

# 不整形地盤の地震応答に現れる リーキングモードの影響

秋山 伸一<sup>1</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 (株)CRCソリューションズ (〒136-8581 東京都江東区南砂2-7-5)

E-mail:s-akiyama@crc.co.jp

著者はこれまでに、斜面を有する半無限弾性体の地震応答にはRayleigh波特性方程式から導かれるリーキングモードの影響が含まれることを指摘してきた。ただし、その影響はRayleigh波に比べて小さいものであった。これに対し、本論文ではリーキングモードが不整形地盤の地震応答に大きな影響を与える場合があることを示すと同時に、その理由を明らかにするための考察を試みている。まず、斜面を有する半無限弾性体に平面SV波が任意の角度から入射する時の地震応答を振動数領域で定式化されたBEMによる波動伝播解析から求める。つぎに、著者が提案しているモード展開手法を用いて地震応答から斜面で発生する散乱波を構成する波動成分を検出し、地震応答に与えるリーキングモードの影響を調べている。

**Key Words :** Rayleigh wave, leaking mode, topographic irregularity, P and SV wave

## 1. はじめに

地震動に及ぼすリーキングモードの影響については比較的早くから研究が行われている。例えば、Phinney<sup>1)</sup>やGilbert<sup>2)</sup>、Chapman<sup>3)</sup>らはLambの問題<sup>4)</sup>を対象に、リーキングモードが地震動に与える影響を理論的に調べている。これらの研究では半無限均質地盤あるいは成層地盤を対象としている。一方、著者は不整形地盤として斜面を有する半無限弾性体を取り上げ、波動伝播解析から求められる地表面変位応答にもリーキングモードの影響が含まれることを指摘している<sup>5)</sup>。

これまでの研究によると、地震応答に与える影響は減衰性を持つリーキングモードよりも、むしろ遠方まで伝わるRayleigh波の方が大きいものとして扱われている。また、上に述べた著者の研究においてもリーキングモードの影響はRayleigh波に比べて小さい結果となっている。しかしながら、この結果はごく限られた地盤条件と地震入力に基づく検討から得られたものである。したがって、これらの条件如何によっては、リーキングモードの影響が卓越する場合もあることが予想される。

本論文ではこれまでの研究に基づき、リーキングモードが不整形地盤の地震応答に大きな影響を与える場合があることを示す。さらに、その原因を明らかにするための考察を試みる。まず、斜面を有する半無限弾性体とし

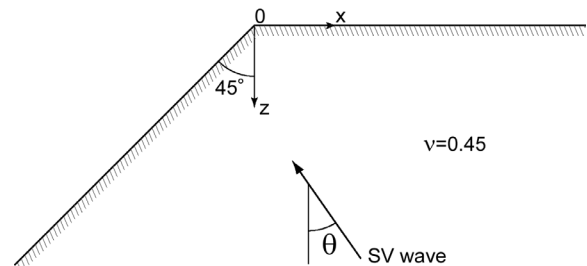


図-1 解析モデル

てモデル化された地盤に、下方から平面SV波が任意の角度で入射する場合を対象に、振動数領域で定式化された境界要素法(BEM)を用いて波動伝播解析を行い、地震応答を求める。つぎに、著者が提案しているモード展開手法<sup>6)</sup>を用いて地震応答から斜面で発生する散乱波を構成する波動成分を検出し、地震応答に与えるリーキングモードの影響について検討する。

## 2. 解析手法の概要

### (1)解析モデル

波動伝播解析に用いる地盤モデルを図-1に示す。地盤モデルは左側に45°の斜面を有する半無限弾性体であり、ポアソン比は $\nu=0.45$ である。この地盤に入射角 $\theta$ の角

