトルがよく用いられている¹⁾。これらは、線形系の応答を考慮するには適しているが、構造物の非線形挙動を考慮するには不十分である。性能照査型の設計による精緻な設計が主流となる中で、耐震設計においてもその高度化は重要な課題である。しかし、前述の設計地震動規定法では非線形構造物に与える影響を定量的に議論することができないため、応答の評価を非線形系に拡張した新しい設計地震動の設定法を構築しなければならない。

構造物の非線形応答には、入力地震動の周波数特性だけでなく、その時間変化をとらえた時間周波数特性が大きな影響を与えることが分かっている。本研究は、時間周波数特性を考慮できるツールであるウェーブレット変換を用いて地震動を表現することが、非線形応答を考慮する上で有効な手法であることを検証する。

2. ウェーブレット変換

(1) ウェーブレット変換

時系列信号 $s(t)$ のウェーブレット変換 $T(a, b)$ は次のように定義される。

$$T(a, b) = \int s(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (1)$$

ただし、

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2)$$

$$a(\neq 0), b \in R \quad *: \text{複素共役}$$

a はスケールと呼ばれ、ウェーブレット関数の卓越周波数帯を表すパラメータである。また、 b はシフトと呼ばれ、ウェーブレット関数の卓越時間帯を表すパラメータである。式 (1) は、パラメータ a と b で示される周波数帯、時間帯で値の卓越するウェーブレットと信号との内積をとることで、信号の時間周波数特性を検出することを示している。

(2) 連続ウェーブレットと離散ウェーブレット

ウェーブレット関数の値が卓越する周波数帯と時間帯は、スケール a 、シフト b という 2 つのパラメータによって決まる。この a, b を連続的に変化させながらウェーブレット変換を行う場合、それは連続ウェーブレット変換と呼ばれ、一方、 a, b を離散的に変化させる場合は離散ウェーブレット変換と呼ばれる。

離散ウェーブレット変換では、整数 j, k を用いて次のようにウェーブレットを構成することが多い。

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad j, k \in Z \quad (3)$$

このとき、 $\psi(t)$ を適切にとることによってウェーブレット関数は正規直交系をなす。

ウェーブレット係数の自乗振幅はスカログラムと呼ばれ、信号の時間周波数平面におけるエネルギー分布を示す。時系列信号をウェーブレット変換し、そのスカログラムを時間周波数平面に対してプロットすることで、その信号の時間周波数特性を表現することができる。

