

表面波（レイリー波、ラブ波）の複素固有値解析について

森尾 敏¹・加登文学²

¹舞鶴工業高等専門学校・建設システム工学科 教授
(〒625-8511 京都府舞鶴市字白屋234番地)

E-mail: morio@maizuru-ct.ac.jp

²舞鶴工業高等専門学校・建設システム工学科 助手
(〒625-8511 京都府舞鶴市字白屋234番地)

E-mail: kato@maizuru-ct.ac.jp

不整形地盤の地震応答解析は、通常、薄層要素法、境界要素法を含めた有限要素法解析により行われる。しかし、この種の解析法では実体波と表面波を一体として取り扱っているため、両者を区別することが困難と考えられてきた。このため、その重要性は指摘されながらも、表面波の寄与に関する研究はほとんど実施されていない。筆者らは、不整形地盤の地震応答解析において、実体波と表面波の寄与率を定量的に評価する研究を進めている。本報告では、評価手法の根幹をなす成層地盤（1次元問題）の複素固有値解析を詳述し、波動論との比較から本解析法の検証例を示す。又、表面波（レイリー波、ラブ波）と実体波の固有振動との関係を提示する。

Key Words : *Complex eigen value, Surface wave, Body wave, Rayleigh wave, Love wave, S wave, P wave, Dispersion, Mode shape*

1. はじめに

1995年の兵庫県南部地震では、神戸市域をほぼ東西にのびる細い帯状に震度Ⅶの被害区域が分布した。この震災の帯は、従来から活断層と認められていた六甲断層系に沿っているものの、1~1.5Km 南側に位置している。この要因として、基盤下から入射した地震波動と基盤横から入射した横方向に伝播する地震波動が境界より表層地盤に少し入った所で重なり合って増幅し、振幅が大きくなったものと解釈されている。また、1985年のメキシコ地震では、メキシコ市は震源から400Kmも離れているにもかかわらず、周期2~4秒の長周期地震動が数分にわたって継続し、数多くの高層建築が崩壊した。これは、メキシコ盆地内で地震波が反射を繰り返し、長周期成分が重なり合って地震動が増幅されたためと考えられている。このような長周期で継続時間の長い地震動は、関東平野のような堆積盆地内部でも発達することが知られており、同様の現象は大阪平野をはじめ世界中の平地、盆地で確認されている。

一方、不整形地盤の地震応答解析は、通常、薄層要素法、境界要素法を含めた有限要素法解析により行われるが、この種の解析法では、実体波と表面波

を一体化して取り扱っているため、両者を区別することが困難と考えられてきた。このため、強震時の地震応答解析において、その重要性は指摘されながらも表面波の寄与に関する研究はほとんど実施されていない。

筆者らは、不整形地盤の地震応答解析において、実体波と表面波の寄与率を定量的に評価する手法の開発を進めている^{1),2)}。この手法は、有限要素領域内の鉛直断面において、フーリエ変位振幅分布を一般化された表面波の複素固有モードの重ね合わせで表現し、各モードの寄与率を算定するものである³⁾。本報告では、評価手法の根幹をなす成層地盤（1次元問題）の複素固有値解析について詳述し、波動論との比較から本解析法の検証例を示す。又、表面波（レイリー波、ラブ波）と実体波の固有振動との関係を明らかにする。

2. 解析方法

(1) レイリー波

レイリー波をFEM（2次元平面ひずみ場）で取り扱う。固有モード{V}が各地層内で線形に変化する

ると仮定する離散化された考え方を用いと、一般化されたレイリー波の変位 $\{\delta\}$ は次式で表される。

$$\{\delta\} = \alpha \{V\} e^{i(\omega t - kx)} \quad (1)$$

ここに、 i は虚数単位、 x は水平方向座標、 ω は角振動数、 k は x 方向に伝播する波動の波数、 α は固有モードに関する係数（刺激係数）である。式(1)の仮定の下で、レイリー波の特性方程式は式(2)で表される固有値問題に帰着する^{4),5)}。

$$([A]k^2 + i[B]k + [G] - \omega^2[M]) \{V\} = \{0\} \quad (2)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[G]$ は剛性マトリックス、 $[M]$ は質量マトリックスであり、鉛直方向の要素分割数を n とすれば、これらのマトリックスはすべて $2n \times 2n$ の次元である。