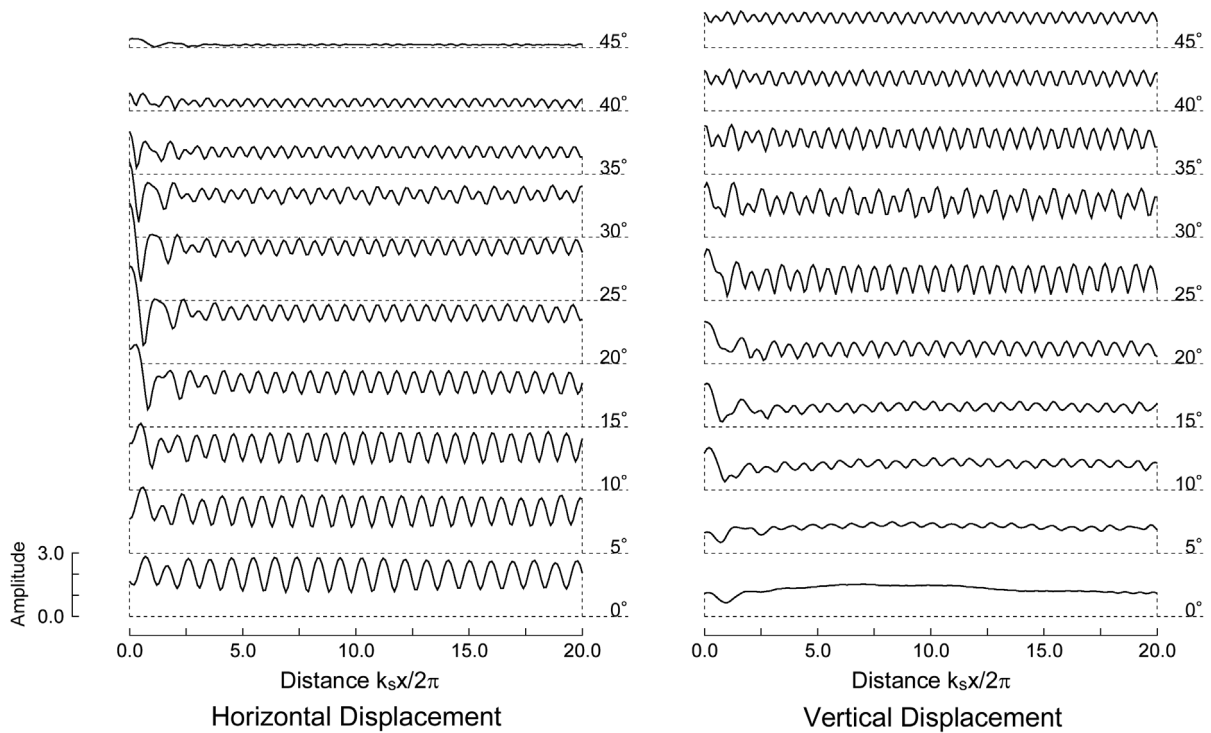


図-2 BEMによる波動伝播解析結果（地表面変位応答）

度から平面SV波が入射する時の応答を解析する。

波動伝播解析には振動数領域で定式化された境界要素法(BEM)を用いる。解析領域は斜面の端部( $x=0$ )から入射SV波の波長の20倍までの地点とする。境界要素は解析領域の外側に入射波長2倍の地点まで設けることにして、地表面を1/10波長の長さの要素で離散化する。

## (2) モード展開手法による地表面変位応答の分析方法

BEMによる波動伝播解析から求められる地表面変位応答のうち、地表面が水平となる部分( $x>0$ )に対して波動の分析を行う。図-1に示す地盤で観測される地表面変位応答は入射波による直接の応答と斜面から伝播してくる散乱波の影響によって構成される。このうち、入射波による応答は解析的に求められるが、散乱波による応答を解析的に求めることは難しい。そこで、波動伝播解析によって求められた地表面変位応答から入射波の影響を除いた散乱波成分に対してモード展開手法<sup>5)6)</sup>を適用し、波動を分析する。

このモード展開手法は著者が面外波動に対して定式化した手法<sup>7)</sup>を面内波動に対しても適用できるように拡張したものである。ここでは、面内波動による地表面変位応答を卓越する波動成分の和によって次式で表す。

$$u(x) = \sum_{j=1}^n A_j \exp(-i\xi_j x), w(x) = \sum_{j=1}^n B_j \exp(-i\xi_j x) \quad (1)$$

