時間・周波数両領域の包絡線に基づく波形の合成について

本田 利器[1]

[1]正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

非線形応答解析のための入力地震動合成においては，地震動特性の周波数特性に加え，時間的な変化も重要な要因である．しかし，周波数特性と時間的変化の両者を厳密に考慮することは非常に困難である．ここでは，時間的な包絡線は，位相スペクトルと強く関係している，ということを陽に用いた波形合成方手法を考える．具体的には，時間領域の波形の周波数特性が周波数領域のフーリエ振幅となるように，周波数領域の「周波数特性」が時間領域における包絡線となるということを用いた波形合成法について述べ，数値シミュレーションによりその有用性を検証する．また,「振幅調整波」との関係についても考察する．

Key Words : *Wave Synthesis, Envelope, Fourier Spectrum, Input Motion, Seismic Design*

1. はじめに

非線形解析に基づく耐震設計においては入力地震動は，いわゆる周波数特性だけでなく，その時間的な変化も非常に重要である．そのため，両者の影響を考慮した波形合成法への需要は大きい．そのための手法としては，群遅延時間（位相差分）やウェーブレット等を用いた検討がされている．しかし，必ずしも工学的な目的を満たす手法とはなっておらず，一般にも広まっていない．

本報告では，地震工学の分野でも広く用いられており，直観的にもわかりやすい時間及び周波数の両領域における包絡線に基づいて，それらを近似的に満たす波形を合成する方法について述べる．これは，時間領域での包絡線は位相スペクトルの相関性に基づいて決まることを用いた手法であり，その手順は単純である．本報告では，理論的な背景と具体的な手順について述べ，数値計算例を通してその性能も示す．また，広く用いられている「振幅調整波」の作成方法と本手法の関係についても考察する．

2. 時間–周波数関係

提案する手法の基本的な理論について述べる．時刻歴波形は複素信号とする．時系列信号 $s(t)$（t は時刻を表す.）のフーリエ変換を $\hat{s}(\omega)$（ω は周波数を表す.）と表され,

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(t) \exp(-i\omega t)\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

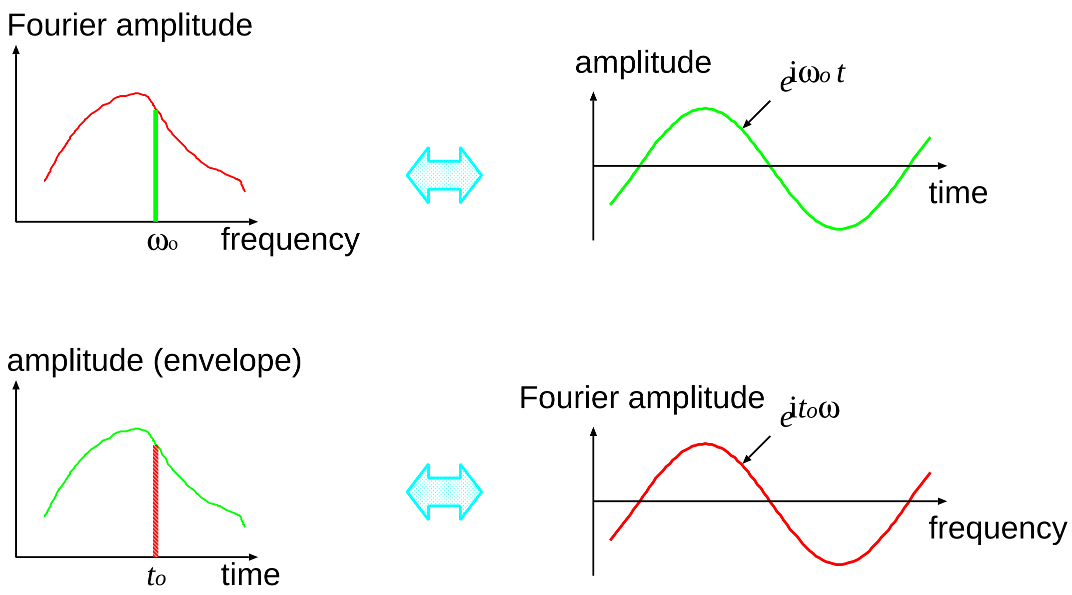
と与えられる．一方，フーリエ逆変換もほぼ同様に,

$$s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{s}(\omega) \exp(i\omega t)\, \mathrm{d}\omega \tag{2}$$