式(2)から、深さ方向の地盤構造が決まれば、角振動数 ω での固有値 k_s と固有ベクトル $\{V\}_s$ が得られる。ここに、添字 s は s 次のモード形を表し、 $s = 1 \sim 2n$ である。なお、 $-k_s$ も固有値で、そのベクトル $\{V\}_s$ は水平成分のみ逆符号であり、正負の方向に伝播する同じ波形に対応する。以下、固有値 k が実数、複素数、虚数およびゼロの場合、固有ベクトル $\{V\}$ をそれぞれ実数モード、複素モード、虚数モードおよびゼロモードと呼ぶ。このうち、水平方向に伝播するモードは実数モードと複素モードであり、虚数モードとゼロモードは伝播しない。また、式(2)に $k=0$ を代入すると通常の実体波（P波とS波）の固有値問題に帰着する。すなわち、ゼロモードはP波またはS波の佇立した波形（鉛直伝播波動）に対応し、両波の固有振動数において現れる。この時、水平成分、鉛直成分とも実数となる。

実数モードは正常なレイリー波と呼ばれ、非減衰のとき（減衰定数 $h=0$ ）、水平成分が実数、鉛直成分が虚数となる性質がある。このことは、水平成分と鉛直成分の位相が 90 度ずれることを意味し、両者が同符号のとき粒子軌跡の回転方向は反時計回り、逆符号のとき時計回りである。実数モードの固有値 k はレイリー波の伝播特性を表し、振動数を f とすれば位相速度 C は式(3)、群速度 U は式(4)で表される。

$$C = 2\pi f / k \quad (3)$$

$$U = 2\pi df / dk \quad (4)$$

式(2)は、地盤—構造物連成系地震応答解析プログラムFLUSHの境界処理（エネルギー伝達境界）にも使用されている。森地ら⁶⁾は、通常の2次元FEM固有値解析で得られる固有振動モードにおける水平方向の節の数から波数と波長を求め、理論分散曲線との比較等からレイリー波と実体波の識別を行っているが、式(2)はこれを1次元問題として取り扱う。本方法は、積層構造にレイリー波が伝播する場

合の分散性の解析、チャンネル波の解析等を精度良く行うことができ、解析の容易さ、汎用性から表面波の一般的解析手法として優れたものと考えられる⁷⁾。さらに、剛性マトリックス $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[G]$ の中に複素剛性として容易に粘性減衰を導入できるという利点があり、粘性減衰の導入に伴う分散特性の評価が可能である。ただし、FEM固有の問題として、波動の波長に応じて要素分割を変える必要があること、半無限地盤を正確に表現することが困難であること等の問題がある。

(2) ラブ波

レイリー波の固有モード $\{V\}$ が水平、鉛直の2成分を持つのに対し、ラブ波の固有モード $\{V\}$ は紙面直角方向水平1成分のみを有する。基本的な考え方は、レイリー波の場合と同様である。

ラブ波の特性方程式は式(5)で表される固有値問題に帰着する。

$$([A]k^2 + [G] - \omega^2[M]) \{V\} = \{0\} \quad (5)$$

ここで、 $[A]$ 、 $[G]$ は剛性マトリックス、 $[M]$ は質量マトリックスであり、鉛直方向の要素分割数を n とすれば、これらのマトリックスはすべて $n \times n$ の次元である。ラブ波においても、実数モード、複素モード、虚数モードおよびゼロモードが存在し、水平方向に伝播するモードは実数モードと複素モードであり、虚数モードとゼロモードは伝播しない。式(5)に $k=0$ を代入すると通常の実体波（SH波）の固有値問題に帰着する。実数モードは正常なラブ波と呼ばれ、非減衰のとき、水平、鉛直成分とも実数となる。

