

# 不規則振動論による 応答スペクトルの減衰補正

横川英彰<sup>1</sup>・阿部雅人<sup>2</sup>・吉田純司<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 修士(工) オイレス工業株式会社 免制震カンパニー 支承設計部  
(〒105-8584 東京都港区芝大門1-3-2)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D 東京大学助教授 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻  
(〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)

<sup>3</sup>正会員 博士(工) 山梨大学講師 大学院医学工学総合研究部土木環境工学専攻  
(〒400-0047 山梨県甲府市武田4-3-11)

本研究は不規則振動論を用いた地震応答スペクトルの減衰補正法を提案する。既往の減衰補正法は、数多くの地震応答解析から求めた回帰式により補正関数を算出する方法や、周期と減衰定数の補正関数を用いる方法がほとんどであった。これらの方法は、経験的に算出される要素が大きく、解析的に明快な方法ではなかった。ここでは、質量・減衰・剛性の運動方程式に基づくパラメータによって応答を求めることができる不規則振動論を用いて、応答スペクトルの減衰による低減に関する検討を行った。その結果、既往の減衰による応答低減式より精緻な結果が得られることがわかった。

**Key Words** : Response spectra, Random vibration, Lyapunov Function, State Equation, Earthquake Wave

## 1. はじめに

道路橋示方書の改定により、橋梁等の設計において、動的解析を行なうことが必須となった。動的解析は精緻な設計が行なうことができる反面、データの入力項目が非常に多く、作業が煩雑となり、データの誤りが多くなることが予想される。そこで、解析結果のチェックが必要となる。それらのチェックには一般的に応答スペクトルが用いられる。応答スペクトルは一般的に減衰定数 5%における 1 自由度系の加速度応答を元に作成されているため、チェック対象となる構造物の減衰定数ごとに、減衰補正を行わなくてはならない。また、減衰定数による応答精度の向上は構造物の設計精度に大きく寄与することになり、精度向上は設計そのものの質の向上につながるものと思われる。既往の減衰補正法は数多くの地震応答解析の結果から求められた回帰式から求める方法<sup>1)2)</sup>や、周期と減衰定数を変数とした補正式を用いる方法<sup>3)</sup>がほとんどであった。これらの方法は、経験的に算出される要素が大きく、解析的に明快な方法ではなかった。ここでは、新たに解析的に明快である不規則振動論<sup>4)</sup>によって応答スペクトルの減衰による低減に関する検討をおこなった。その結果、既往の補正式と比較して精緻な結果が求められることが分かった。

はじめに、制御理論に基づく不規則振動論による解析法の説明を行なう。次に、1 自由度系の検討として、応答スペクトルの補正を試みる。最後に結果の考察とまとめを行なう。

## 2. 応答解析法

不規則振動論は、入力を白色ノイズと仮定した場合の応答を求める理論である。ここでは、応答解析の手順を図-1 に示す。手順として

構造物の 2 乗平均応答計算：全体系の構造物の 2 乗平均応答を求める

基準応答の計算：基準となる応答スペクトルの減衰定数に応じた不規則応答の逆数と、変位応答スペクトルを乗じた値を求める

実応答の計算： で算出した値と で算出した値を乗じる

～ までの 3 つの手順によって算出される。それらについて以下に説明する

### (1) 不規則振動解析

ここでは、不規則振動応答を制御理論に基づいたリアプノフ方程式を用いた方法で求める。 $M$  を質量行列、 $C$  を減衰行列、 $K$  を剛性行列、 $x$  を変位ベクトル、 $a$  を入力加速度とすると、一般的な運動

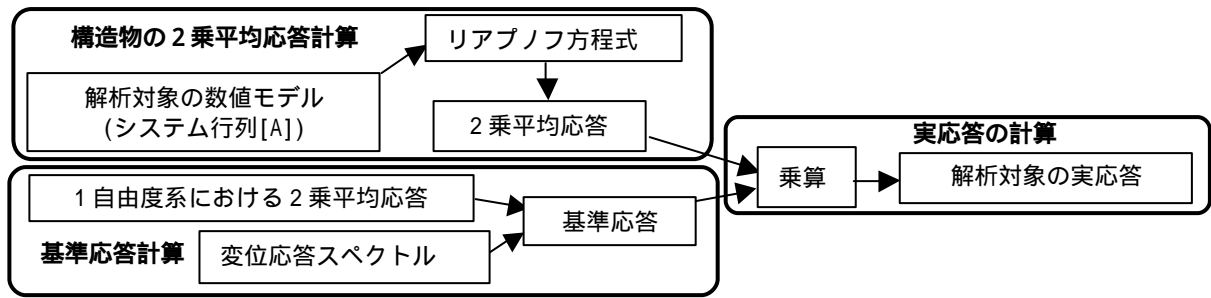


図-1 解析手順

方程式は式(1)のように示すことができる。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M \cdot a \quad (1)$$