と与えられる．これらの式の類似性から，広く知られているように，時間領域での表現 $s(t)$ と周波数領域での表現 $\hat{s}(\omega)$ の間に成立する関係は，両者を入れ替えてもほぼ同じものであることが分かる.（**図–1**）すなわち，時間領域で表された波形 $s(t)$ の周波数特性が周波数領域のフーリエ振幅 $|\hat{s}(\omega)|$ を定めるのと同様に，周波数領域で表現された $\hat{s}(\omega)$ の「周波数特性」（周波数スペクトルを時系列と見なした場合の周波数特性であり，物理的な意味での周波数特性ではない．両者の区別のため「」を付して記す．この表現は以下でもたびたび用いる.）が，時間領域における変化すなわち包絡線 $|s(t)|$ を与えることとなる．

簡単な例を示す．**図–1** の上段に示されているように，フーリエ振幅スペクトルがデルタ関数で与えられる波形は時間領域では正弦波である．同様に，同図の下段の図に示されているように，時間軸上でデルタ関数で与えられる波形の複素フーリエ振幅スペクトルは正弦波となる．例えば，時間軸上で，時刻 $t = t_0$ におけるインパルスとなるデルタ関数 $x(t) = \delta(t - t_0)$ を考える．このフーリエ変換は $\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}$ である.（このスペクトルの絶対値は一定値 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ をとる.）

このように，時間軸上での包絡線は，複素フーリエ振幅の「周波数特性」に対応している.（なお，以下では離散フーリエ変換を用いる．その定義式は式 (1),(2) とは若干異なる.）



図–1 時刻歴の包絡線は，周波数軸上での「時間特性」の振幅（絶対値）であるということ．または，時刻歴のデルタ関数は周波数軸上での正弦波であるということ．

3. 包絡線と周波数特性を考慮した波形合成

(1) 基本的な考え方

時刻歴波形の包絡線は周波数軸上での波形の「周波数特性」であるから，時間領域における包絡線を実現するためには，複素フーリエスペクトルの「周波数特性」を考えればよい．しかし，周波数軸上で，与えられたスペクトル特性と「周波数特性」の両者を同時に満たすスペクトル列を合成することは困難である．（そのような数列を合成することは，本報告の目的にほかならない．）

そこで，提案する方法では，複素フーリエスペクトルの「周波数特性」は，位相スペクトルの「周波数特性」により支配的に決定され，振幅（絶対値）の変動からの影響は小さいものと仮定する．この時，合成する波形の周波数特性はフーリエ振幅の絶対値によって考慮され，その波形の包絡線は位相スペクトルの周波数特性により考慮されることになる．ここでは，想定する周波数特性を有する（または期待値としてそのような周波数特性を満たす）確率過程を作成し，これを位相スペクトルとして用いる．

一方，振幅スペクトルとしては，想定する周波数特性を近似するスペクトルを用いる．これにより，時間領域と周波数領域の両領域において，期待値として想定された包絡線を満足する波形が合成されることが期待される．

(2) 合成手順

提案する波形合成手法の手順を述べる．離散化された時刻及び周波数はそれぞれ $t = t_n$ 及び ω_n と表す．目標とする時間領域での包絡線を $a_n = a(t_n) \geq 0$，周波数領域での包絡線を $A_n = A(\omega_n) \geq 0$ とし，これらに基づき，時刻歴 $\{s_n\}$ $(n = 0, \ldots, N-1)$ を合成することを考える．なお，$N = 2^p$（p：正整数）である．以下に手順を示す．

まず，包絡線 a_n を周波数特性（振幅スペクトル）の期待値として有する複素信号 $\{\hat{a}_n\}$ を合成する．このような信号は，正規直交化された複素確率変数 η_i（積の期待値が $\mathrm{E}(\eta_i \eta_j^*) = \delta_{ij}$ となる複素数の確率変数．$*$ は複素共役を表す．）を用いて

$$\hat{a}_n = \sum_{i=0}^{N} a_i \eta_i \exp(\mathrm{i}\omega_i t_n) \tag{3}$$

と表すことができる．これは，この信号のフーリエ変換の ω_i における振幅の絶対値が $|a_i \eta_i|$，そして，その期待値が $|a_i|$ であることから確認できる．

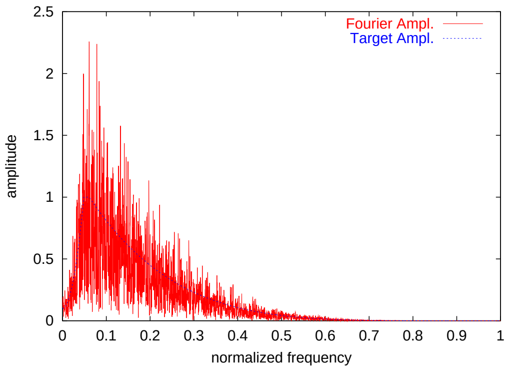
複素確率変数 η_i としては，例えば，ξ_{i1}, ξ_{i2} を独立な（実数の）ガウス確率変数として

$$\eta_i = \frac{\xi_{i1} + \mathrm{i}\xi_{i2}}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