3. 解析プログラムの検証

ここでは、波動論による理論分散曲線との比較から、作成した複素固有値解析プログラムの検証を行う。

(1) レイリー波の固有値解析の検証

図-1 に示すように、層厚 $H=60\text{m}$ の表層地盤の下に弾性波速度の速い基盤層を有する2層構造地盤を想定した。基盤層は半無限に続くものと仮定した。ここで、図中の V_s はS波速度、 V_p はP波速度、 ρ は質量密度、 ν はポアソン比で、添字0は基盤層、1は表層地盤を表す。減衰定数は、ほぼゼロ ($h=0.001$) とした。FEM要素分割は、30HzのS波波長の $1/4$ 以下をめどに、表層地盤を15分割 ($4\text{m} \times 15 = 60\text{m}$)、基盤層を15分割 ($8\text{m} \times 15 = 120\text{m}$) した。また、半無限地盤を表現するために基盤層の下側に層厚 D ($D=1.5\lambda$) で基盤層と同じ物性を有する層（8分割）を付加した。ここに、 λ は対象とする振動数におけるS波の波長である。

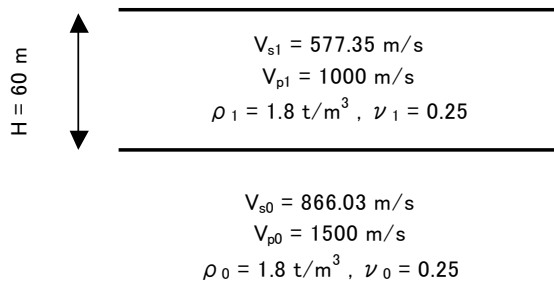


図-1 検証用の解析モデル

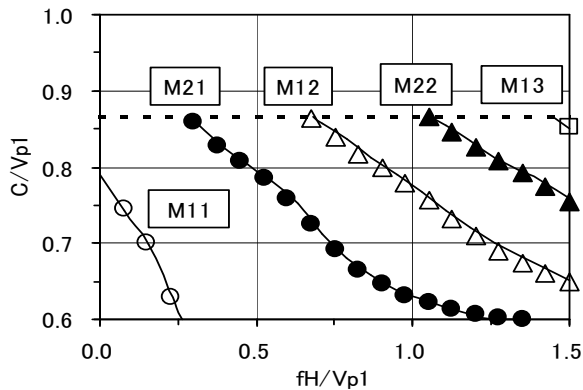


図-2 レイリー波の分散曲線

図-2 に位相速度 C の分散曲線を示す。横軸は無次元振動数 f^* ($=f H/V_{p1}$)、縦軸は無次元位相速度 (C/V_{p1}) であり、○、●、△、▲、□印が本解析結果、実線は田治米⁸⁾による理論分散曲線である。レイリー波の分類にはいくつかの方法があるが、本解析法は田治米が分類した M11 から M13 に至るモードの分散曲線を正確に表現している。ただし、ここでは実数モードを低次のものから (K_s の実数部が大きいものから) M11、M21、M12、M22、M13 としてプロットしており、M11 モードは基本モードに対応する。図中の破線より上の領域は、表層内の P 波のエネルギーが下層内へ S 波となって逃げる P 波リーキングモードと呼ばれる領域であり、M1n の延長は $C=V_{p1}$ に cut off frequency を持つ。一方、M2n の延長は $C=V_{p2}$ に上限を持ち、上下層のポアソン比が 0.5 に近づくにつれて、流体波の分散曲線に合成する⁸⁾。ただし、これらのリーキングモードについては、不明な点が多く、今後の検討課題である。

(2) ラブ波の固有値解析の検証

ラブ波の複素固有値解析の検証は、後述の 5. (2) で行う。

4. 解析モデルと解析条件

解析モデルを図-3 に示す。図-3(a) は、 $V_s=100$ m/s の層が半無限に続く、1 層系半無限地盤、同図(b)は $V_s=100$ m/s の層 (厚さ 10m) の下に $V_s=300$ m/s の層が半無限に続く、2 層系半無限地盤、同

