

# 地震動のフーリエ振幅と位相の 関連性について

白井克弘<sup>1</sup>・大町達夫<sup>2</sup>

<sup>1</sup>東京工業大学大学院総合理工学研究科博士課程 工修  
(〒226-8502神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

E-mail:kshirai@enveng.titech.ac.jp

<sup>2</sup>東京工業大学教授 大学院総合理工学研究科 工博  
(〒226-8502神奈川県横浜市緑区長津田町4259)

E-mail:ohmachi@enveng.titech.ac.jp

本研究では、地震動のフーリエ振幅と位相の関連性について、因果律を用いて考察した。因果律を用いると、地震動記録は、最小位相推移関数(MPS)と全域通過関数(AP)に因数分解できる。MPSのフーリエ振幅は、地震動記録のフーリエ振幅と同じであり、MPSのフーリエ振幅とフーリエ位相を比べると、明らかな相関性が認められた。更に、MPSの水平動と上下動のフーリエ振幅比(H/Vスペクトル比)とその位相差(H-V MPS位相差)にも、その相関性が認められた。これは、MPSのフーリエ振幅と位相の間には、Hilbert変換の関係があるためと分かった。

**Key Words :** causality, factorization, minimum phase shift, all pass, Hilbert transforms

## 1. はじめに

周波数領域において、入力地震動を設計する際には、フーリエ振幅とフーリエ位相が必要である。近年、地震動のフーリエ振幅特性に関する研究は、数多く報告されている。例えば、Boore<sup>1)</sup>によれば、 $\omega^{-2}$ を満たす、震源における加速度フーリエスペクトルは、

$$S(f) = R_{\theta\phi} \cdot PRTITN \cdot \frac{\pi M_0}{\rho V_s^3} \frac{f^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \frac{1}{1 + \frac{f}{f_{max}}} \quad (1)$$

で与えられる。 $f$ は振動数、 $R_{\theta\phi}$ は震源の放射特性を表す係数、 $PRTITN$ は水平2成分のエネルギー分配を表す係数、 $M_0$ は地震モーメント、 $\rho$ と $V_s$ は震源における地盤の密度とS波速度、 $f_{max}$ は地震動の限界振動数、 $f_c$ はコーナー振動数である。また、伝播特性は、地盤の減衰量を表す $Q(f)$ を用いて

$$P(f) = \frac{1}{r} \exp\left(\frac{-\pi \cdot f \cdot r}{Q(f) \cdot V_s}\right) \quad (2)$$

で表される<sup>2)</sup>。 $r$ は震源からの距離である。これに、観測される地盤の増幅特性を $G(f)$ とすれば、対象とする地表面の地震動のフーリエスペクトル

$$F(f) = S(f)P(f)G(f) \quad (3)$$

を作成することが可能となる。しかし、この時刻歴波形を求めるためには、フーリエ位相特性を何らかの形で与える必要がある。

フーリエ位相のモデル化は、Jenningsの包絡線に整合するように、ランダムにフーリエ位相を与える方法や<sup>3)</sup>、実際の大地震のフーリエ位相を利用する方法<sup>4)</sup>などが提案されている。大崎<sup>5)</sup>は、地震動のフーリエ位相の差、すなわち位相差分スペクトルが、地震動の包絡形状によく似ていることを示し、フーリエ位相と時刻歴波形の関連性を指摘した。和泉・勝倉<sup>6)</sup>は、群遅延時間が地震波の主要動到達時間を示し、その標準偏差が地震波の包絡形を表していることを示している。Kimura and Izumi<sup>7)</sup>は、初期位相や群遅延時間等、地震動の波形に影響を与えるパラメータを5つと仮定し、フーリエ位相によって波形を合成できることを指摘している。また、佐藤等<sup>8)</sup>は、群遅延時間で、震源・伝播・地盤特性をモデル化し、最後に積分することで、フーリエ位相をシミュレートする方法を提案している。澤田等<sup>9)</sup>は、群遅延時間の平均と分散をとることで、地震動の伝播経路と、地盤特性の分離を試みているが、地震動のフーリエ位相特性については、未解決の問題が多く残されている。