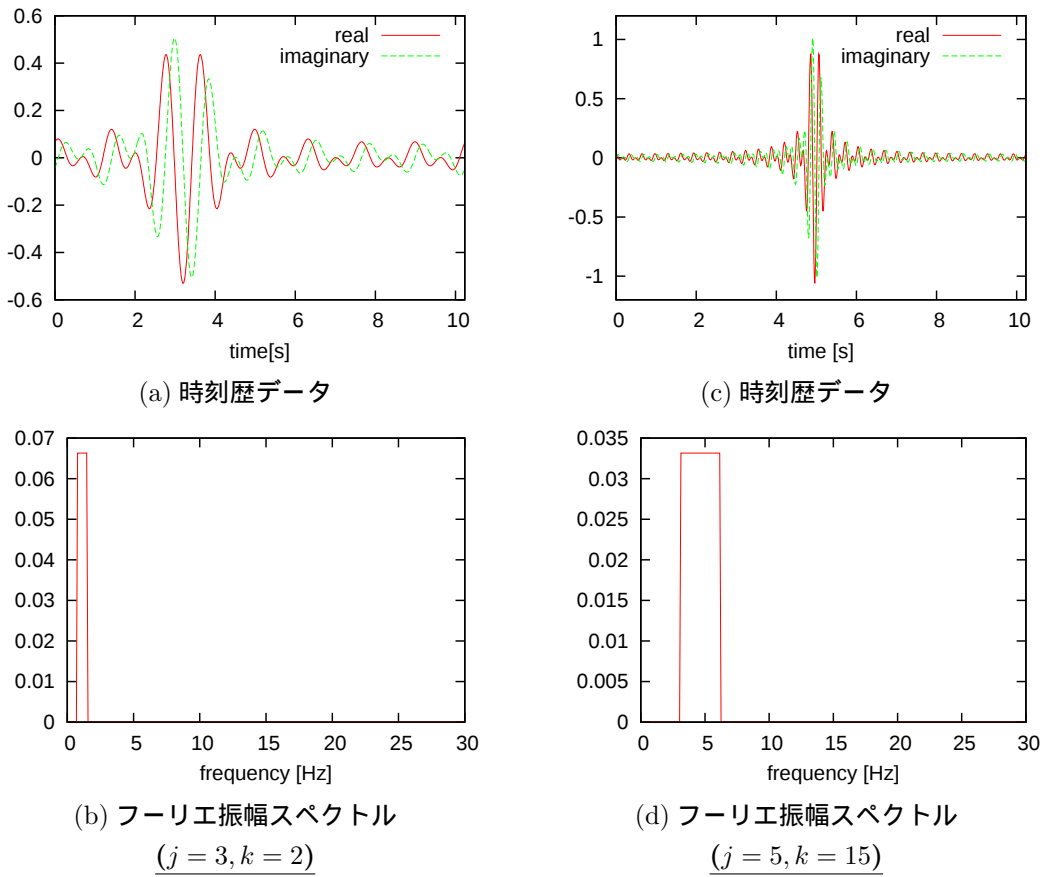


図-1 解析信号ウェーブレットの例

3. 解析信号ウェーブレットによる波形表現

(1) 解析信号ウェーブレット

離散ウェーブレット変換において正規直交系をなすウェーブレットは複数提案されている．本研究では大濱らが用いている解析信号ウェーブレット²⁾を用いる．これは，前田ら³⁾が波形合成に用いている sinc wavelet を解析信号としたものに相当し，Complex wavelet の例として用いられる^{4),5)}ものである．

解析信号ウェーブレットは，離散変換として利用することで正規直交系を張ることと，ウェーブレット関数が解析信号であることの2つの条件を満たした複素ウェーブレットである．解析信号とは，フーリエ解析を行った際に負の周波数領域において値が0となり，正の周波数領域のみにおいて特性が規定される信号である⁶⁾．

一般のウェーブレット変換においてスカログラムは複素信号の偏角に依存する．この特性は shift variance と呼ばれ，これは後述するように波形合成においては好ましくない．しかし，解析信号ウェーブレットを用いたウェーブレット変換では，スカログラムが信号の偏角によらず一定の値をとる shift invariance という特性を持ち，ウェーブレットの持つエネルギーをウェー

ーブレット係数の絶対値だけで規定することができる．

例として， $\cos(\omega_0 t + \theta)$, ($\omega_0 \geq 0$) という関数のスカログラム $|a_{j,k}|^2$ を考える．解析信号でないウェーブレットを用いた場合，この関数のウェーブレット係数は

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= \int \cos(\omega_0 t + \theta) \psi_{j,k}^*(t) dt \\ &= \int \frac{1}{2} \{ e^{i(\omega_0 t - \theta)} + e^{-i(\omega_0 t - \theta)} \} \psi_{j,k}^*(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \delta(\omega - \omega_0) e^{-i\theta} + \delta(\omega + \omega_0) e^{i\theta} \hat{\psi}_{j,k}^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} \{ e^{-i\theta} \hat{\psi}_{j,k}^*(\omega_0) + e^{i\theta} \hat{\psi}_{j,k}^*(-\omega_0) \} \end{aligned} \quad (4)$$

となり，そのスカログラム $|a_{j,k}|^2$ は θ に依存する．なお，本論文では， $\hat{\cdot}$ はフーリエ変換を表す．

一方，解析信号ウェーブレットを用いた場合， $\omega < 0$ においては $\psi_{j,k}(\omega) = 0$ となるため，式(4)の第2項は0になり，スカログラムは

$$|a_{j,k}|^2 = |\hat{\psi}_{j,k}^*(\omega_0)|^2 / 4 \quad (5)$$

となり， θ に依存しないことが確認できる．

図-1に，解析信号ウェーブレットの時刻歴波形と周波数特性（フーリエ振幅）の例を図示する．周波数領域ではコンパクトサポートであるが，時間領域での局在性は，あまり高くないことが分かる．例えば Morlet ウェーブ

