Proc. 28th JSCE Earthquake Engineering Symposium, 2005

半無限地盤時間領域有限要素解析

塩尻弘雄[1]・丸山拓也[2]

[1]日本大学理工学部教授
（〒101-8308東京都千代田区神田駿河台１－８）
E-mail:shiojiri @civil.cst.nihon-u.ac.jp
[2]日本大学理工学研究科　（〒101-8308東京都千代田区神田駿河台１－８）
E-mail:maruyama.takuya123456789 @docomo.ne.jp

構造物と地盤の相互作用解析においては、構造物のスケールに比し、半無限に広がる地盤の取り扱いが問題となる。非線形解析等の遂行には時間領域での解析が必要となるが、時間領域で有限要素法と境界要素法等を組み合わせるサブストラクチャー法は、安定性の確保に必ずしも容易でない。一方、差分法の一種であるFDTD法では高性能のPML境界が実用的に使われており、また、人工的に粘性を付加した後、その影響を除去するdamping-solvent extraction法も提案されている。ここでは、これら２つの手法の有限要素法への適用について、実用的なアルゴリズムを示し、簡単な数値例でその特失を示す。

Key Words :*time damain, transmitting boundary, finite element method, perfectly matched layer, damping-solvent extraction method*

１．はじめに

性能設計の導入、コンピュータの発展等により、非線形解析を行う機会増えている。非線形解析は線形解析に比べると通常はるかに多量の計算量を必要とする。コンピュータ能力の増大により、一部は対応可能な面もあるが、ソフトウェアの面でも計算量低減のアルゴリズム開発を継続して行く必要がある。ここでは構造物の基礎となる半無限地盤の計算量の低減の試みについて述べる。

振動数領域での解析は、サブストラクチャー法の適用が容易で、有限要素法と薄層要素法や境界要素法等を組み合わせるなどの方法がほぼ確立されているといえる。しかし,非線形解析に当たっては時間領域の解析が必要である。半無限地盤に対して、十分に広い領域を有限要素等でメッシュ分割し、境界に近似的なエネルギー逸散境界を適用するか、構造物近傍は有限要素法で、離れた部分については時間領域境界要素法を用い、組み合わせて用いる方法が提案されている(1),(2)。前者は、有限要素等の自由度がかなり大きくなりうるし、後者は、境界要素法解析の安定に問題のある場合があり、別の選択肢となる手法の確立が期待される(3),(4),(5)。ここでは人工的に粘性を加えた領域を解析対象の外部に設け、振動を減衰させるとともに減衰を加えた影響を低減・除去することにより、半無限地盤条件を再現する手法(damping solvent extraction法)(3),(4)、および、差分法の一種であるFDTD法等で用いられている高性能のPML境界（perfectly matched layer）(5),(6),(7),(8),(9)について、地盤構造物の解析に広く使われている変位を未知数とする有限要素法に対応した、成層地盤の時間領域解析法の検討する。

２．半無限境界

(1)Damping-solvent Extraction法

$[K],[M]$を剛性マトリクス,質量マトリクス,角振動数をωとすれば、振動数領域でのインピーダンスマトリクスは次式で表される。

$$\left[S(\omega)\right]=\left[K\right]-\omega^2\left[M\right] \tag{1}$$

ただし

$$\left[K\right]=Gr_0^{s-2}\left[\bar{K}\right],\ \left[M\right]=\rho r_0^s\left[\bar{M}\right]$$

ここで、せん断剛性G,密度ρ,基準長さr_0, sは空間次元(=2or3), $\left[\bar{K}\right],\left[\bar{M}\right]$は無次元剛性,質量マトリクスである。

さて、次式のように減衰ζを付加するとする。ここで、$\{u\},\{\dot{u}\},\{\ddot{u}\},\{P\}$はそれぞれ変位ベクトル、速度ベクトル、加速度ベクトル、荷重ベクトルである。

$$[M]\{\ddot{u}^t\}+2\zeta[M]\{\dot{u}^t\}+([K]+\zeta^2[M])\{u^t\}=\{P\} \tag{2}$$

振動数領域では

$$[S_\zeta(\omega)]=[K]+\zeta^2[M]+i\omega 2\zeta[M]-\omega^2[M]=[K]-(\omega-i\zeta)^2[M] \tag{3}$$