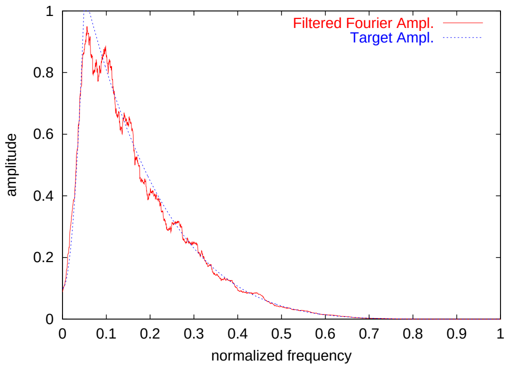
を用いることができる．また，「周波数特性」を（期待値の意味ではなく）厳密に満たす確率過程を合成することも可能である．例えば，独立な実数確率変数 ψ_i を用いて

$$\eta_i = \exp(\mathrm{i}\psi_i) \tag{5}$$

とすればよい．（ψ_i は値域 $[0, 2\pi)$ の一様乱数とすることが考えられるが，それ以外の乱数であっても問題はない．）これら以外でも，正規直交性を有すれば任意の複素確率変数を用いることができる．

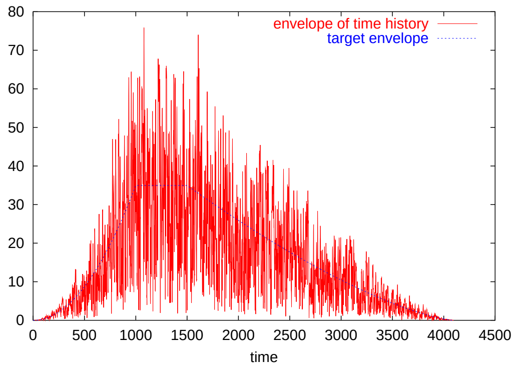


(a) obtained spectra

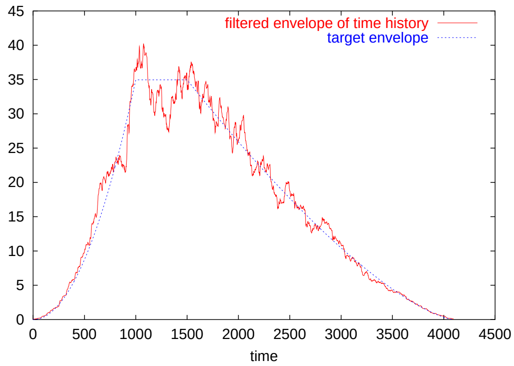


(b) filtered spectra

図–2 振幅包絡線の目標包絡線との比較



(a) obtained spectra



(b) filtered spectra

図–3 時刻歴（包絡線）の目標包絡線との比較

実際の計算においては，上のように定義される確率変数 η_n を用いて，時系列 $\{a_n\eta_n\}$ を作成し，これを逆フーリエ変換することで，$\{\hat{a}_n\}$ を求める．

目標とするフーリエ振幅スペクトル $A(\omega_n)$ を厳密に満たす波形を合成するためには，位相スペクトル $\hat{a}(\omega)$ と振幅スペクトル $A(\omega)$ を有するスペクトルを

$$\hat{s}_n(\omega) = A(\omega_n)\frac{\hat{a}_n}{|\hat{a}_n|} \tag{6}$$

として合成することが必要である．しかし，一般に，想定される振幅スペクトルを完全に満たす波形は時刻歴の包絡線の再現性が低い．（これは数値計算で確認できるが，ここでは計算結果は省略する．）そこで，本検討では

$$\hat{s}_n(\omega) = cA(\omega_n)\hat{a}_n \tag{7}$$

として合成するものとする．c は，合成される波形のパワーが想定するフーリエスペクトルのパワーと一致するようするための定数で

$$c = \left\{\frac{\sum_i A^2(\omega_i)}{\sum_i A^2(\omega_i)\hat{a}_i^2}\right\}^{1/2} \tag{8}$$

で与えられる．ただし，$\hat{s}_n(\omega)$ は期待値として $A(\omega_n)$ を有するわけではないことには注意が必要である．

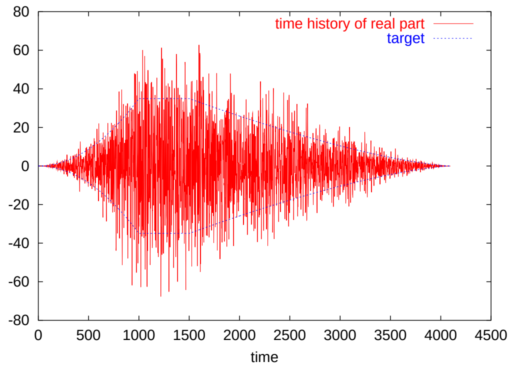
最後に，$\{\hat{s}_n\}$ を逆フーリエ変換することで，時系列信号 $\{s_n\}$ を得る．