これを1つのシステムと捉えるために、式(2)に示すような状態表現を用いる。

$$\dot{R} = AR + Bu \quad (2)$$

ここで  $A$  はシステム行列、 $R$  は状態変数、 $B$  は入力行列、 $u$  は外乱を示すスカラー量である。ここで、 $R$  を

$$R = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \quad (3)$$

とおくと、式(1)の左辺は、以下の式のようにシステム行列  $A$  に変換される。

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $I$  は、対角要素に1を持つ行列、 $0$  はすべての要素に0を持つ行列である。また、 $B$  行列は

$$B = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(5)において、 $\mathbf{1}$  は、全ての要素に1を持つ列である。また、入力行列を2乗した成分を持つ行列  $Q$  を式(6)に示す。

$$Q = B^T B \quad (6)$$

$R$  を2乗した成分を持つ行列(共分散行列)を  $X$  とする。

$$X = R \cdot R^T = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} & \dot{\bar{x}} \cdot \bar{x} \\ \bar{x} \cdot \dot{\bar{x}} & \bar{x} \cdot \bar{x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、 $\dot{\bar{x}}$  は速度の不規則応答ベクトル、 $\bar{x}$  は変位の不規則応答ベクトルとおくと、 $X$  の解は以下に示すリアプノフ方程式により求められる。

$$X^T A + AX + Q = 0 \quad (8)$$

式(7)に示すように、行列  $X$  の対角要素は構造物の2乗平均応答を示し、対角要素が速度の2乗平均

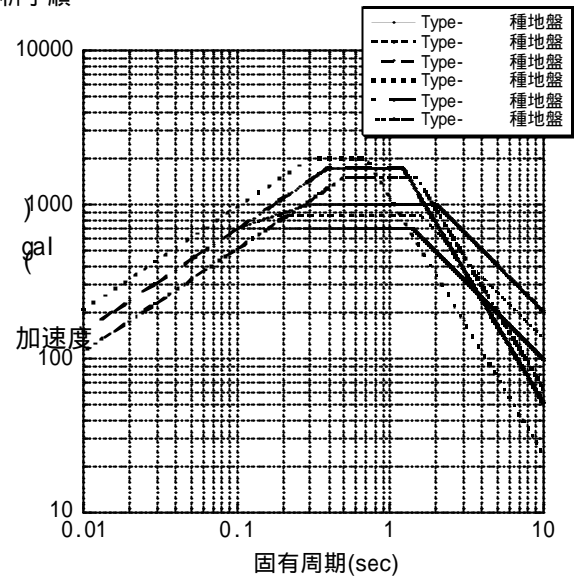


図-2 加速度応答スペクトル

応答、変位の2乗平均応答となる。式(7)の対角要素を式(9)に示す。

$$diag(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \cdot \dot{\bar{x}} & \\ & \bar{x} \cdot \bar{x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

速度の不規則応答ベクトル  $\dot{\bar{x}}$  のスカラー成分を  $\dot{\bar{x}}$ 、変位の不規則応答ベクトル  $\bar{x}$  のスカラー成分を  $\bar{x}$  とし、調和応答を仮定すると、周期  $T$  は以下のように示すことができる。

$$T = \left( \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}} \right) / 2p \quad (10)$$

#### (2) 基準応答の計算

最初に変位応答スペクトル求める方法を示す。図-2に示すような加速度応答スペクトル  $R_a(T)$  を調和外力応答と仮定して、式(11)により、変位応答スペクトル  $R_D(T)$  に変換する。なお、ここで用いる周期  $T$  は、式(10)によって求められた値を用いる。

$$R_D(T) = \frac{R_a(T)}{\left( \frac{2p}{T} \right)^2} \quad (11)$$

式(11)で算出された  $R_D(T_i)$  と、周期  $T$  で  $R_a(T)$  と同じ減衰定数を持つ変位の2乗平均応答  $p^2$  を用い

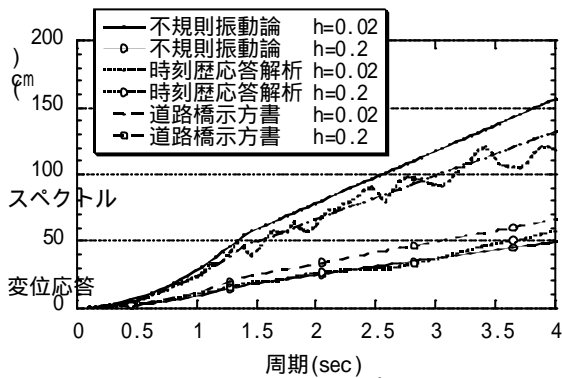


図-3 変位応答スペクトル(タイプ 地震動 1種地盤)