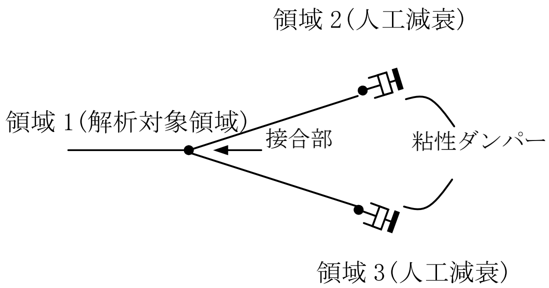


図 1 有限要素モデル概念図

無次元化すると

$$\begin{aligned}[S_\zeta(\omega)] &= Gr_0^{s-2}\left([\bar{K}]-a_0^2[\bar{M}]\right)\\ &= Gr_0^{s-2}\left[\bar{S}(a_0^*)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、 $a_0^*=\dfrac{(\omega-i\zeta)r_0}{c_s}, c_s=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ である。

これを、 a_0^* でテイラー展開し、１次の項までとり整理すると、人工減衰を加えないインピーダンスマトリクスは、結局次式のようになる。

$$[S(\omega)]=[S_\zeta(\omega)]+i\zeta[S_\zeta(\omega)]_{,\omega} \tag{5}$$

人工粘性を加え、端部にさらに粘性境界を設けることで、境界からの反射波を吸収できるので、左辺のインピーダンスは境界からの反射をほとんど含まない半無限地盤領域のインピーダンスマトリクス［ $S^\infty(\omega)$ ］となる。式(5)のフーリエ逆変換により次式を得る。

$$\begin{aligned}R(t)&=(1+\zeta t)\{R_\zeta(t)\}-\zeta\{R_{\zeta r}(t)\}\\ \{R_\zeta(t)\}&=\int_0^t[S_\zeta(t-\tau)]\{u(\tau)\}d\tau\\ \{R_{\zeta r}(t)\}&=\int_0^t[S_\zeta(t-\tau)]\tau\{u(\tau)\}d\tau\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、 $R(t)$ は反力, $u(\tau)$ は変位, $[S_\zeta(t)]$ は $[S_\zeta(\omega)]$ のフーリエ逆変換である。式(3)のような人工粘性(Damping-solvent)により（場合により端部は粘性ダンパーを付加）波動を吸収するとともに、それによるインピーダンス変化の影響を式(5), (6)に対応して補正していることになる [3]。

さて、有限要素法相互作用解析への組み込みを検討する。式 (6) の反力を、畳み込み積分を用いず効率的に求めることが望まれる。それは次のようにして行える。即ち、図 1 の概念図に示すように 3 領域を考え接合する。領域１が解析対象部で、領域２，３は人工粘性を加えた部分である。領域1, 2, 3 の変位をそれぞれ、 u^1, u^2, u^3 と書くものとすれば、境界で次式が成り立つものとする。

$$\left.\begin{aligned}&u^2=u^1, \dot{u}^2=\dot{u}^1, \ddot{u}^2=\ddot{u}^1\\ &u^3=t\,u^1, \dot{u}^3=t\,\dot{u}^1+u^1, \ddot{u}^3=t\,\ddot{u}^1+\dot{u}^1\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

また、領域１の反力と、領域３の反力の $-\xi$ 倍と、領域 2 の反力の $(1+\xi t)$ 倍したものを加えて動的つり合い方程式から陽解法で加速度を求めればよい。陽解法であれば、これらは容易に行える。領域２，３は、質量、減衰、剛性はまったく同一であり、変位の境界条件のみ異なるので、同じ数値モデルを用いて、境界条件の異なる２つの問題を同時に解いてゆけばよい。境界で陽解法を用いており、領域２，３も陽解法を用いるのが効率的と考えられる。構造物近辺は形状や剛性の変化が複雑で細かいメッシュを必要とし、また物性が非線形性を持つことなどにより陰解法が適している場合は、解析対象領域の領域１を陰解法とし、２，３を陽解法とする、Implicit-Explicit 法 [10] を用いればよい。すなわち、時間を t 、時間積分の時間間隔を Δt 、ニューマーク法の積分パラメータを γ, β 、 $\{u^i\}, i=1,2,3$ を変位ベクトル、下付添え字がベクトルに対応する時間とすると、

$$\begin{aligned}\{\dot{u}^i\}_{t+\Delta t}&=\{\tilde{\dot{u}}^i\}_{t+\Delta t}+\gamma\Delta t\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}\\ \{u^i\}_{t+\Delta t}&=\{\tilde{u}^i\}_{t+\Delta t}+\beta\Delta t^2\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}\end{aligned} \tag{8}$$