ただし、 $\xi_j = k_j(1 - h_j)$

ここに、 $u(x)$  と  $w(x)$  は地表面上の位置  $x$  における水平

変位と鉛直変位を表し、 $A_j$  と  $B_j$  は  $j$  次モードの水平および鉛直成分の複素振幅、 $\xi_j$  は複素数で表される  $j$  次モードの波数、 $h_j$  は  $j$  次モードの減衰定数を示す。

モード展開手法では、式(1)に示す未知量であるモードパラメーター  $A_j$ 、 $B_j$ 、 $\xi_j$  を最小二乗法を用いて求める。なお、モード展開手法の詳細については文献5)6)を参照されたい。

## 3. リーキングモードの基本的性質

本論文ではリーキングモードに着目した地震応答の検討を行うので、ここでは、まずリーキングモードの基本的な性質を簡単に整理しておく。

Rayleigh 波特性方程式の根から導かれる固有モードのうち、Rayleigh 波は波動の放射条件を満たす Riemann 葉上に存在する実根として与えられるのに対し、リーキングモードは放射条件を満足しない Riemann 葉上に分布する複素根として与えられる。このリーキングモードは地盤内部にエネルギーを放射しながら、水平方向に減衰を伴い伝播する波動であり、かつ、P 波入射に対して反射SV波のみが発生するか、SV 波入射に対して反射 P 波のみが発生する場合の波動伝播としても説明できる。

ただし、実際には上に示した入射と反射がそのまま観測されるのではなく、放射条件を満足しない Riemann 葉上から発する極の影響のうち、分岐点と切断を通過して放射条件を満足する葉上に現れる成分がリーキングモー