未解決問題のひとつは、フーリエ振幅と位相の

関連性である。地震動記録は、因果律を満たす時間関数である。因果律を満たす時間関数は、フーリエ振幅とその位相はHilbert変換の関係にあり独立ではないことが知られている<sup>10)</sup>。しかし、既往の研究の多くは、フーリエ振幅と位相を別々に与えており、その結果、予測外の波形が計算されたり、因果律を満たさない波形が作成されることがあった。そこで本研究では、時間関数の因果律を利用して、フーリエ振幅と位相の関係について、基礎的な検討を行った。因果律を利用すると地震動記録は、最小位相推移関数（以下MPS）と全域通過関数（以下AP）に因数分解することができる<sup>11)</sup>。MPSはフーリエ振幅特性で決定される。一方、APはフーリエ振幅特性を持たず、位相特性だけで決定され、近年の研究で、水平動成分のAPに関しては、直達S波が伝播した時間に依存する位相関数との指摘もある<sup>12)</sup>。本研究は、この因数分解の理論を用いて、フーリエ振幅と位相の関連性を考察した。

## 2. 解析手法と用いた地震動記録

### (1) 因果関数の因数分解問題

本研究で用いた解析手法の理論について、概要を説明する。地震動記録は、地震波動が到達する前に振幅を持たない。つまり、

$$x(t) = 0 \quad t < 0 \quad (4)$$

を満たす時間関数である。Papoulis<sup>13)</sup>によれば、この性質を満たす時間関数を因果関数と言い、この性質を因果律と呼ぶ。この因果関数のフーリエ変換 $F(\omega)$ は、

$$x(t) \Leftrightarrow F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \quad (5)$$

で定義される。式(5)において、 $|F(\omega)|$ はフーリエ振幅、 $\phi(\omega)$ はフーリエ位相、 $\omega$ は角振動数である。今、式(4)を満たす因果関数が $L^2$ ノルムに属する、つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (6)$$

であり、且つ、そのフーリエ振幅 $|F(\omega)|$ が Paley-Wiener の条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |F(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (7)$$

を満たす時、因果関数のフーリエ振幅 $|F(\omega)|$ は、最小位相推移関数(Minimum-Phase-Shift function 以下MPS)と全域通過関数(All-Pass function 以下 AP)に分解する事ができる。すなわち、

$$|F(\omega)| = |F_M(\omega)| |F_A(\omega)| \quad (8)$$

である。添え字の M と A はそれぞれ、MPS と AP を示す。これを因果関数の因数分解と言う。但し、式(8)において、APは

$$|F_A(\omega)| = 1 \quad (9)$$

で定義されるので、

$$|F(\omega)| = |F_M(\omega)| \quad (10)$$

となり、因果関数のフーリエ振幅は、MPSのフーリエ振幅と同じとなる。更に、MPSのフーリエ振幅 $|F_M(\omega)|$ とその位相 $\phi_M(\omega)$ は、

$$\phi_M(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |F_M(y)|}{\omega - y} dy \quad (11)$$

$$\log |F_M(\omega)| = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_M(y)}{\omega - y} dy \quad (12)$$

で示される Hilbert 変換の関係があり、互いに独立に存在しない。式(11)と(12)より、MPS は因果関数のフーリエ振幅より決定できる関数であり、

$$F_M(\omega) = |F_M(\omega)| e^{i\phi_M(\omega)} \quad (13)$$

と表される。それに対し AP は、式(9)から明らかであるが、フーリエ振幅特性を持たず、MPS を除いたフーリエ位相のみで決定される関数であるから、式 (9) を考慮すると

$$\begin{aligned} F_A(\omega) &= 1 \cdot e^{i(\phi(\omega) - \phi_M(\omega))} \\ &= e^{i\phi_A(\omega)} \end{aligned} \quad (14)$$

と表される。 $\phi_A(\omega)$ はAPのフーリエ位相である。最終的に、式(5)、(13)、(14)より、因果関数のフーリエ変換 $F(\omega)$ は、MPSとAPを用いて、

$$F(\omega) = |F_M(\omega)| e^{i(\phi_M(\omega) + \phi_A(\omega))} \quad (15)$$

つまり、

$$F(\omega) = F_M(\omega) F_A(\omega) \quad (16)$$

となる。

式(16)を逆フーリエ変換すると、MPSとAPは、時間領域においても定義できる。MPSとAPの時刻歴波形をそれぞれ、 $x_M(t)$ 、 $x_A(t)$ とすれば、元の因果関数 $x(t)$ は、

$$x(t) = x_M(t) * x_A(t) \quad (17)$$

で示される。 $*$ は合積である。時間領域におけるMPSとAPも因果関数となる。MPSとAPの計算方法に関しては、文献 11)、14)に詳しいので、ここでは省略する。