ここで

$$\begin{aligned}\{\tilde{\dot{u}}^i\}_{t+\Delta t}&=\{\dot{u}^i\}_t+(1-\gamma)\Delta t\{\ddot{u}^i\}_t\\ \{\tilde{u}^i\}_{t+\Delta t}&=\{u^i\}_t+\Delta t\{\dot{u}^i\}_t+\frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\{\ddot{u}^i\}_t\end{aligned} \tag{9}$$

これを $t+\Delta t$ の運動方程式に代入する。

即ち陰解法では

$$[M]\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}+[C]\{\dot{u}^i\}_{t+\Delta t}+[K]\{u^i\}_{t+\Delta t}=\{P\}_{t+\Delta t}$$

を用い

$$\begin{aligned}&([M]+\gamma\Delta t[C]+\beta\Delta t^2[K])\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}\\ &=\{P\}_{t+\Delta t}-[C]\{\tilde{\dot{u}}^i\}_{t+\Delta t}-K\{\tilde{u}^i\}_{t+\Delta t}\end{aligned} \tag{10}$$

となり、陽解法では

$$[M]\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}+[C]\{\tilde{\dot{u}}^i\}_{t+\Delta t}+[K]\{\tilde{u}^i\}_{t+\Delta t}=\{P\}_{t+\Delta t}$$

を用い

$$[M]\{\ddot{u}^i\}_{t+\Delta t}=\{P\}_{t+\Delta t}-[C]\{\tilde{\dot{u}}^i\}_{t+\Delta t}-K\{\tilde{u}^i\}_{t+\Delta t} \tag{11}$$

となる。陽解法の場合 $[M]$ を対角化しておく。

境界の節点では、式(7)から、以下の関係が成り立つものとして、左辺は $\{\ddot{u}^1\}_{n+1}$ に対する方程式とすればよい。

$$
\left.\begin{aligned}
&\left\{\tilde{u}^3\right\}_{n+1} = t\left\{u^1\right\}_{n+1}, \left\{\tilde{\dot{u}}^3\right\}_{n+1} = t\left\{\tilde{\dot{u}}^1\right\}_{n+1} + \left\{\tilde{u}^1\right\}_{n+1} \\
&\left\{\ddot{u}^3\right\}_{n+1} = t\left\{\ddot{u}^1\right\}_{n+1} + \left\{\tilde{\dot{u}}^1\right\}_{n+1}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

(2) PML(perfectly matched layer法)

PML は、インピーダンスが解析対象領域と等しく反射波を発生させず、かつ内部の波動を減衰させる人工的な層を、解析対象領域の周辺に配置させる方法である[5),6),7)]。FDTD 法ではすでに用いられているが、FDTD 法では、物性の異なる物質間のシャープな境界が表現しにくく、また、現在までの手法では、層地盤の様に、物性の異なる境界がほとんど無限に続き、PML 境界内に層境界が存在する場合の扱いが困難である。有限要素法に関しても、均一場の音波の解析[8)]や、複素座標変換を用いて層地盤の定式化が行われているが[9)]、ここでは、２次元面外振動を例として、座標変換を用いない層地盤に対する PML の方程式の有限要素法への適用について述べる。

面内水平方向に x 軸、鉛直下方に y 軸、面外方向に z 軸をとるものとし、z 方向変位をu、速度をv、x 軸に垂直な面に作用するせんだん力をτ_x、y 軸に垂直な面に作用するせん断力をτ_y、密度をρ、せん断剛性をGとすると、面外運動の方程式は、次式のように書ける。

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial t} = G\frac{\partial v}{\partial x} \quad (13a)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial t} = G\frac{\partial v}{\partial y} \quad (13b)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \quad (13c)$$

これに対し、波動インピーダンスを一致させて境界で反射波を発生させず、かつ内部で波動を減衰させる人工的な層内での方程式は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial t} = G\frac{\partial v}{\partial x} - G\alpha_x^* \tau_x \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial t} = G\frac{\partial v}{\partial y} - G\alpha_y^* \tau_y \quad (14b)$$