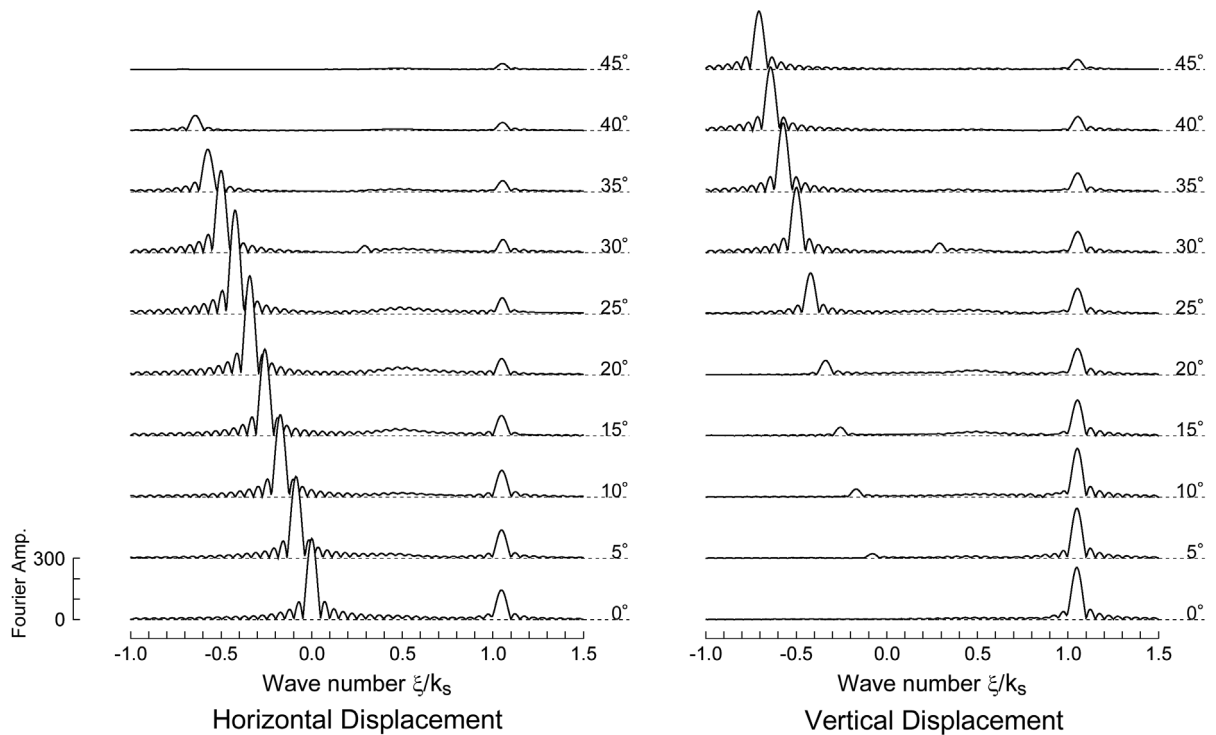


図3 BEMによる波動伝播解析結果 (地表面変位応答の波数スペクトル)

ドとして観測される。この成分は P 波よりも遅いが SV 波よりも早い速度を有する。さらに、Lamb の問題によると、上述の分岐点による寄与が実体波の影響を表すことから、リーキングモードを実体波と関連づけることも可能となる。なお、リーキングモードの性質についての詳細は文献 6) を参照されたい。

#### 4. BEMによる波動伝播解析

BEMによる波動伝播解析から求められる地表面変位応答のうち、地表面が水平となる部分( $x > 0$ )の応答を図-2 に示す。図には、入射角  $\theta$  を  $0^\circ$  から  $45^\circ$  まで変化させて行った解析結果をまとめ、左側には水平変位応答を右側には鉛直変位応答を示す。ここで、 $\theta = 0^\circ$  は水平な地表面に対してSV波が垂直に入射する場合であり、 $\theta = 45^\circ$  は斜面に対してSV波が垂直に入射する場合に対応する。図の横軸は、原点からの距離( $x$ )をSV波の波長( $2\pi/k_s$ )により無次元化して表す。また、変位応答は入射波振幅に対する倍率を表す。

図-2を見ると、地表面変位応答は入射角によって変化する。これは水平な地表面において入射SV波に対する反射が入射角によって変化し、さらに、斜面で発生する散乱波も入射角によって変化するためである。これらの応答のうち、 $\theta = 15^\circ \sim 25^\circ$  にかけての応答では水平面の端部付近の振幅が大きく変化する様子が現れている。

つぎに、図-2に示した地表面変位応答の波数スペクト

ルを図-3に示す。図の横軸に示す波数( $\xi$ )をSV波の波数( $k_s$ )によって無次元化して表す。図-3によると、水平変位応答と鉛直変位応答の波数スペクトルにはどちらも2つの大きなピークが見られる。このうち、左側のピークは  $\theta = 0^\circ$  で無次元波数0の位置に現れる。ここから入射角が変化するにつれてピークを示す波数が徐々に左側に移動し、 $\theta = 45^\circ$  では無次元波数が-0.707となる。このうち、水平変位の波数スペクトルでは  $45^\circ$  でピークが消えるのに対し、鉛直変位の波数スペクトルでは  $\theta = 0^\circ$  でピークが消える。これらの結果は半無限弾性体表面における平面波の入射と反射の関係に一致する。したがって、このピークは入射SV波による寄与を表している。

つぎに、波数スペクトルの右側のピークは入射角に関わらず一定の波数でピークが現れている。この波数はRayleigh波の波数に一致している。また、これらのピークの大きさは入射角によって変化するものの、水平変位と鉛直変位の比率は一定であることが読み取れる。以上から、このスペクトル成分は傾斜面から伝播してくるRayleigh波に対応すると考えられる。

図-3に示す波数スペクトルには上記の2つのピークの間にもスペクトルの励起がいくつか認められる。まず、 $\theta = 30^\circ$  では無次元波数0.29で僅かにスペクトルがピークを形成している。この波数はSV波が傾斜面に入射したことによって発生したP波が再び水平な地表面で反射した成分に対応することが理論的に確かめられる。

さらに、無次元波数0.5付近には緩やかな励起が見られる。この励起は特に  $\theta = 15^\circ \sim 25^\circ$  で顕著に表れている。