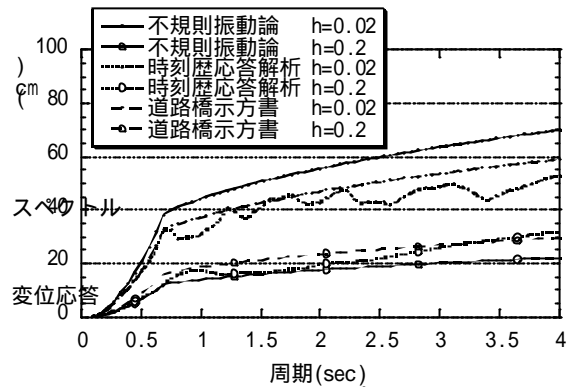


図-5 変位応答スペクトル(タイプ 地震動 1種地盤)

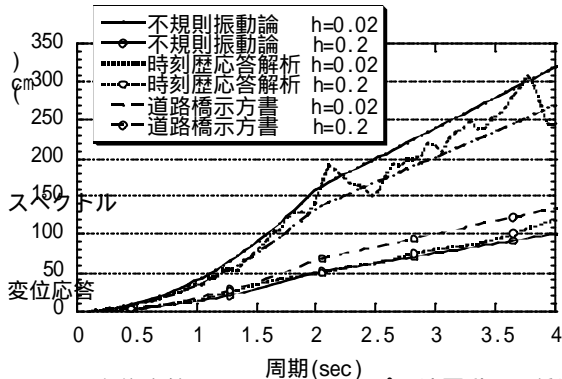


図-4 変位応答スペクトル(タイプ 地震動 3種地盤)

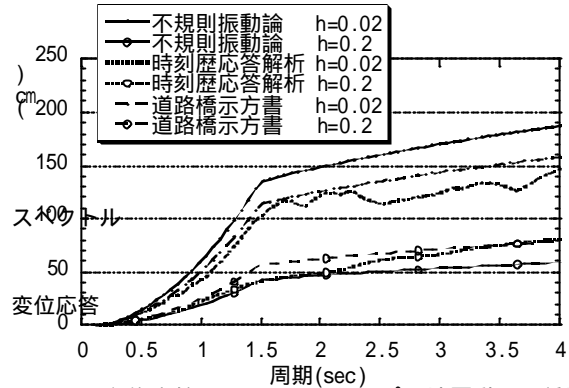


図-6 変位応答スペクトル(タイプ 地震動 3種地盤)

て、次式によって、基準応答  $g$  を求める。

$$g = \frac{R_D(T)}{\sqrt{p^2}} \quad (12)$$

(3) 基準応答から、変位応答を求める手順

基準応答  $g$  は、基準となる1自由度系の変位の2乗平均応答の平方根と、変位応答スペクトルの比であるので、ある減衰定数を持つ1自由度系の2乗平均応答の平方根を  $g$  とすると式(13)によって減衰定数を補正された変位応答  $x$  が求められる。

$$x = g \cdot \bar{x} \quad (13)$$

ここまでの手順を図-1に示す。ここから、時刻歴応答解析を行わずに、減衰を含んだ応答解析を行なうことができることが分かる。質量・減衰・剛性のパラメータから解析的に求められるために、既往の研究<sup>5)</sup>では橋梁の応答解析にも適用可能であることが示されている。

### 3. 応答スペクトルの減衰定数による補正

応答スペクトルを用いて応答推定を行なう際、応答スペクトルの値を減衰定数に応じて補正しなくてはならない。道路橋示方書に基づく補正式は回帰式であるために誤差がある。しかし、概ね応答が大きく算出され設計では安全側となるとは言え、設計上精緻な値が必要な場合では、適用が難しい。

ここでは、応答スペクトルの減衰補正の方法と

して不規則振動論を用いた方法を提案する。応答スペクトルの減衰による低減を運動方程式に基づいて解くため、解析的に明快に算出される。計算方法前項で示した手法において対象構造物を1自由度とし、周期、減衰定数を設定することにより算出される。また、応答計算で用いる加速度応答スペクトルは道路橋示方書にある値を用い、比較の対象となる時刻歴応答解析に用いた地震波形は道路橋示方書に基づく各タイプ、各地盤の標準波形の3波を用いて、3波平均で評価をしている。