### (2) 解析対象とした地震動記録

本研究では、2000年10月6日13時30分に発生した、鳥取県西部地震(M<sub>J</sub>7.3、震源深さ10km)のKiK-netのTTRH02の地震動記録を解析対象とした。TTRH02は震央に最も近い観測点である。鳥取県西部地震はほぼ純粋な左横ずれ断層による内陸直下地震であった<sup>15)</sup>。上述の記録を選定したのは、震源域での地震動特性を検討するためである。震源域では、地震動の方向性が指摘されているので<sup>16)</sup>、得られる地震動記録の水平成分を、断層直交方向(Fault Normal)と断層平行方向(Fault Parallel)に座標変換を施し、解析を行った。

### 3. MPSとAPのフーリエ振幅と位相の関連性

図-1 に、TTRH02 (震央距離 7km) の地表で得られた水平動と上下動の加速度記録を示す。同図によれば、Normal 成分は最大加速度 (以下 PGA) 1000gal を超えており、Parallel 成分よりも大きく、震源近傍における地震動の方向性が認められる。Vertical 成分の PGA は、Parallel 成分とほぼ同じ 500gal 程度である。

図-1 に示した、時刻歴波形をフーリエ変換し、因数分解すると MPS と AP の、フーリエ振幅と位相が求められる。前章で述べたように、AP は、フーリエ振幅特性が 1 であり(式(9))、MPS のフーリエ振幅は、地震動記録のフーリエ振幅と同一である(式(10))。

TTRH02 の MPS と AP の、それぞれのフーリエ振幅と位相を図-2 に示す。同図より、AP のフーリエ振幅は、全周波数域で 1 であり、フーリエ位相特性のみを持つことが分かる。

図-2のMPSのフーリエ振幅より、地表における水平動2成分の卓越振動数は1~2Hzで、Vertical成分では、1.5Hzである。そして、3成分とも、MPSのフーリエ振幅がピークあたりの振動数で、MPSのフーリエ位相は急激に減少している。逆に、MPSのフーリエ振幅が急激に減少し、谷を示す振動数において、MPSのフーリエ位相の傾きが大きくなり、急激に増加してピークを示している。フーリエ位相は一般的に、 $-\pi$  から  $\pi$  の範囲になるように算出するので、フーリエ位相が急な増加を示している振動数とは、フーリエ位相が一回転して、急な減少を示していると考えてよい。

前述のように、MPSのフーリエ振幅と位相には、式(11)、(12)で示される Hilbert 変換の関係がある。式(11)と(12)は、 $\omega = y$  で極を持ち、角振動数  $\omega$  は  $y$  に対して無関係に変化するから、離散データの場合であれば、振動数  $\omega$  の数  $n$  だけ留数  $A_k$  が存在する。留数の定理の有理分数表示<sup>17)</sup>を使えば、式(11)は、

$$\begin{aligned} \phi_M(\omega) &= -\frac{1}{\pi} 2\pi i \left[ \oint_C \frac{\log|F_M(y)|}{\omega - y} dy \right] \\ &= -2i \left[ \log|F_M(\omega)| - \sum_{k=1}^n A_k \right] \end{aligned} \quad (18)$$

と展開される。ここで、 $\oint$  は Cauchy の主値積分である。式(18)を振動数  $\omega$  で微分すると、

$$\frac{d\phi_M(\omega)}{d\omega} = -2i \left[ \frac{1}{|F_M(\omega)|} - \sum_{k=1}^n A_k' \right] \quad (19)$$