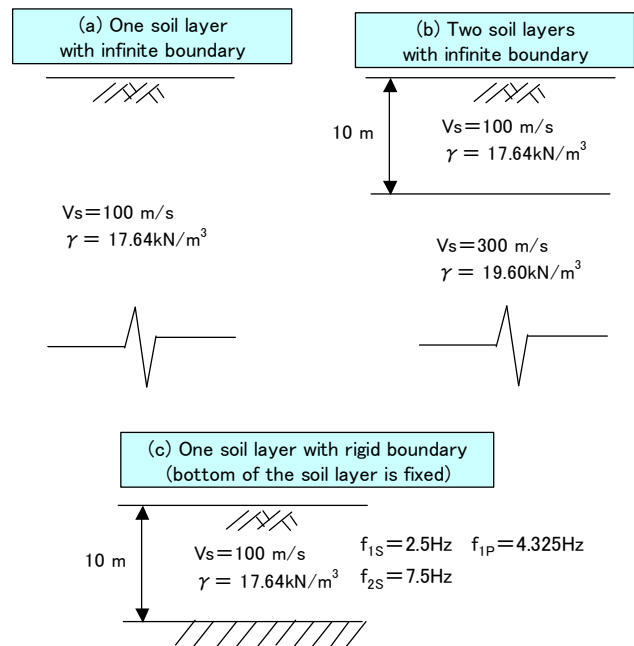


図-3 解析モデル

図(c)は $V_s=100$ m/s の層 (厚さ 10m) の下端が固定された、1 層系下端固定地盤である。単位体積重量は図中に示しており、レイリー波の解析では、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。同図(c)の 1 層系下端固定地盤においてのみ実体波の固有振動が存在し、1/4 波長則によると、S 波の 1 次、2 次の固有振動数は、それぞれ $f_{1s}=2.5$ Hz および $f_{2s}=7.5$ Hz、P 波の 1 次固有振動数は $f_{1p}=4.325$ Hz である。

減衰定数は、ほぼゼロ ($h=0.001$) とし、FEM 要素分割は、30Hz の S 波波長の 1/4 以下をめどにした。また、図-3(a)、(b)の半無限地盤を表現するために基盤層の下側に層厚 D ($D=1.5\lambda$) で基盤層と同じ物性を有する層を付加した。

4. 解析結果

(1) 1 層系半無限地盤の解析結果

図-3(a) に示す 1 層系半無限地盤において、ラブ波は存在しない。レイリー波は、位相速度 $C=91.94$ m/s 一定の分散しない基本モードのみが存在する。これらの結果は、波動論による理論解⁹⁾と一致する。

図-4(a) に 2.5Hz、同図(b)に 4.5Hz、同図(c)に 7.5Hz でのレイリー波の基本モードを示す。水平成分を●、鉛直成分を○で示しており、水平成分は固有ベクトル $\{V\}$ の実数部を、鉛直成分は虚数部をプロットした。振動数の増加に伴い、地盤の浅い部分を反映した変形モードになることが分かる。また、地表面における両成分は同符号であり、粒子軌跡の回転方向は全て反時計回りである。