レットはより高い局在性を示す。ただし、Morlet ウェーブレット関数を用いた場合、正規直交基底を構成することができないため、ここで考えている目的には適さない。

(2) フーリエ変換との類似性

時刻歴波形を合成するとき、まず周波数特性を規定し、それに基づいてフーリエ変換を利用して波形を合成するという手順は広く用いられている。

ここでは、波形合成において、本研究でその利用を提案する解析信号ウェーブレットを用いた変換が、フーリエ変換と同程度の使い易さを有していることを示す。

フーリエ変換におけるフーリエ係数 $\hat{s}(\omega)$ は、その絶対値と偏角を用いて

$$\hat{s}(\omega) = |\hat{s}(\omega)|e^{i \arg(\hat{s}(\omega))} \quad (6)$$

と表される。

$|\hat{s}(\omega)|$ は「振幅」、 $\arg(\hat{s}(\omega))$ は「位相」と呼ばれ、波形の特性を表す際に重要なパラメタである。振幅は当該の周波数帯が持つパワーに対応し、位相はその複素平面での回転を表す。後者は時間特性においても重要な役割を果たすことが知られている。また、フーリエ変換は正規直交系をなすこともその利便性の理由の一つである。

フーリエ変換のこのような利便性は、その基底関数 ($\exp i\omega t$) が、shift invariance であることによる。前節で述べたように、解析信号ウェーブレットは shift invariance であるため、解析信号ウェーブレットを用いた離散ウェーブレット変換も、上に記したフーリエ変換の特長と同様の特長を有する。

具体的には以下のように言える。ウェーブレット係数 $a_{j,k}$ を絶対値と偏角を用いて

$$a_{j,k} = |a_{j,k}|e^{i \arg(a_{j,k})} \quad (7)$$

と表すとき、 $|a_{j,k}|$ はウェーブレット基底に相当する成分のパワーに対応し、 $\arg(a_{j,k})$ は当該の基底の複素平面での回転を表していると考えられる。したがって、前者を「振幅」とし、後者を「位相」とみなして、フーリエ変換と同様の表現をすることができる。また、解析信号ウェーブレットを用いた離散ウェーブレット変換は正規直交系をなす点においてもフーリエ変換と同様である。

以上のことから、解析信号ウェーブレットを用いた離散ウェーブレット変換がフーリエ変換と同じ利便性を有する波形の表現法であることが示唆される。

4. 非線形応答特性に基づく入力波形合成法としての有用性

フーリエ変換やウェーブレット変換は、時系列信号を核関数の和として表現する。展開されたおのおのの核関数は、元の時系列信号の非線形応答に対して異なる影響を有している。このとき、展開に用いている核関数の少数によって元の信号の非線形応答を高い精度で近似することができるならば、それは非線形応答に対して大きな影響を有している特性部分を良く抽出しているといえる。本節では、このような非線形応答に対する影響の大きな特性部分の抽出という点において、ウェーブレット変換がフーリエ変換よりも優れていることを検証する。

(1) 検討方法

フーリエ変換とウェーブレット変換を、以下の方法で比較する。

ある地震波形の非線形応答を考える際に、構造物の一次剛性がガウス分布で与えられる不確定性を有する場合を考える。剛性の不確定性により、地震動による応答変位も不確定性を有する。このときの最大応答変位の確率密度関数を考える。ここで、剛性に不確定性を考慮するのは、これにより、ある範囲の剛性の値に対する応答の平均的な特性を考慮することになり、指標としてのロバスト性が高まることが期待されるからである。