となり、MPS のフーリエ位相の変化率である傾きは、フーリエ振幅が小さくなる、すなわち、谷の

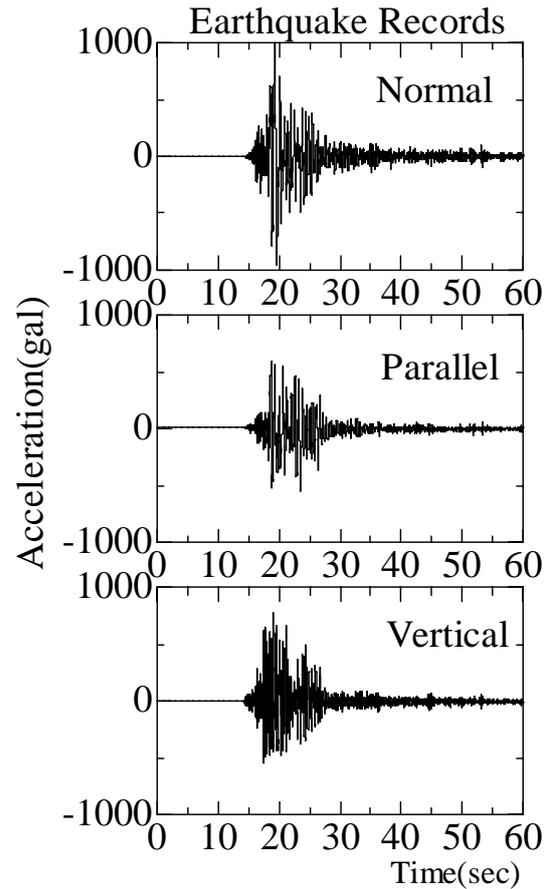


図-1 TTRH02 のNormal成分、Parallel成分とVertical成分の加速度記録 (2000年鳥取県西部地震M<sub>J</sub>7.3)

振動数になると、負の傾きが大きくなるのが式(19)から分かる。なお、式(19)の左辺の、フーリエ位相の振動数に対する傾きは、式(20)で定義される群遅延時間  $\eta(\omega)$  である。

$$\eta(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (20)$$

図-2 の、AP のフーリエ位相は、振動数に対し右向き、すなわち減少する傾向にあることが分かる。また、3成分で、その傾きやばらつき方が異なっている。AP のフーリエ位相の傾きは、MPS のそれが緩やかであるのに比べ、変動が激しい。これから察するに、地震動のフーリエ位相の非定常性は、AP の変動が強く影響していると思われる。

### 4. H/Vスペクトル比とその位相差について

図-3 に、図-2 の MPS の、水平動(Normal または Parallel 成分)と上下動 (Vertical 成分) のフーリエ振幅比 (以下、H/V スペクトル比) とそのフーリエ位相差 (以下、H-V MPS 位相差)、AP のフーリエ振幅比 (H/V AP スペクトル比) とそのフーリエ位相差 (H-V AP 位相差) を示す。