4. 数値計算例

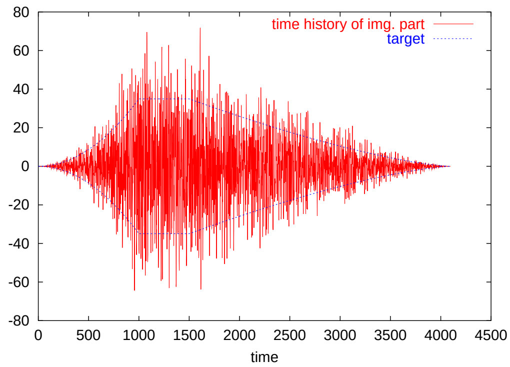
提案した手法を用いて行なった数値計算例の結果を**図–2** 及び**図–3** に示す．それぞれ，周波数領域におけるフーリエ振幅および時間領域における包絡線について，目標として設定したスペクトル／包絡線（青線で示されている）と実際に得られたスペクトル（同，赤線）の比較を示したものである．両図において (a) は，上記の方法で合成された波形の振幅及び包絡線を図化したものである．これらの図から，合成波形は目標とするスペクトル／包絡線の周りで大きくばらついていることが分かる．

両図の (b) は，合成された波形のスペクトルを平滑化したものを示している．ここではスペクトルのパワーを変化させないよう，二乗値に対して平滑化を施した．これらの結果より平滑化された値は目標スペクトル／包絡線とよく一致していることが分かる．

また，**図–4** に，合成された波形の実部と虚部のそれぞれについて，想定する包絡線とともに時刻歴を示す．同図から，合成された波形は目標包絡線をよく再現する波形となっていることが分かる．



(a) 実部



(b) 虚部

図−4 時刻歴波形の目標包絡線との比較

5. 振幅調整波について

観測記録のフーリエ振幅の調整をすることによる設計用入力地震動の合成は広く行われている．(目標とするスペクトルが応答スペクトルで与えられる場合も調整しているのはフーリエ振幅である.）これは，上述した手法において，複素確率過程 $\hat{a}_n$ の実現値として強震記録を用いることに相当する．強震記録は実信号であるが，虚部を伴わない複素信号だと解釈することに問題は無い．

また，虚部として実部のヒルベルト変換を付加して作成した複素信号[1]を $\hat{a}_n$ の実現値として用いたと解釈することも可能である．この場合，この信号の複素包絡線[1]（各時刻における値の絶対値から構成される時系列）を目標とする包絡線とし，複素確率変数 η_i として式 (5) を想定した場合の実現値と解釈することができる．したがって，式 (5) における確率変数 ψ_i の他の実現値を用いることで，時間周波数両領域における包絡線として同様の特性を想定した他の波形を合成することも可能となる．

このように，いわゆる「振幅調整波」の合成法は本報告で示した手法の一つの例という解釈が可能であることが分かる．

なお,「振幅調整波」の合成において

(1) 強震記録の位相と目標とする周波数特性を使って，逆 FFT で波形をつくる．

(2) その波形の時間包絡線が想定する関数と一致するように調整する．

という作業を繰り返す手法も用いられているが，その繰り返しによる精度の向上やその収束性は保証されていないことは認識されておいてよいと思われる．

6. おわりに

非線形時刻歴応答解析のための時間周波数特性（周波数の時間変化）を考慮した波形合成法について述べた．本手法により合成された波形の周波数特性や時間特性（包絡線の時間変化）は，ばらつきは大きいが，平滑化すると想定した特性を良く近似するものであった．また，本手法と「振幅調整波」の合成方法との関係についても考察した．

参考文献

1) パポリス, A. : 工学のための応用フーリエ積分，オーム社，1967 年

(2003 年 9 月 11 日 受付)

WAVE SYNTHESIS CONSIDERING THE ENVELOPES IN BOTH TIME AND FREQUENCY DOMAINS

Riki HONDA

In nonlinear dynamic analysis of structures, frquency characteristics of input ground motions are imporant factors, but temproral variation of frequency characteristics (time frequency characteristic) also play imporant roles. However, simultaneous consideration of both tempral and frequency characteristics has dfficulty. We present a scheme exploiting the fact that temporal variation (envelope) of the time series signal is strongly dependent on phase spectrum. The scheme generates the phase spectrum that has a correlation corresponding to the target envelope and assumes that the correlation of the spectrum is goverened by the correlation of the phase spectrum. Performance of the scheme is verified by numerical simulations.