一方で、地震波形のフーリエ変換とウェーブレット変換を考える。変換によって与えられる係数の中で、振幅が大きい一定数のものには真値を与え、残りの係数に対してはその位相に $[0, 2\pi]$ で一様な乱数を与える。こうして係数の一部が変化した波形において、再び剛性にガウス分布の不確定性を与えた系の最大応答変位の確率密度関数を計算する。

フーリエ係数やウェーブレット係数の一部にランダムな位相を与えた波形に対する最大応答変位の確率密度関数は、元の波形による最大応答変位の確率密度関数とは異なるものとなる。しかし、前者において、真値を与える係数の数を増やしていくと、その形は次第に元の確率密度関数の形に収束していくはずである。このとき、もし真値を与える係数の数が少ないにも関わらず確率密度関数を精度良く近似できるならば、それは入力波形の中で非線形応答に対して影響の高い部分を、少ない係数で表現していることになるといえる。

そこで、フーリエ係数の一部にランダムな位相を与えた波形と、ウェーブレット係数の一部にランダムな位相を与えた波形について、それぞれに対する最大応答変位の確率密度関数の収束の速さを、入力波形全体

表-1 応答系の各パラメータの値		
パラメータ	質点系 1	質点系 2
質量 m	1.0	1.0
減衰定数 c	5.0	5.0
一次剛性 k_0	800.0	100.0
二次剛性 k_1	200.0	20.0
降伏耐力 σ	640.0	500.0

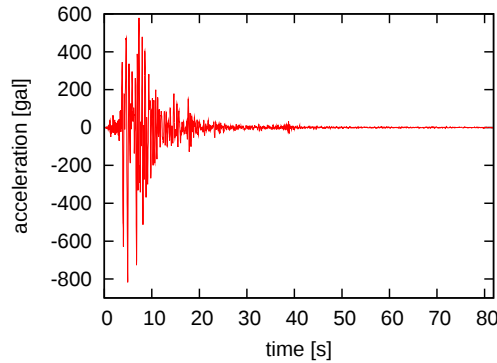


図-2 検討に用いた波形データ

のエネルギーのうち真値を与えた係数が受け持つエネルギーの割合、および2つの確率密度関数の距離を測る判別量である Kullback-Leibler 距離の2つの尺度を用いて定量的な比較を行う。

Kullback-Leibler 距離は2つの確率密度関数をそれぞれ $p(x), q(x)$ として

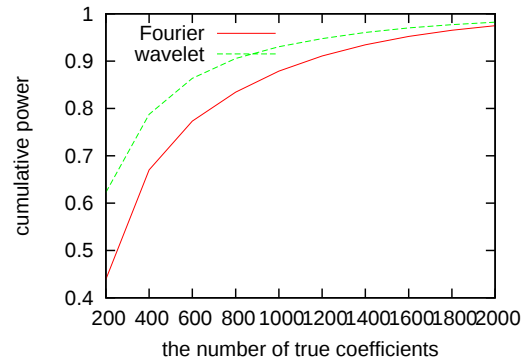
$$D(p, q) = \int p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad (8)$$

として定義される⁸⁾。ここでは、原波形に対する最大応答変位の確率密度関数と、係数の一部にランダムな位相を与えた波形に対する最大応答変位の確率密度関数の Kullback-Leibler 距離を計算し、その変遷の様子を比較した。

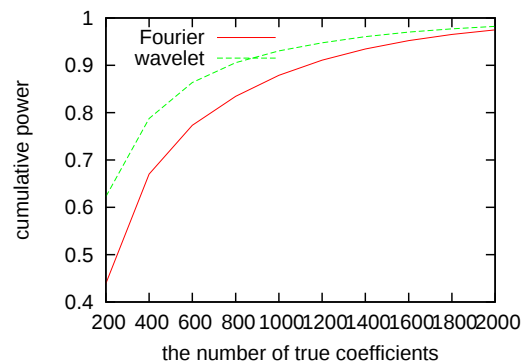
(2) 使用データ

以下に示す波形例を用いて検討を行った。入力波形として用いる地震動は、兵庫県南部地震において神戸海洋気象台で観測された波形(NS成分)を用いた。図-2に波形の時刻歴データを示す。解析において、サンプリング時間間隔 Δt は0.02で、データ数は4,096である。