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \alpha_x v_x \quad (14c)$$

$$\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \alpha_y v_y \quad (14d)$$

$$v = v_x + v_y \quad (14e)$$

ただし次式が成立する必要がある。

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\alpha_x}{\rho} &= G\alpha_x^* \\
\frac{\alpha_y}{\rho} &= G\alpha_y^*
\end{aligned}\right\} \quad (15)
$$

PML中での低減係数をR_{ss}とし、(14)PMLの厚さをδ_k、PML中への距離をrとすると、α_k, α_k^*は次式で与えられる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_k = q_k (r_k / \delta_k)^n, \alpha_k^* = \alpha_k / (\rho G) \\
&R_{ss} = \exp\left(-\frac{2q_k \delta_k \sqrt{\rho G}}{(n+1)}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (16)
$$

ここで、添え字のｋは、ｋ＝ｘ、またはｙである。また、通常$R_{ss} = 10^{-6}$, $n = 4$程度がよいとされる[7)]。

これらを有限要素法に適用することを考える。文献（８）では、式(13)に類似の未知数３の１階の連立微分方程式（音波伝播方程式）をそのまま離散化を行っている。しかし、ここでは、通常の変位型の有限要素法プログラムへの組み込みの容易さ等を考えて、変位のみを未知数とする２階の微分方程式に対する有限要素定式化を考える。

まず式(13c)に弱定式化を適用する。

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega w\left(\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y}\right)dV \\
&= \int_\Omega w\frac{\partial v}{\partial t}dv + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial w}{\partial y}\tau_y\right)dV \\
&\quad - \int_\Gamma \left(wn_x\tau_x + wn_y\tau_y\right)ds \\
&= \int_\Omega w\rho\frac{\partial v}{\partial t}dV + \int_\Omega G\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dV \\
&\quad - \int_\Gamma w\tau_n ds = 0
\end{aligned} \quad (17)
$$

ここで、$w, \Omega, \Gamma, dv, ds, n_x, n_y, \tau_n$は、それぞれ、任意の重み関数、対象領域、境界、微小領域、微小境界長、境界法線ベクトル x 成分、境界法線ベクトルｙ成分、および境界接面に作用するせん断力である。

w, uの節点iの値をw^i, u^i、対応した内挿関数をN^iとすれば、以下のようになる。なお、これ以降、同じ添え字が同一項に２つある場合、総和規約を用いるものとする。

$$w_i\left\{\int_\Omega \rho N_i N_j dV\right\}\ddot{u}^j$$
$$+w_i\left\{\int_\Omega G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dV\right\}u^j \quad (18)$$
$$-w_i\int_\Gamma N_i\tau_n ds=0$$

w_i は任意なので、結局、

$$\left\{\int_\Omega \rho N_i N_j dV\right\}\ddot{u}_j$$
$$+\left\{\int_\Omega G\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dV\right\}u_j \quad (19)$$
$$=\int_\Gamma N_i\tau_n ds=R^i$$

が成立する必要がある。ここで R^i は反力である。

次に、PML 内の定式化を考える。式(14a)より、t_0 をある基準時間として

$$\tau_x(t)-\tau_x(t_0)=\int_{t_0}^{t} Ge^{G\alpha_x^*(t'-t)}\frac{\partial v}{\partial x}dt' \quad (20)$$

となる。時間 t と $t+\Delta t$ 間で速度が一定とすれば、次式を得る。

$$\tau_x(t+\Delta t)-\tau_x(t)$$
$$=G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_x^*\Delta t}}{G\alpha_x^*\Delta t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t+\Delta t)-\frac{\partial u}{\partial x}(t)\right) \quad (21a)$$

ここで $\partial u/\partial t=v$ である。同様に式(14b)より

$$\tau_y(t+\Delta t)-\tau_y(t)$$
$$=G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_y^*\Delta t}}{G\alpha_y^*\Delta t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}(t+\Delta t)-\frac{\partial u}{\partial y}(t)\right) \quad (21b)$$