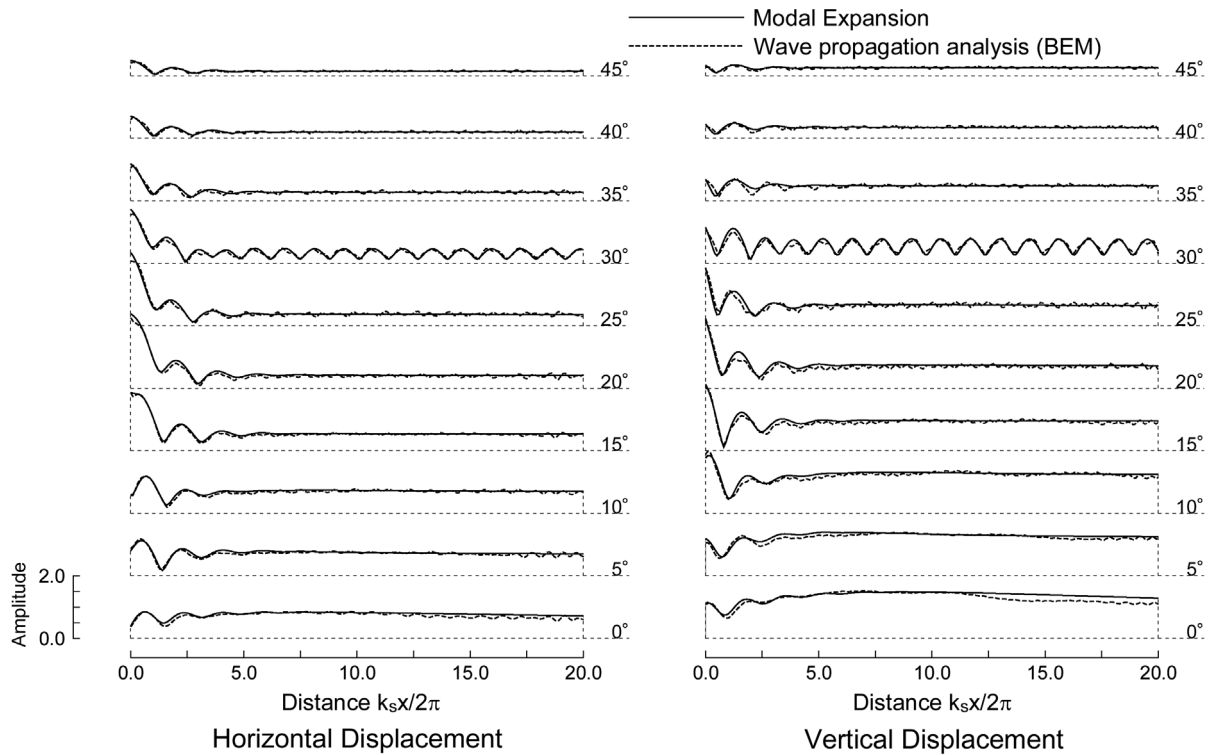


図4 モード展開手法による結果 (地表面変位応答)