非線形応答の計算には1質点系のバイリニアモデルを用い、数値計算は本田らの非反復積分法⁹⁾を利用した。応答系は固有周期の異なる2つの質点系を用いて検討を行い、各パラメータはそれぞれ表-1のように与えた。パラメータのうち、一次剛性は、表に示される値を平均として、その10%の値を標準偏差とするガウス分



(a) 質点系 1



(b) 質点系 2

図-3 係数に真値を与えた基底が受け持つエネルギーの累積割合の比較

布で与えられる不確定性を有するものとし、それ以外のパラメータは確定値とした。

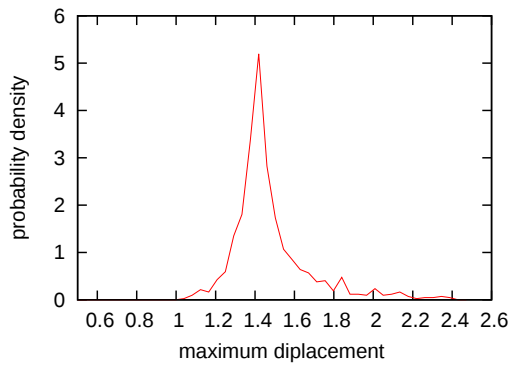
(3) 計算結果

まず、真値を与えた係数に相当する基底が波形全体のエネルギーの中で受け持つエネルギーの割合を、累積グラフとして表したのが図-3である。ウェーブレット変換によるグラフとフーリエ変換によるグラフを比較すると、ウェーブレット変換の方が少ない基底数でより大きなエネルギーを受け持っていることが分かる。フーリエ表現とウェーブレット表現では項数はおなじであるので、これは、波形のエネルギーをフーリエ変換よりも少ない基底で表現できることを示しており、ウェーブレット変換の波形表現の効率の高さを意味する。

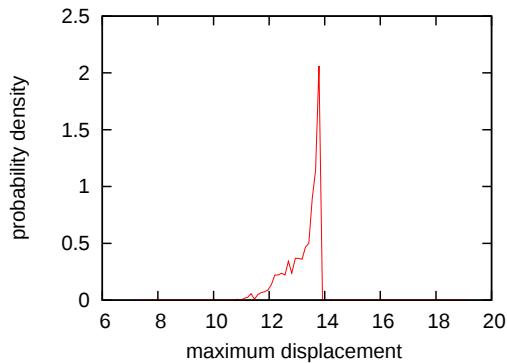
以下に、非線形応答解析のための入力波形の表現法としての性能について検討する。

オリジナルの入力地震波形による最大応答変位の確率密度関数を図-4に示した。一次剛性にガウス分布を与えない場合、応答変位の最大変位は質点系1では1.43、質点系2では13.64となる。確率密度関数はこれらの値のまわりに分布している。