式(14c)に式(21a)を代入し、重み関数 w を用いて弱定式化を行うと次式となる。

$$\int_\Omega w\rho\frac{\partial^2 u_x(t+\Delta t)}{\partial t^2}dV+\int_\Omega w\alpha_x\frac{\partial u_x(t+\Delta t)}{\partial t}dV$$
$$+\int_\Omega G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_x^*\Delta t}}{G\alpha_x^*\Delta t}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u(t+\Delta t)}{\partial x}-\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right)dV$$
$$+\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x}\tau_x(t)dV=\int_\Gamma wn_x\tau_x(t+\Delta t)ds \quad (22)$$

ここで、$\partial u_x/\partial t=v_x$ である。

内挿関数 N^i を用いて定式化すると以下のようになる。

$$\left\{\int_\Omega \rho N_i N_j dV\right\}\ddot{u}^j_{x,n+1}+\left\{\int_\Omega \alpha_x N_i N_j dV\right\}\dot{u}^j_{x,n+1}$$
$$+\left\{\int_\Omega G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_x^*\Delta t}}{G\alpha_x^*\Delta t}\right)\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}dv\right\}u^j_{,n+1}$$
$$+\bar{R}^i_{x,n}=\int_\Gamma N_i n_x\tau_{x,n+1}ds=R^i_{x,n+1} \quad (23)$$

ここで、$R^i_{x,n+1}=\int_\Gamma wn_x\tau_{x,n+1}ds$ 、

$$\bar{R}^i_{x,n}=\sum_{k=1}^{n}G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_x^*\Delta t}}{G\alpha_x^*\Delta t}\right)dV\left(u^j_{,k}-u^j_{,k-1}\right)$$
$$=\bar{R}^i_{x,n-1}+G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_x^*\Delta t}}{G\alpha_x^*\Delta t}\right)\int_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}dV\left(u^j_{,n}-u^j_{,n-1}\right)$$

ここで、上付きの数字は節点番号、下付の $,k\,,k-1$ 等は、それぞれ時間 $t=(k-1)\Delta t,\ t=k\Delta t$ 等に対応した量であることを示す。$\bar{R}^i_{x,n}$ は時間ステップごとに逐次加算されて更新される。

式（14.d）に対しても同様に次式を得る。

$$\left\{\int_\Omega \rho N_i N_j dV\right\}\ddot{u}^j_{y,n+1}+\left\{\int_\Omega \alpha_x N_i N_j dV\right\}\dot{u}^j_{y,n+1}$$
$$+\left\{\int_\Omega G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_y^*\Delta t}}{G\alpha_y^*\Delta t}\right)\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}dV\right\}u^j_{,n+1} \quad (24)$$
$$+\bar{R}^i_{y,n}=\int_\Gamma N_i n_y\tau_{y,n+1}ds=R^{i+1}_{y,n+1}$$

ここで、ここで、$\partial u_y/\partial t=v_y$、

$\bar{R}^i_{y,n}=\sum_{k=1}^{n}G\left(\frac{1-e^{-G\alpha_y^*\Delta t}}{G\alpha_y^*\Delta t}\right)\int_\Omega\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}dv\left(u^j_{,k}-u^j_{,k-1}\right)$ である。

解析対象領域に対しては式(19),PML内では、式(23),(24)に対応した有限要素定式化を行う。 解析対象領域とPMLは、一メッシュ幅の層を共有し、その層内では、式(19)に従った要素と、式(23)(24)に従った要素と節点力を計算する。境界上ではまず u_x,u_y を求め、加え合わせて u を求める。この操作は陽積分であれば容易に行える。PML中も同様に陽積分を用いるのが効率的と考えられる。PML領域内では、大きな減衰が存在するので、陽解法の安定性確保のためには、u_x について次式のような積分を行う。

$$(1+\gamma\Delta t\alpha_x)\left[\bar{M}\right]\{\ddot{u}_x\}_{n+1}$$
$$=\{P\}_{n+1}-\alpha_x[M]\{\dot{\tilde{u}}\}_{n+1}-R_x(\{\tilde{u}\}_{n+1}) \quad (25)$$

ここで

$[M],\left[\bar{M}\right],\{\ddot{u}_x\}_{n+1},\{P\}_{n+1},\{\dot{\tilde{u}}\}_{n+1},R_x(\{\tilde{u}\}_{n+1})$ は