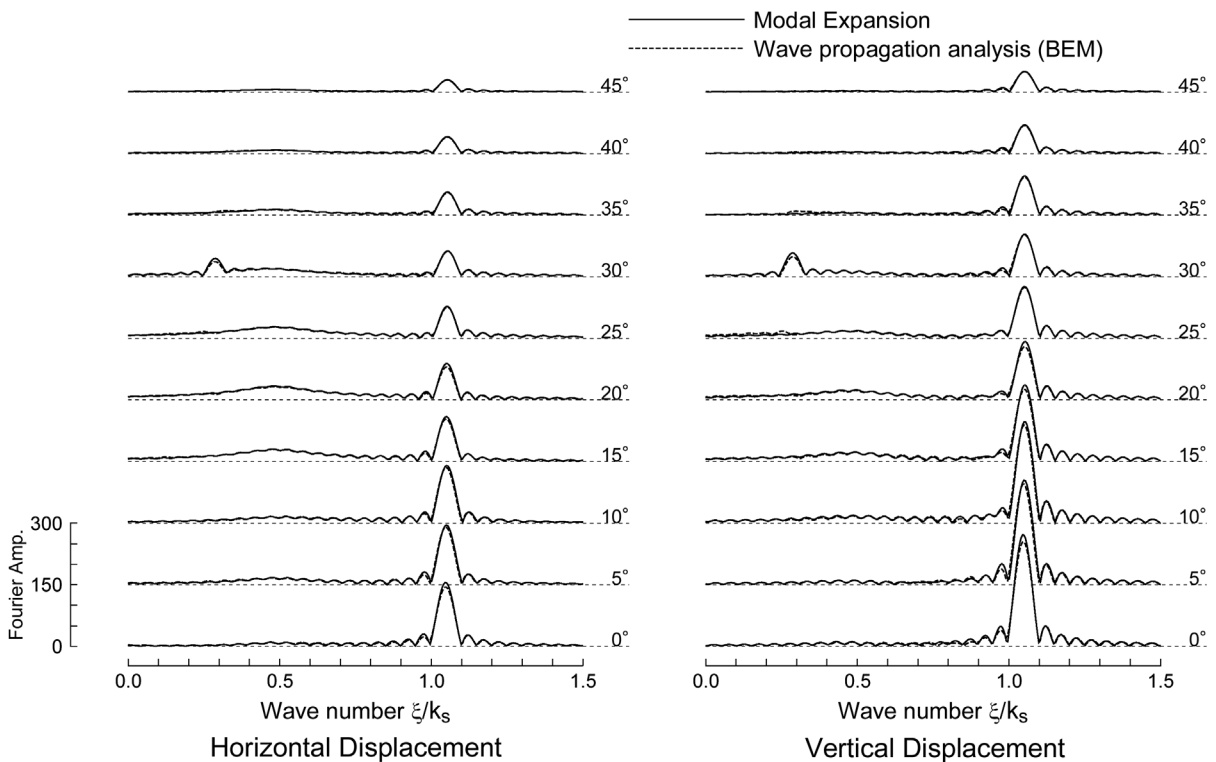


図5 モード展開手法による結果 (地表面変位応答の波数スペクトル)

このような緩やかな励起は減衰性の波動が有する特徴を示している。また、この励起の中心となる波数はリーキングモードに近い。したがって、このスペクトルの励起はリーキングモードに対応すると考えられる。