フーリエ係数やウェーブレット係数の一部を真値と



(a) 質点系 1

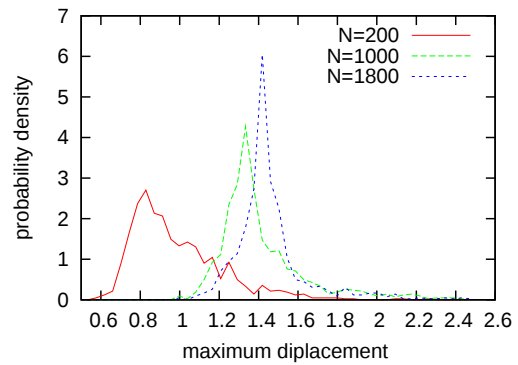


(b) 質点系 2

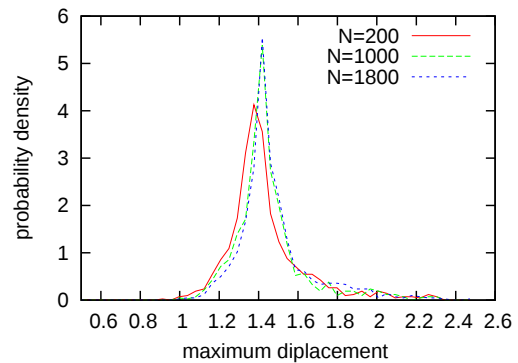
図-4 原波形による最大応答変位の確率密度関数

し，残りの係数の位相をランダム値とした場合の最大応答変位の確率密度関数を，真値を与える係数の個数を N として質点系 1 は $N = 200, 1000, 1800$ ，質点系 2 は $N = 200, 600, 1000$ のときにそれぞれプロットしたものが図-5 および図-6 である．2 つのグラフを比較すると，フーリエ係数の位相にランダム値を与えた場合の確率密度関数は， $N = 200$ のときは原波形の確率密度関数の形状とは離れており， N の数が増えていくにつれて形状が近付いている．一方，ウェーブレット係数の位相にランダム値を与えた場合の最大応答変位の確率密度関数は， $N = 200$ においてその概形が原波形による最大応答変位の確率密度関数に近く， N の値が大きいか場合にも高い精度での近似を与えている．

係数に真値を与える数 N による Kullback-Leibler 距離の変遷を比較したのが図-7 である．質点系 1 と質点系 2 の共に，ウェーブレット係数の一部にランダムの位相を与えた波形の方が Kullback-Leibler 距離の値がフーリエ変換による波形のものより小さく，確率密度関数の収束が速いことが分かる．なお，質点系 2 において， $N = 200$ の結果は図に示されていない．これは，フーリエ変換にランダムの位相を与えた波形と原波形のそれぞれに対する最大応答変位の確率密度関数の違いが大きかったため，Kullback-Leibler 距離算出の計算が発散したためである．



(a) フーリエ係数



(b) ウェーブレット係数

図-5 係数の位相にランダムネスを与えた場合の最大応答変位の確率密度関数 (質点系 1)

これらの結果は，ウェーブレット変換は，フーリエ変換よりも少ない項数で，非線形系の応答に与える影響をよく抽出できることを示しており，その意味で，非線形応答を考慮して入力波形を合成するのに適した手法であることが示唆される．

5. ウェーブレット表現における伝達関数

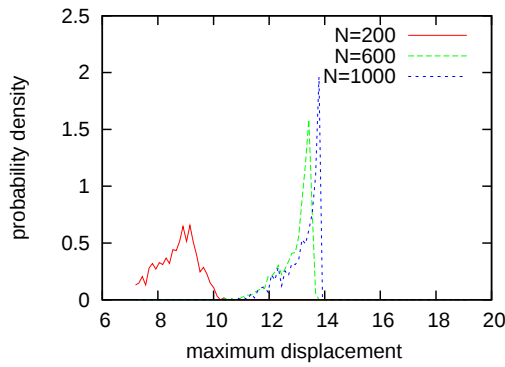
提案しているウェーブレット表現の使いやすさを示す例として，この表現が，フーリエ変換と同様に，線形系の応答を伝達関数をもちいて容易に表せることを紹介する．

(1) 伝達関数の保持

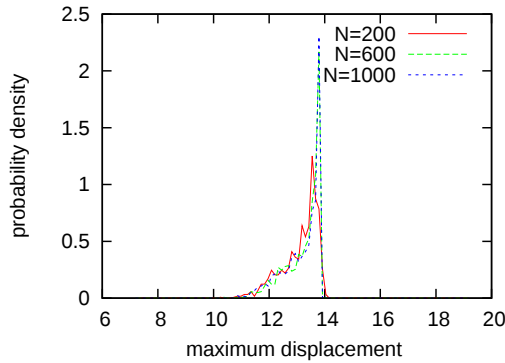
ある時系列外力 $f(t)$ が与えられたときの線形の一質点系の応答変位 $x(t)$ は運動方程式を解くことで得られる．これは，インパルス応答関数を $r(t)$ として，