それぞれ、$\left\{\int_{\Omega}\rho N_i N_j dv\right\}$からなるマトリックス、それを対角化したもの、$\ddot{u}^j_{x,n+1}$からなるベクトル、外力ベクトル、$\tilde{\dot{u}}^j_{x,n+1}=\dot{u}^j_{x,n}+\left(1-\gamma\right)\Delta t\ddot{u}^j_{x,n+1}$からなるベクトル、および、$u^j_{x,n+1}$のかわりに$\tilde{u}^j_{x,n+1}=u^j_{x,n}+\Delta t\dot{u}^j_{x,n}+\frac{\Delta t^2}{2}\left(1-2\beta\right)\ddot{u}^j_{x,n+1}$を用いて求めた反力からなるベクトルである。$u_y$についても同様である。

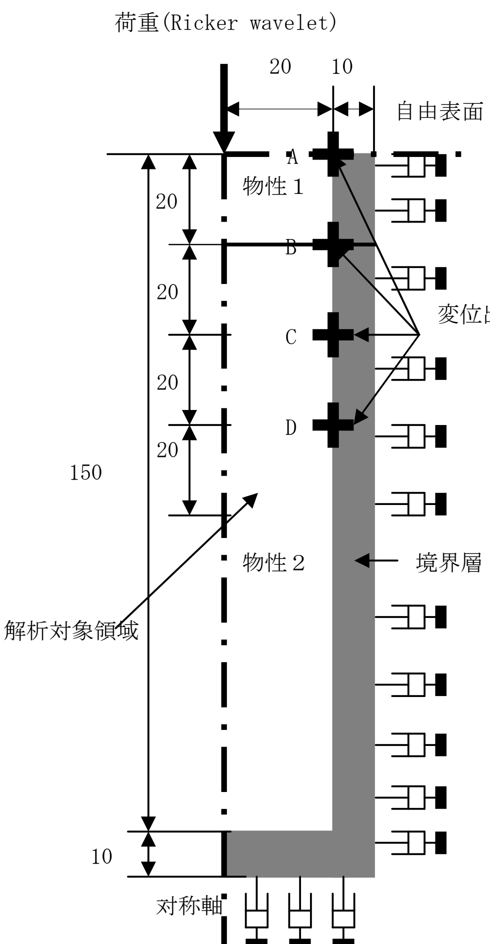
FDTD法による定式化では、いわゆるstaggered meshを採用しているため、シャープな物性変化を表現できないうらみがあり、また従来のPMLは層状地盤のように異なる物性をPML中に存在させることは困難であった。しかし、今回の有限要素法による上記の定式化は、通常の有限要素法と同様、急激な物性の変化に対応でき、PML中の物性変化も容易に取り扱える。

３． 解析例

２次元面外変位問題を考える。用いた有限要素は、変位を未知数とする、四辺形線形アイソパラメトリック線形要素である。図—２にモデルを示す。すべて無次元量で表すものとする。２層水平地盤を考え、第一層の深さは２０とする。解析対象領域は、中心から水平方向に２０、深さ方向に１５０で、その外側に厚さ１０の境界層（damping solvent extraction法では人工粘性領域、PML法ではPML領域があり、damping solvent extraction法では最外部に粘性ダンパー(粘性境界に対応)が加わる。PML法では最外部は固定であり、$R_{ss}=10^{-6}$、$n=4$である。要素形状は、水平、鉛直方向とも長さ１の正方形である。密度$\rho=1$、せん断剛性$G=1000$を基準とする。時間刻み$\Delta t=0.01$、ニューマークパラメータは$\beta=0.25,\gamma=0.5$とした。荷重については、時間をｔ、周期T=0.5として、中央の地表に時間変化が