## 5. モード展開手法による散乱波の検討

### (1) 地表面変位応答のモード展開

図-2および図-3に示したBEMの結果から入射波成分を解析的に取り除いた散乱波成分に対してモード展開手法

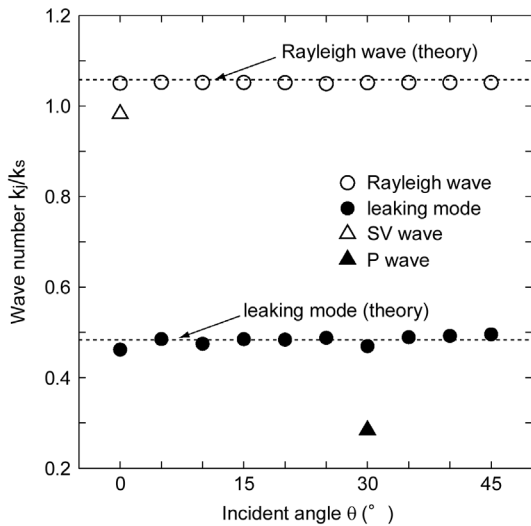


図-6 モードの波数

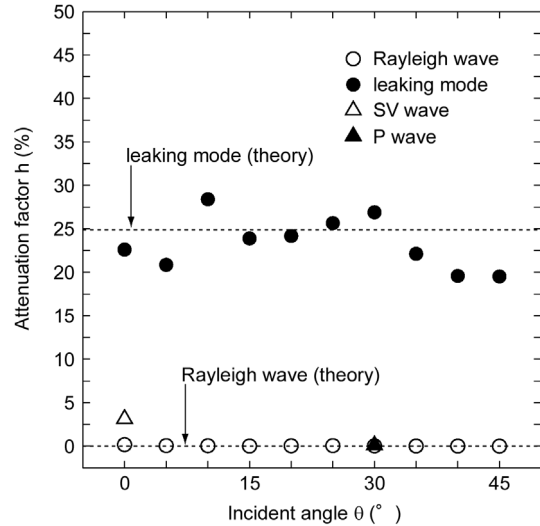


図-7 モードの減衰定数

を適用し、散乱波を構成する波動成分を検出する。

ここでは図-3に示した散乱波の波数スペクトルのピークに着目しながらモード展開を行う。ところで、解析に用いる波数スペクトルは図-3にも見られるようにサイドローブ<sup>6)</sup>を伴うために、小さなピークがサイドローブに隠れたり、減衰性の強い波動成分ではピークの波数を波数スペクトルから判読できない場合がある。そこで、本論文では理論的に導かれるRayleigh波、リーキングモードおよびP波とSV波の波数に着目してモード展開を行う。

モード展開手法から得られる散乱波の地表面変位応答を図-4に示し、その波数スペクトルを図-5に示す。図中に示す実線は、モード展開手法による地表面変位応答を表し、点線は波動伝播解析による散乱波成分の地表面変位応答を表す。

図-4に示す地表面変位応答を見ると、図-2に比べて小刻みな振幅の変化が減っている。これは地表面変位応答から入射波成分が除かれた結果、入射波と散乱波による位相の干渉が現れないためである。図-4より、斜面から伝わる散乱波は水平面端部付近で振幅が大きく増減するが、端部から離れるにつれ一定の振幅に落ち着く様子が見られる。水平面端部における振幅の変化は、特に $\theta=10\sim 25^\circ$ にかけて大きい。

図-4では、モード展開手法から求められる地表面変位応答は波動伝播解析の応答に良く一致している。また、図-5に示す波数スペクトルにおいてもモード展開手法による結果波動伝播解析の結果に良く一致している。これらの結果は散乱波が卓越する波動成分によって精度良くモード展開されていることを示している。

## (2) 散乱波を構成する波動成分の分析

モード展開手法によって求められた散乱波を構成する波動成分の波数を図-6に示す。図-6に示すように、散乱

波からは4種類の波動成分が検出される。このうち、Rayleigh波とリーキングモードに対応する波動成分は理論的に求められる波数に良く一致している。したがって、これらの波動成分はRayleigh波とリーキングモードに相当するものと考えられる。これらの成分はSV波の入射角によらず常に存在する。以上により、散乱波は主にRayleigh波とリーキングモードによって成り立っている。なお、 $\theta=0^\circ$  の場合には斜面で発生し水平方向に伝播する反射SV波、 $\theta=30^\circ$  の場合には斜面で発生した反射P波が散乱波に加わる。

図-7には上記の波動成分の減衰定数を示す。図-7によると、まずRayleigh波に対応する波動の減衰定数はほぼゼロであり理論値に一致している。一方、リーキングモードについて見ると、減衰定数の理論値は24.9%であるのに対して、モード展開手法によって求められる成分の減衰定数は、入射角によっては理論値に対するばらつきが比較的大きいものもいくつか見られるが、概ね理論値に近い値を示している。この結果はRayleigh波のような理論値との一致は見られないものの、モード展開手法によって求められる波動成分がリーキングモードに対応することを示している。

つぎに、 $\theta=30^\circ$  で現れる反射P波については減衰定数はほとんどゼロである。この場合、斜面に入射するSV波の入射角は臨界角を超えていないので、斜面で発生する反射P波は平面波であり減衰性を持たない。したがって、この結果は理論的にも妥当である。また、 $\theta=0^\circ$  に現れる反射SV波については減衰定数は約3%である。このSV波は斜面で発生し地表面に沿って水平に伝播する平面波に対応する。しかし、弾性波動論<sup>8)</sup>に従えば、地表面に沿って水平方向に伝播する平面SV波は存在しない。以上から判断すると、 $\theta=0^\circ$  からSV波が入射する場合、斜面では必然的に水平方向に伝播する反射SV波