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)r(t-\tau)d\tau = f(t) \circ r(t) \quad (9)$$

と， $f(t)$ と $r(t)$ の畳み込みによって表すことができる．(畳み込みを $\circ$ で表す．) 関数どうしの畳み込みは，周波数領域では，それぞれのフーリエ変換の積で表現さ



(a) フーリエ係数



(b) ウェーブレット係数

図-6 係数の位相にランダムネスを与えた場合の最大応答変位の確率密度関数 (質点系 2)

れることを用いると式 (9) は

$$\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{r}(\omega) \quad (10)$$

と表される ($\hat{\cdot}$ はフーリエ変換を表す.)

このように、周波数領域では伝達関数を介して入力と出力の関係性を簡単に記述することができ、出力から入力を求める逆演算も可能となることは、線形応答解析を行う上でのフーリエ変換の利点の一つである。

ウェーブレット変換においても、入力のウェーブレット係数と出力のウェーブレット係数間の関係を、伝達関数を用いて簡潔に記述することができることを、以下に示す。

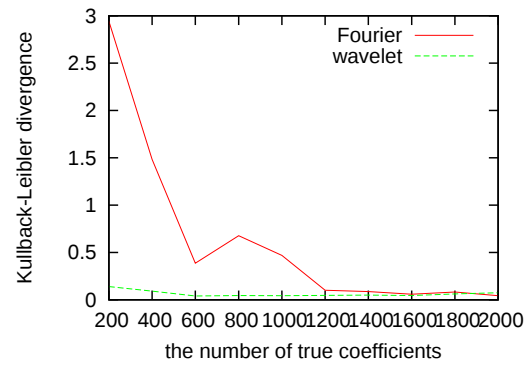
ウェーブレット変換の定義式 (1) は、

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \int s(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \\ &= \int s(t) \psi_a^*(t-b) dt \end{aligned} \quad (11)$$

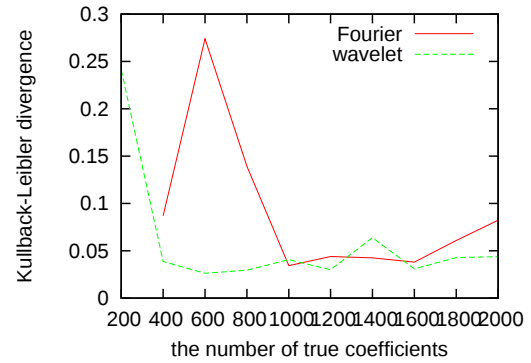
となる。ただし、 $\psi_a(t-b) = \psi(\frac{t-b}{a})$ である。

ここで、 $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$ なる $\tilde{\psi}(t)$ を用いて式 (11) を表すと、

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \int s(t) \tilde{\psi}_a^*(b-t) dt \\ &= s(b) \circ \tilde{\psi}_a^*(b) \end{aligned} \quad (12)$$



(a) 質点系 1



(b) 質点系 2

図-7 Kullback-Leibler 距離による確率密度関数収束の比較

となり、シフト b を変数とした $s(b)$ と $\tilde{\psi}_a^*(b)$ との畳み込みとして表すことができる。したがって、式 (12) は周波数領域において

$$\hat{T}(a, \omega) = \hat{s}(\omega) \cdot \hat{\tilde{\psi}}_a^*(\omega) \quad (13)$$

となる。ただし、 $\hat{T}(a, \omega)$ は、 $T(a, t)$ の t に関するフーリエ変換を表す。

入力 $f(t)$ と応答 $x(t)$ のウェーブレット係数を、それぞれ、 $T_{in}(a, b)$ と $T_{out}(a, b)$ を表すと、式 (10) より、

$$\begin{aligned} \hat{T}_{out}(a, \omega) &= \hat{x}(\omega) \cdot \hat{\tilde{\psi}}^*(a, \omega) \\ &= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{r}(\omega) \cdot \hat{\tilde{\psi}}^*(a, \omega) \\ &= \hat{r}(\omega) \cdot \hat{T}_{in}(a, \omega) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