図-3 によれば、H/Vスペクトル比が、ピーク振

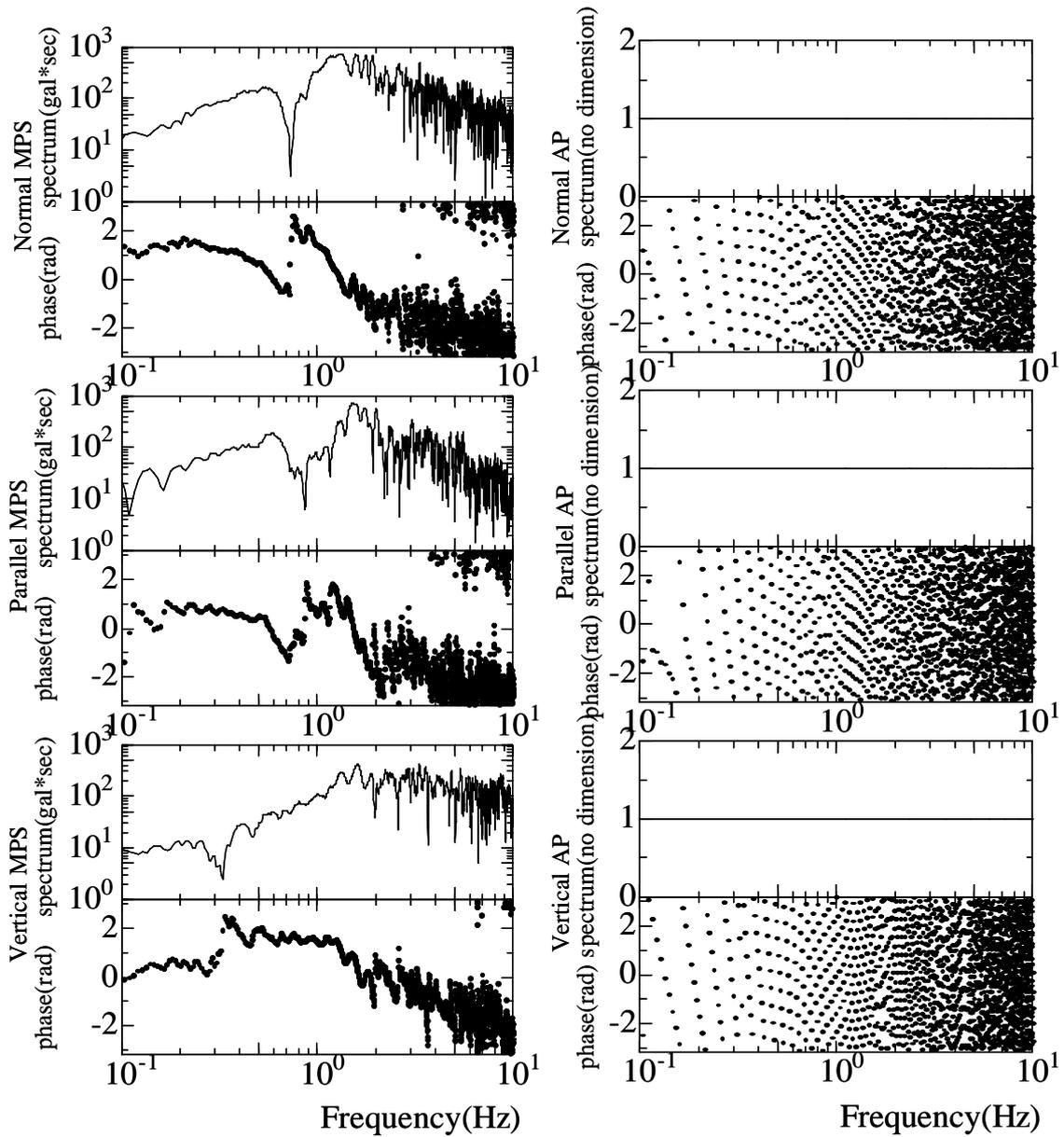


図-2 加速度記録 (TTRH02) の MPS (左) と AP (右) のフーリエ振幅とフーリエ位相

動数となる時に、H-V MPS位相差は、急激に減少して、谷となっているのが分かる。これは、前章の式(18)から説明される。MPSの水平動と上下動の、フーリエ振幅をそれぞれ、 $H_M(\omega)$ 、 $V_M(\omega)$ 、フーリエ位相を $h_M(\omega)$ 、 $v_M(\omega)$ 、留数を $B_k$ 、 $C_k$ とおくと、H-V MPS位相差は式(18)より

$$\begin{aligned}
 h_M(\omega) - v_M(\omega) &= \\
 &= -2i \left[ \log |H_M(\omega)| - \sum_{k=1}^n B_k - \log |V_M(\omega)| + \sum_{k=1}^n C_k \right] \\
 &= -2i \log \left| \frac{H_M(\omega)}{V_M(\omega)} \right| + 2i \sum_{k=1}^n [B_k - C_k] \\
 &= 2i \log \left| \frac{V_M(\omega)}{H_M(\omega)} \right| + 2i \sum_{k=1}^n [B_k - C_k] \quad (21)
 \end{aligned}$$

となる。式(21)から、H-V MPS位相差は、H/V ス

ペクトル比の対数に逆比例することが分かる。よって、H/V スペクトル比と H-V MPS位相差の間の関連性が数理的に示された。

図-3のH/V APスペクトル比が1になるのは、APのフーリエ振幅が1だからである。H-V AP位相差は、0~1Hz程度までは、ばらつきや変化は小さいが、1 Hz以上になるとばらつきが大きくなる。これは、図-2のAPフーリエ位相のばらつきが、1 Hz以上で大きくなるためと推察される。