$$f(t)=\sqrt{\pi}\left\{1-2\pi(t'/T)^2\right\}e^{-(\pi t'/T)^2}/T,t'=(t-2T)$$

であらわされる集中荷重(Ricker wavelet)を加えた。

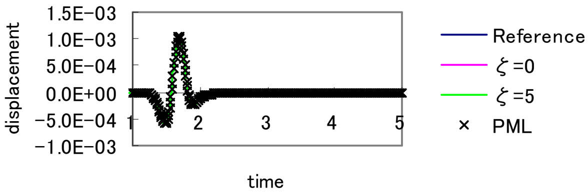


図—2　解析モデル

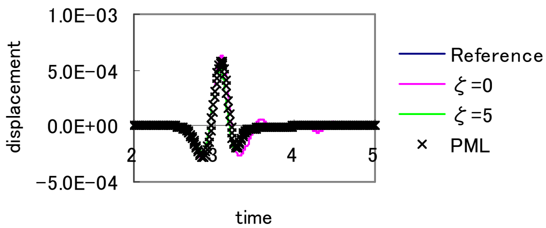
図―２に示す様に、中心からの水平距離２０、深さ０，２０，４０，６０，８０の、A~D点の変位時刻歴を比較した。また、図—2モデル以外に、解析対象領域が中心から水平方向に１５０、地表から１５０、その外部に１０層の境界領域を持つより大きなメッシュで反射波が帰ってくる以前の時間について計算を行い、基準値とした。

図－3から図－5には、２層とも同一物性を与えた場合（均一地盤：$\rho=1$、$G=1000$）の場合の結果を示す。図中、Referenceと書いてあるのは、広いメッシュで境界からの反射波到達以前の結果で、正解とみなすものである。$\varsigma=0$は、damping-solvent extraction法において、人工減衰を０とおいたもので、境界に取り付けたダンパーのみによって　反射波が吸収されているものであり、いわゆる粘性境界に対応する。$\varsigma=5$はdamping-solvent extraction法において人工減衰を５とおいたものある。PMLはPML法の結果である。　外力による撹乱は地表に加えられているので、地表の点であるA点を通過する波は、境界に垂直であり、反射波も境界に垂直でA点を通過する。しかし、どの方法も、垂直に入射する波に対する吸収性能は優れているので、A点の応答は手法による差はほとんど無い。地表から離れるにつれ、境界に到達する波は、境界の垂線方向からの角度が増加する。深さが深くなるにつれて手法による差が増加する。境界のダンパーのみによる方法はアルゴリズムは簡単だが、最も性能が悪く、PML法が最も優れているが、damping-solvent extraction法で$\varsigma=5$の結果もあまり遜色がない。

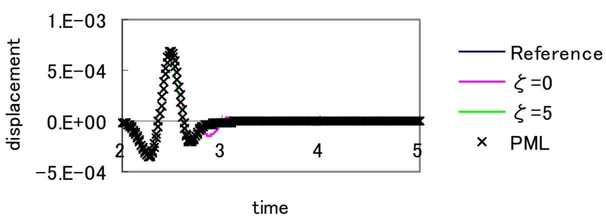
図—7～図—10には，第１層の物性（物性１）を$\rho=10$、$G=10000$、第２層の物性（物性２）を