(2) ラブ波の解析結果

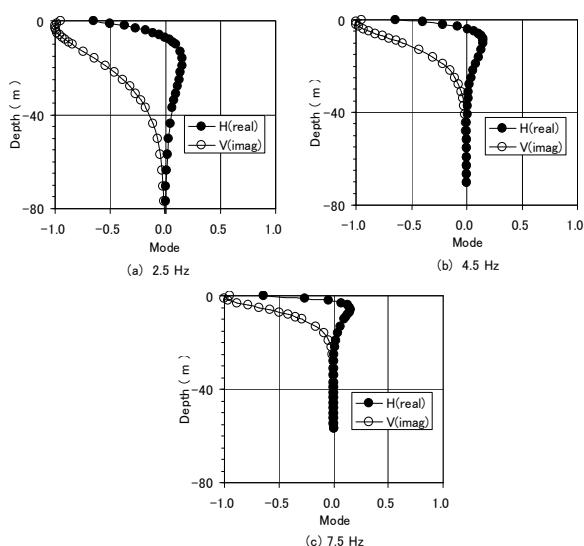


図-4 レイリー波基本モード（1層系半無限地盤）

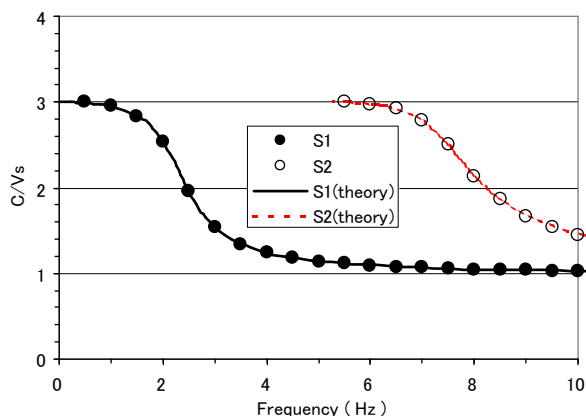


図-5 ラブ波の分散曲線（2層系半無限地盤）

2層系半無限地盤（図-3(b)）におけるラブ波の分散曲線を図-5に示す。縦軸は、ラブ波の位相速度 C を表層地盤の S 波速度 ($V_s=100\text{m/s}$) で除した。基本モードを●、1次高次モードを○で示しており、以下、それぞれ $S1$ 及び $S2$ モードと呼ぶ。図中に波動論による理論解を併記しており、本解析法が正確に理論解を表現していることが分かる。

2.5Hz での $S1$ モードを図-6(a)に示す。以下、ラブ波のモードは全て固有ベクトル $\{V\}$ の実数部をプロットした。振動数が低い（波長が長い）ため、変形モードが基盤層にまで及んでいるが、表層地盤の変形は1次モードである。7.5Hz での $S1$ 及び $S2$ モードを同図(b)に示す。振動数が高い（波長が短い）ため、 $S1$ モードは表層地盤の典型的な1次モードとなる。 $S2$ モードは、変形が基盤層にまで及んでいるが表層地盤の2次モードである。

1層系下端固定地盤（図-3(c)）におけるラブ波の分散曲線を図-7に示す。 $S1$ モードを●、 $S2$ モードを○で示しており、比較のため、2層系半無限地盤の結果（図-5）を併記した。 S 波の1次と2次の固有振動数、2.5Hz 及び 7.5Hz 付近で、位相速度 C が急激に増加し、2層系半無限地盤の分散曲線から