#### (1) 解析結果と考察

解析結果を図-3～図-6に示す。減衰定数が0.02の場合、全ての地震動において、本方法を用いると応答を時刻歴応答解析と比較して大きめに評価してしまい、道路橋示方書の減衰補正式を用いたほうが近い値を示す。時刻歴応答解析では、減衰定数が0に近い値になっても一定の振幅に収束するが、不規則振動論では、周波数領域での計算となるため減衰定数が0に近い値になると、応答が無限大になるためである。しかし、実際の構造物において、減衰定数が0.02という値のものは希少であり、この領域の使用頻度は極めて少ないと考えられる。

減衰定数が0.2の場合は、タイプ 地震動に関しては、時刻歴応答解析と近い値を示している。これは、タイプ 地震動が比較的継続時間が長く白色雑音に近いことが理由だと考えられる。タイプ 地震動では道路橋示方書の補正式と比較して周期2秒程度までは比較的近い値を示しているが、3秒を超える辺りからは、道路橋示方書の補正式の方

が時刻歴応答解析と近い値を示している。タイプ地震動は、白色雑音というよりもむしろパルスの地震動であり、周期が短い部分では、比較的白色雑音に近い状態だが、長周期になるにつれて、挙動がパルスに近くなるため、応答の精緻性が失われると考えられる。道路橋示方書の応答スペクトルを用いた場合、固有周期2秒程度、減衰定数は0.2程度であれば、既往の減衰補正式と比較して概ね時刻歴応答解析と近似した解析結果が算出されることが考えられる。ここでは、1種地盤と3種地盤の解析結果を記載しているが、2種地盤に関しても同様の解析を行っており、応答の傾向としては、地震タイプにより前述した傾向と類似した結果を示すことを確認している。

本手法は、免震橋梁のような全体系構造減衰が高く、固有周期2秒程度以下の連続橋は実設計上多くあり、実務に際しても十分使用に耐えるものと考えられる。

#### 4. まとめ

ここでは、不規則振動論を用いた応答スペクトルの減衰補正に関する解析を行なった。ここで得られた知見は以下のとおりである。

(1)減衰定数が0に近い値では、不規則振動論を用いた場合、既往の減衰補正式よりも大きな値として計算される。これは、不規則振動論は周波数領域の計算となるため、減衰定数が0に近い値では応答が無限大に漸近するためである。

(2)タイプ地震動では、比較的推定精度が高いことが分かった。これは、地震動が、継続時間が長く、白色雑音に近い特性であると考えられる。

(3)タイプ地震動では、長周期部分では、応答推定精度が低下することが分かった。これは、長周期部分では、挙動がパルスのであり、白色雑音の挙動ではないために、誤差が大きくなったと考えられる。

今後、ここで得られた知見を元に、多自由度非線形系に拡張し、より実用的な解析法に発展させる予定である。

#### 参考文献

- 1)川島一彦,相澤興:減衰定数に対する地震応答スペクトルの補正法,土木学会論文集, No. 344/ -1, pp. 351-355, 1984.
- 2)建設省土木研究所:最大地震動および地震応答スペクトルの推定法 - (その5)減衰定数による地震応答スペクトルの補正式の開発 -,土木研究所資料,第2001号,1983.
- 3)柴田明德:最新耐震構造解析,森北出版 1981.
- 4)たとえば 榎木義一,添田 喬,中溝高好:確率システム制御の基礎,日新出版, pp. 33-56, 1975.
- 5)日本道路協会:道路橋示方書・同解説, 耐震設計編, 2002.3.
- 6)横川英彰,阿部雅人,吉田純司:不規則振動論を用いた橋梁の応答予測法,第5回保有水平耐力法に基づく橋梁の耐震設計に関するシンポジウム, pp. 177-182, 2002.

(2003.9.10 受付)

## A Damping Modification method for Response Spectra using Random Vibration

Hideaki YOKOKAWA, Masato ABE and Junji YOSHIDA

This research proposes the modification of the earthquake response spectra with respect to damping that used random vibration method. Almost damping modification method were proposed by the past, uses the revision function that solved from numerous earthquake response analysis and, revision function of the period and damping constant. These method were calculated empirically, and not a clear like an analysis. Here, we did the examination about the decrease of the response spectrum by using an random vibration method. As a result of this method, We understood that this method gives the exact solution than the past those.