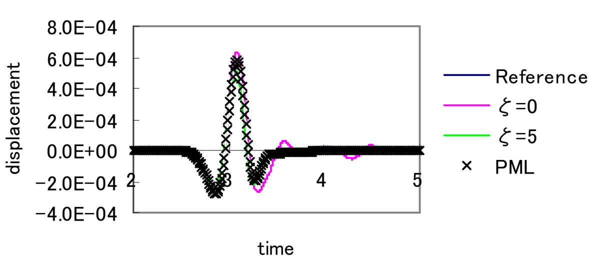
図—3　均一地盤A点応答



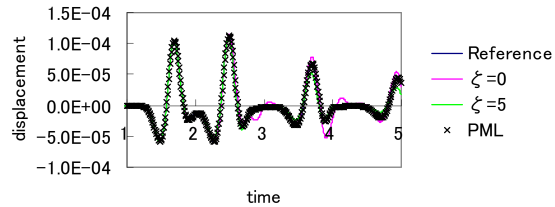
図—4　均一地盤 B 点応答



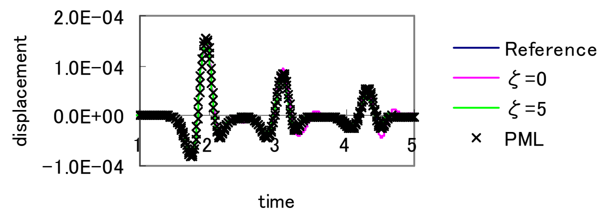
図—5　均一地盤C点応答



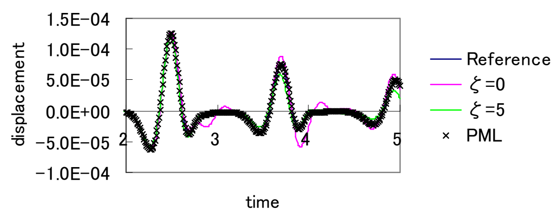
図—6均一地盤D点応答



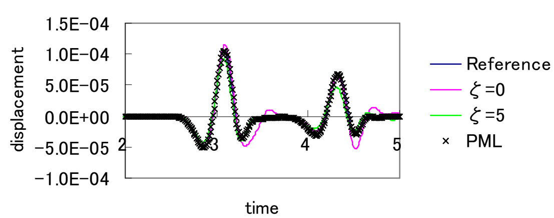
図—7　２層地盤A点応答



図－8　　２層地盤 B 点応答



図—9　　２層地盤C点応答



図—10　２層地盤D点応答

$\rho = 1$、$G = 1000$と、インピーダンス比で10の大きな差をつけた場合の結果を示す。この場合,異なる物性の層間の反射で、地表であっても境界への入射は垂直方向でない。従って、境界にダンパーのみ加えた場合、反射波により地表の応答にもかなりな差が生じ、地表から離れるに従って差が増加する。

この場合も、PML法が最も優れている。今回導いた有限要素定式化は、物性が異なる物体が無限に続く場合（即ち、PML中にも存在する場合）でも有効なことが確認された。また、damping-solvent extraction法で$\varsigma = 5$の結果もあまり遜色がなく、境界のダンパーに比べて精度の高いことが示された。

総合すると、PMLは、精度はよいがややアルゴリズムが複雑であり、また、今回は扱わなかったが、面内問題や３次元への拡張、材料減衰の導入等に際して、新たな定式化を必要とする。一方、damping-solvent extraction法は、そのままで種々の問題に適用可能であり、汎用性に富んでいるといえる

４．まとめ

半無限に広がる地盤の時間領域での解析に対して、人工的に粘性を付加した後、その影響を除去するdamping-solvent extraction法、差分法の一種であるFDTD法で用いられてきた高性能のPML境界について、有限要素法への適用について、通常の有限要素との適合性の高い、変位のみを節点未知数とする実用的なアルゴリズムを示し、数値例で、均質地盤、層状地盤ともに高い波動吸収精度を実現できることを示した。PMLの方がやや精度は高いが、damping-solvent extraction法の方が汎用性には富んでいる。

謝辞：本研究は、平成１６年度文部科学省学術フロンティア推進事業（日本大学理工学部：継続）「環境・防災都市に関する研究」（研究代表者：石丸　辰治）の一環として実施したものである。

参考文献

1)Wolf J.P.:*Soil-Structure-Interaction Analysis in time Domain*,Prentice-Hall, 1988.

2) 日本建築学会：入門・建物と地盤の動的相互作用、技報堂、1999第２刷

3Wolf J.P. and Song CH: *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*, JOHN WILEY&SONS, 1996

4) Wolf J.P. and Song CH:Some cornerstones of dynamic soil-structure interaction,*Engineering Structures* , **24**,pp13-28,2002

5) Berenger J.P.: A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, **114**, pp. 185-200, 1994.

6) 宇野亨：FDTD法による電磁界およびアンテナ解析、コロナ社、1998.

7)Hastings F.D., Schneider J.D, and Brdschat S.L.,: Application of the perfectly mactched layer(PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation, *J. Acoust. soc. Am.* **100**(5), pp. 3061-3069, 1996.

8) 藤井大地、植月徳仁、鈴木克幸、大坪英臣：ボクセル有限要素法とPML境界を用いた超音波波動伝播解析、*Transactions of JSCES*,No.20010015,p.8,2001

9) Basu U.and Copra A.K.: Perfectly matched layers for transient elastdynamics of unbounded domains,*Int.J. Numer.Meth. Engng*.**59**,pp1039-1074,2004.

10)Thomas J.R. Hughs: *The Finite Element Method*,Prentice Hall,1987

METHODS FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SEMI-INFINIT FOUNDATION SOIL IN TIME DOMAIN

Hiroo SHIOJIR, and Takuya MARUYAMA

Methods are presented for application of the perfectly matched layer absorbing condition and the damping-solvent extraction method to dynamic response analyses of semi-infinite soil in time domain. Simple and Efficient displacement based finite element procedures have been developed for both methods . It is demonstrated by numerical examples that the performances of the developed procedures are better than the so-called viscous boundaries for both uniform and layered semi-infinite soil.