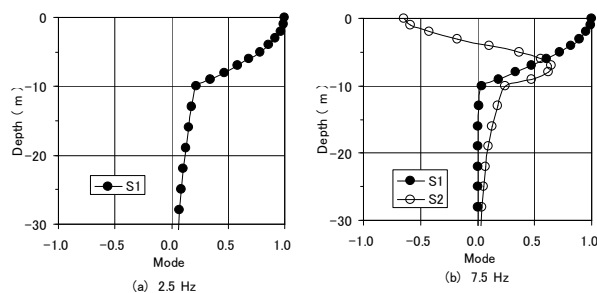


図-6 ラブ波のモード（2層系半無限地盤）

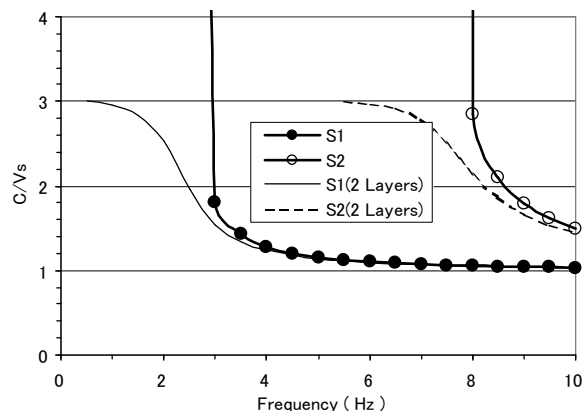


図-7 ラブ波の分散曲線（下端固定地盤）

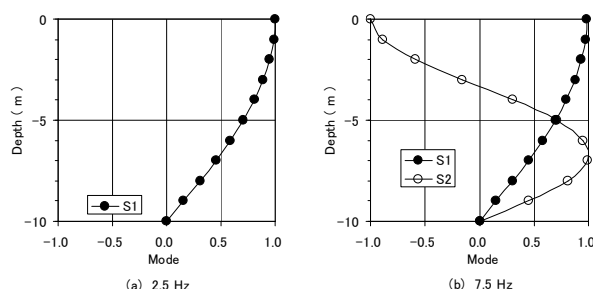


図-8 ラブ波のモード（下端固定地盤）

分離していくことが分かる。すなわち、2.5Hz 及び 7.5Hz で、位相速度 $C=\infty$ 、波数 $k=0$ のゼロモードが出現し、これらが実体波（ S 波）の固有振動モードとなっている。

2.5Hz での $S1$ モードを図-8(a)に、7.5Hz での $S1$ 及び $S2$ モードを同図(b)に示す。 $S1$ モードは S 波の1次、 $S2$ モードは S 波の2次モードである。

(3) レイリー波の解析結果

1層系下端固定地盤（図-3(c)）におけるレイリー波の分散曲線を図-9に示す。 S 波の1次と2次固有振動数付近でゼロモードが出現するモードを $S1$ 、及び $S2$ モードと呼び、 P 波の1次固有振動数付近でゼロモードが出現するモードを $P1$ モードと呼ぶ。 $P1$ モードはレイリー波の基本モードである。

$S1$ 、 $S2$ 及び $P1$ モードの地表面での水平振幅と鉛直振幅の比 (H/V)、或いは V/H を図-10に示す。 $S1$ モードは、2.5Hz で $V/H=0$ 、すなわち水平振幅だけが存在する S 波の1次固有振動モードであり、振動数の増加に伴い鉛直振幅が連成する。同様に、