## 5. まとめ

本研究では、地震動のフーリエ振幅と位相の関連性を、因果律を用いて評価した。震源域で観測された地震動記録に適用した結果、以下に示す関係が明らかとなった。

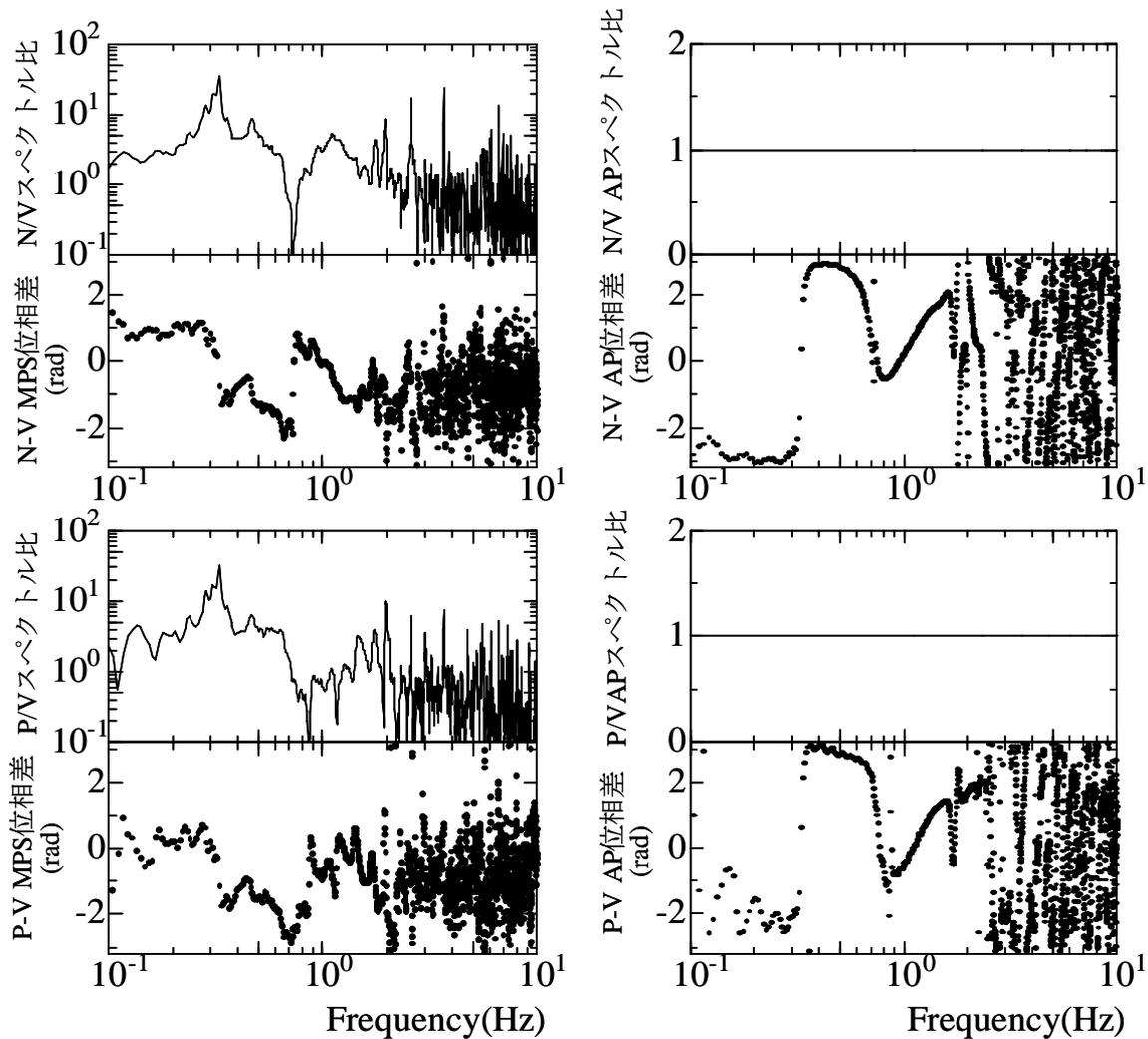


図-3 加速度記録 (TTRH02) のH/V スペクトル比 (N/V, P/V) とH-V MPS 位相差 (N-V, P-V) (左), 及び, H/V AP スペクトル比とH-V AP 位相差 (右) .