以上のことから、ウェーブレット変換はフーリエ変換と同様の伝達関数を保持し、入力のウェーブレット係数と出力のウェーブレット係数間の関係を簡潔に記述できることが分かる。

(2) 応答の時間周波数特性による入力波の規定

上述したように、ウェーブレットが伝達関数を保持するという性質を利用することで、応答時間周波数特性による入力波の規定が可能となる。例えば、入力波の規定に広く用いられている応答スペクトルの代替と

して応答の時間周波数特性を用いることが考えられる．これは，構造物の応答の周波数特性の時間的な変化を規定するものであるため，非線形応答を考える際には重要な情報を与えるものとなると考えられる．

また，一度定めた入力波形を，地盤条件等を考慮して補正する場合等も，伝達関数を保持するという性質を用いれば，フーリエ変換による波形表現の場合と同様に容易に行える．

例えば，ある地点での地震動に対する線形系の応答の時間周波数特性が $T_0(t, \omega)$ であるとし，その地点で想定されている地盤条件の伝達関数が $H_0(\omega)$ であるとする．一方，その地点で想定すべき地盤条件の伝達関数が $H_1(\omega)$ であるとする．このとき，対象地点での地震動の線形系の応答の時間周波数特性は，

$$T_1(t, \omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_0(\omega)} \cdot T_0(t, \omega) \quad (15)$$

と補正することができる．これは，応答スペクトルを，地盤の伝達関数の周波数特性に応じた修正に相当するものであり，応答計算をすることなく応答特性を評価できるという利点を継承しているものと考えられる．

6. まとめ

本研究では，解析信号ウェーブレットによる入力地震動の表現を提案し，非線形応答を考慮する際の提案手法としての有用性をフーリエ変換と比較しながら検証した．非線形応答を考える際に重要となる時間周波数特性を表現しやすいという点で，提案した手法はフーリエ変換による表現よりも有利であることを示した．ま

た，提案する手法は，shift invariance，正規直交系の構成，伝達関数の保持等の点において，フーリエ変換と同等の使い易さも有している．今後は適用事例を増やし，具体的な適用法等も含めた体系の構成を考えたい．

参考文献

- 1) 大崎順彦，新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1994
- 2) 大濱，本田，「解析信号ウェーブレットを用いた入力地震動の合成」，土木学会年次学術講演会講演概要集第1部 Vol.58, pp.597-598, 2003
- 3) 前田，佐々木，山本，「Sinc ウェーブレットを用いた非定常性を有する模擬地震動作成手法の研究」，日本建築学会構造系論文集，第553号，pp.33-40, 2002
- 4) N. G. Kingsbury, "Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals", *Appl. Comp. Harm. Anal.*, Vol. 10, No.3 pp.234-253, 2001.
- 5) R. v. Spaendonck et al. "Orthogonal Hilbert transform filter banks and wavelets", VI-505, *ICASSP*, 2003.
- 6) L. コーエン:時間-周波数解析，朝倉書店，1998
- 7) Christopher, Gilbert: A Practical Guide to Wavelet Analysis, *Bulletin of the American Meteorological Society* Vol. 79, No.1, pp.61-78, 1998
- 8) 堀口，佐野:大学院情報理工学 2 情報数理物理，講談社，2000
- 9) 本田，澤田：非線形動的 FEM 解析の並列計算のための非反復積分法，応用力学論文集 Vol.3, pp.629-636, 2000

(2007 年 4 月 6 日 受付)

INPUT GROUND MOTION REPRESENTATION CONSIDERING TIME-FREQUENCY CHARACTERISTICS USING ANALYTICAL SIGNAL WAVELETS

Riki HONDA, Takashi MIYAMOTO

Fourier Transform, which is widely used for seismic design purposes, is not to describe the temporal variation of frequency characteristics (time-frequency characteristics) and therefore not necessarily suitable for input motion synthesis. We propose a scheme to use wavelet transform in a manner familiar to users. The performance of the proposed scheme is verified by numerical simulations.