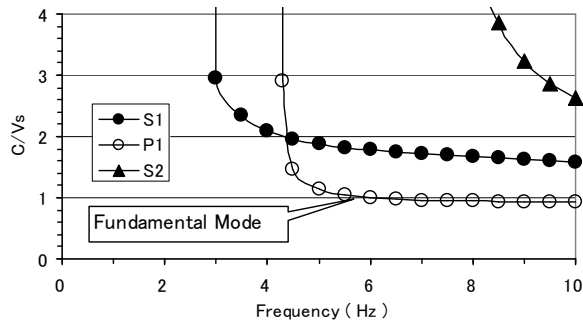


図-9 レイリー波の分散曲線（下端固定地盤）

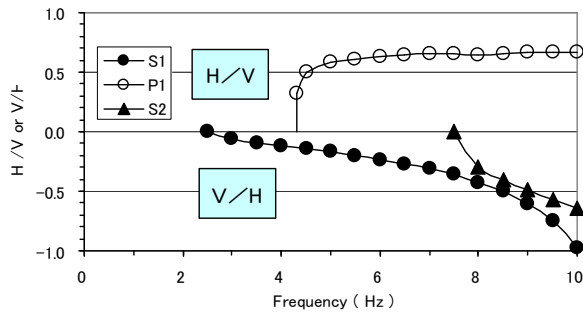


図-10 レイリー波の振幅比（下端固定地盤）

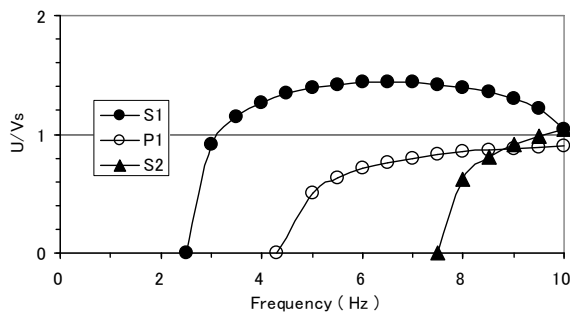


図-11 レイリー波の群速度（下端固定地盤）

S2 モードも 7.5Hz では水平振幅だけが存在する S 波の 2 次固有振動モードであり、振動数の増加に伴い鉛直振幅が増加する。一方、P1 モードは、4.325Hz で $H/V=0$ 、すなわち鉛直振幅だけが存在する P 波の 1 次固有振動モードである。振動数の増加に伴い水平振幅が増加し、楕円型の粒子軌跡が次第に扁平になることが分かる。この時、 $H/V>0$ であり、両成分は同符号、すなわち粒子の回転方向は反時計回りである。S1、S2 及び P1 モードの群速度 U の分散曲線を図-11 に示す。実体波の固有振動数、2.5Hz、4.325Hz 及び 7.5Hz 付近では群速度 $U=0$ であり、エネルギーは水平方向に伝播しない。

2.5Hz での S1 モードを図-12(a)、4.5Hz での P1 モードを同図(b)、7.5Hz での P1 モードを同図(c)、同じく 7.5Hz での S2 モードを同図(d)に示す。2.5Hz での S1 モードは、水平振幅だけが存在する S 波の 1 次固有振動モードである。4.5Hz での P1 モードと図-4(b)に示した 1 層系半無限地盤の基本モードを比較すると、変形モードが剛基盤面 (GL-

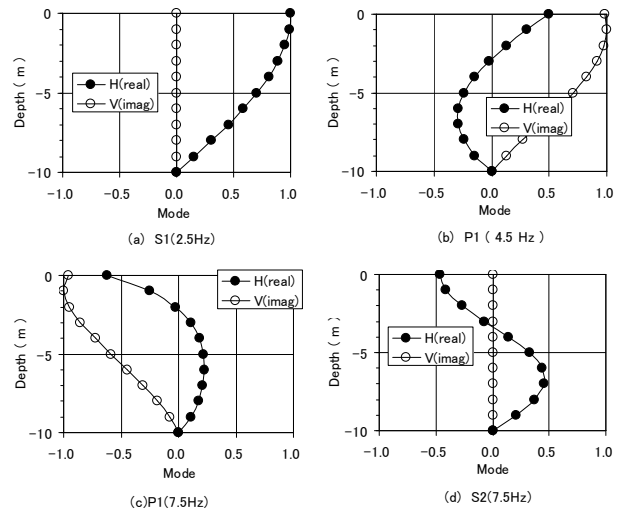


図-12 レイリー波のモード（下端固定地盤）

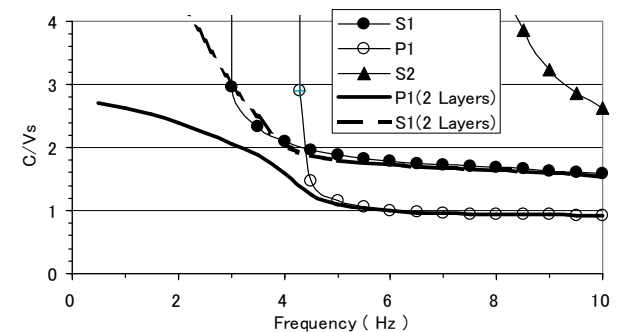


図-13 レイリー波の分散曲線（2層系半無限地盤）

10m) に収束した形になっているのが分かる。7.5Hz での P1 モードは、波長が短いため、図-4(c)の 1 層系半無限地盤の基本モードに非常に良く似た形状になる。7.5Hz での S2 モードは、S 波の 2 次固有振動モードである。