- (1) MPSのフーリエ振幅は, 地震動記録のフーリエ振幅と同じであり, MPSのフーリエ振幅と, MPSの位相には逆相関的な関係がある.
- (2) H/Vスペクトル比がピークを示す振動数において, H-V MPS位相差は急激に減少する. 逆に, H/Vスペクトル比が谷となる振動数においては, H-V MPS位相差は急激に増加する傾向にある.
- (3) 震源域の強震記録において, MPSのフーリエ振幅とその位相の相関性を, Hilbert変換の関係に, 留数の定理を適用して, 数学的に証明した.

本研究では, 因数分解によって得られたMPSのフーリエ振幅と位相の関連性について理論的に言及した. 今後は, 本論で定性的に特徴を示すにとどまった, APのフーリエ位相特性についても, 他の地震動記録と比較し, その物理的な意味を追求していくつもりである.

謝辞: 本研究では防災科学技術研究所のKiK-netの

地震動記録を利用させて頂いた. 記して謝意を表する.

#### 参考文献

- 1) Boore,D.M. : Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiation spectra, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.73, pp.1865-1894, 1983.
- 2)Aki, K. and Richards, P.G. : Quantitative seismology, p162-163, University science books, 2002.
- 3)Jennings, P.C.,Housner, G.W. and Tsai, N.C. : Simulated earthquake motions, *E.E.R.L.*, Pasadena, 1968.
- 4)荒川直士, 川島和彦, 相沢興: 応答スペクトル特性を調整した時刻歴地震応答解析用入力地震動波形, 土木技術資料, 第26巻, 第7号, 1984.
- 5)大崎順彦, 岩崎良二, 大川出, 政尾亨: 地震波の位相特性とその応用に関する研究, 第5回日本地震工学シンポジウム, pp.201-208,1978.
- 6)和泉正哲, 勝倉裕: 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会論文報告集, 第327号, pp.20-26, 1983.
- 7)Kimura, M and Izumi, M. : A method of artificial of

- earthquake ground motion, *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, pp867-874, 1989.
- 8)佐藤忠信, 室野剛隆, 西村昭彦: 観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.119-130, 2000.
- 9)澤田純男, 盛川仁, 土岐憲三, 横山圭樹: 地震動の位相スペクトルにおける伝播経路・サイト特性の分離, 第10回日本地震工学シンポジウム, p915-920, 1998.
- 10)Papoulis, A.:Fourier integral and its applications,p192-209, p213-217, McGraw-Hill, 1962.
- 11)和泉正哲, 勝倉裕, 大野晋: 地震動の因数分解に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文報告集第390号, pp27-33, 1988.
- 12)和泉正哲, 栗田哲, 遠藤良幸, 飛田潤, 半澤徹也: 表層地盤の地震波動伝播システムにおける伝達関数の因果性と因果伝播関数の構成要素に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文報告集, 第412号, 1990.
- 13)Papoulis, A. : Signal analysis, p227-231,McGraw-Hill, 1977.
- 14)地震動 その合成と波形処理, 理論地震動研究会編, p171-184, 鹿島出版会, 1994.
- 15)菊地正幸: リアルタイム地震学, p153-155, 東京大学出版会, 2003.
- 16)野津厚, 井合進, Iwan, W.D. : 震源近傍の地震動の方向性に関する研究とその応用, 港湾技術研究所報告, 第40巻, 第1号, pp107-167, 2001.
- 17)寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論増訂版, p204-205, 岩波書店, 1983.

(2005.3.15.受付)

## CONSIDERATION ON RELATIONSHIP BETWEEN FOURIER AMPLITUDE AND PHASE OF EARTHQUAKE MOTION

Katsuhiro SHIRAI and Tatsuo OHMACHI

Relationship between Fourier amplitude and phase of an earthquake ground motion is discussed using near-field strong motion records of the 2000 Western Tottori earthquake. According to the factorization theory, earthquake records are decomposed into minimum-phase-shift (MPS) and all-pass functions. Fourier amplitude of MPS is equals to that of earthquake records and is in inverse correlation to Fourier phase of MPS. Moreover the H/V spectral ratio is related to H-V MPS phase difference. It is due to a fact that Fourier amplitude and phase of MPS are related with each other in terms of the Hilbert transforms.