2 層系半無限地盤（図-3(b)）におけるレイリー波の分散曲線を図-13 に示す。P1 モードを太い実線、S1 モードを太い破線で示している。比較のため、1 層系下端固定地盤の結果（図-9）を併記した。ラブ波の分散曲線（図-7）で前述したように、レイリー波においても、S 波の 1 次固有振動数 (2.5Hz) 及び P 波の 1 次固有振動数 (4.325Hz) 付近で、両曲線が分離していく様子が現れている。

5. 結論

以上、離散化された有限要素法に基づく表面波（レイリー波、ラブ波）の複素固有値解析について検討し、波動論による理論解との比較を行い、以下の結果が得られた。

- ① 本解析法は波動論によるレイリー波、ラブ波の理論解を正確に表現する。
- ② 下端固定地盤（剛基盤）においてのみ存在する P 波の 1 次固有振動は、複素固有値解析に

- おける一つの固有値、すなわち、波数 $k=0$ 、位相速度 $C=\infty$ のレイリー波基本モードであり、振動数の増加と共に水平方向振幅が連成し、地表面において逆回転の粒子軌跡を有する。
- ③ 同様に、下端固定地盤（剛基盤）においてのみ存在する S 波の固有振動は $k=0$ 、 $C=\infty$ のレイリー波高次モードであり、振動数の増加と共に鉛直方向振幅が連成する。
- ④ 半無限地盤の分散曲線は、レイリー波、ラブ波とも実体波の固有振動数付近で下端固定地盤の分散曲線から分離し、下部層の弾性波速度に近似する。

参考文献

- 1) Yoshinori Kato, Satoshi Morio and Sunaryo Sumitomo : Participation factor of Rayleigh wave in seismic response analysis of irregular ground, the 11th International Conference of IACMAG, 2005. 6. (in press)
- 2) 加登文学, 森尾 敏: 不整形地盤の地震応答解析における表面波の寄与について, 第 39 回地盤工学会研究発表会, pp. 2045-2046, 2004. 7.
- 3) 徳永法夫, 森尾 敏, 家村宏和, 西村 昂: 「高架道路から伝播する交通振動における表面波の寄与率」、構造工学論文集、Vol. 46A, pp. 1703-1713, 2000. 3
- 4) J.Lysmer: 「Lumped mass method for Rayleigh waves」、Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.60, No.1, pp.89-104, 1970.2
- 5) J.Lysmer and J.A.Drake: 「A Finite Element Method for Seismology Method in Seismological Physics」、Academic Press, Chap.6, pp.180-216, 1973
- 6) 森地重暉、大町達夫、年縄 巧、宮井明世: 「Reyleigh 波として特性づけられる弾性層の振動モードについての基礎的研究」、構造工学論文集、Vol. 33A, pp. 631-644, 1987. 3
- 7) 渡辺勝彦、奥村秀人: 「2. 6. 6 積層材を伝播する表面波の有限要素解析」、複合材料技術に関する研究、東京大学生産技術研究所・大型共同研究成果概要、第 3 号, pp. 184-188, 昭和 58 年 9 月
- 8) 田治米鏡二: 「表面波の話」、物理探鉱、第 36 巻、第 1 号, pp. 23-32, 昭和 58 年 2 月
- 9) 佐藤泰夫: 弾性波動論、岩波書店、1978. 3

(2005. 6. 6 受付)

Complex Eigenvalue Analyses of Love and Rayleigh waves

Satoshi MORIO and Yoshinori KATO

To precisely explain the influences of surface waves (Love wave and Rayleigh wave) on the ground vibrations , we have to demonstrate the relationships between body waves (P wave, SH wave and SV wave) and surface waves.

In this paper, three typical types of soil layers are considered.

- ① : One soil layer with infinite boundary
- ② : Two soil layers with infinite boundary
- ③ : One soil layer with rigid boundary (Bottom of the soil layer is fixed)

By using the FEM complex Eigenvalue analyses proposed by J.Lysmer, the dispersion curves and eigenvectors of Love waves are demonstrated. The results of Rayleigh waves are also shown. Finally, the relationships between body waves and surface waves are clarified.