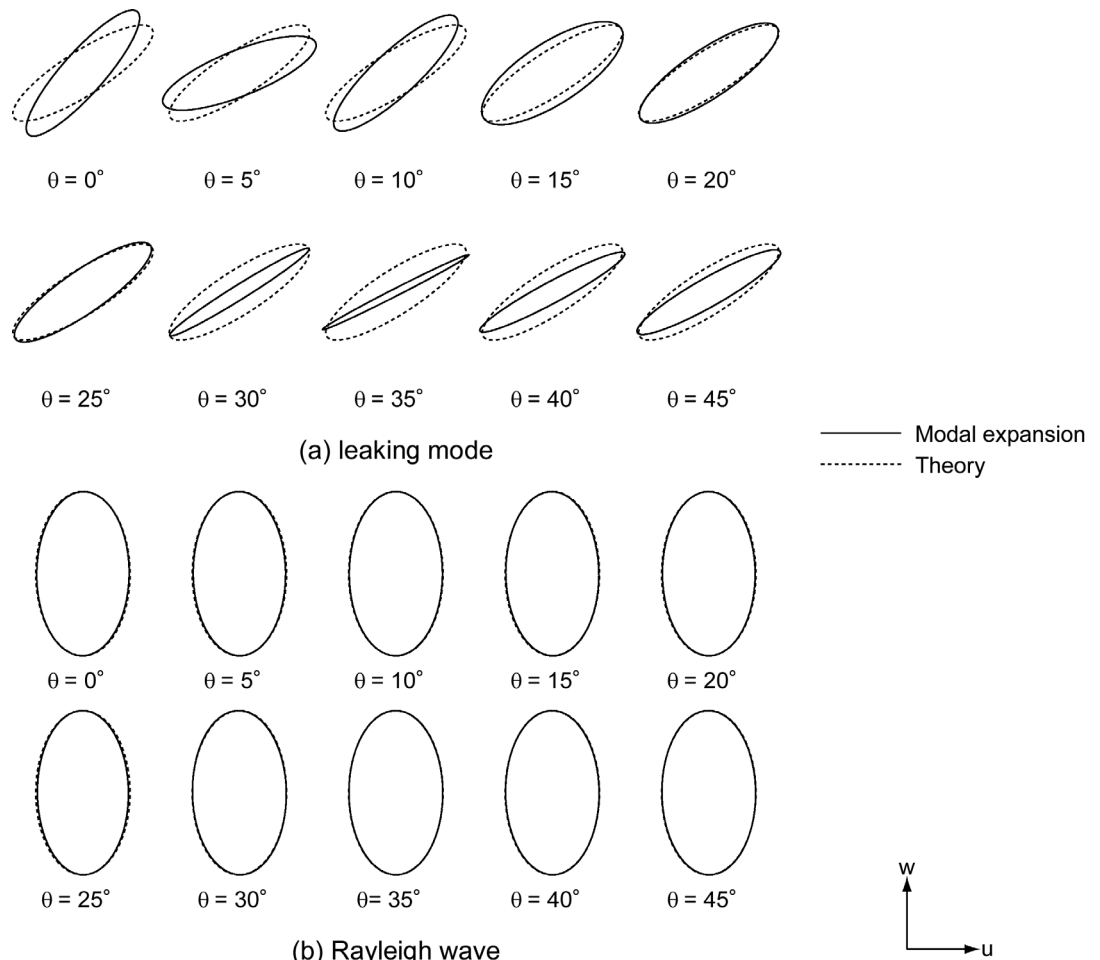


図8 モードの軌跡

が発生する。しかし、この反射SV波は遠方では消滅する。モード展開手法によって求められる成分はこのような波動に対応すると解釈できる。

図-6と図-7に示す結果より、散乱波成分は面内波動の固有モードであるRayleigh波やリーキングモードによって成り立つと考えられる。これを確認するために、モード展開手法から求められた波動成分の水平変位と鉛直変位の軌跡を理論的に求められる軌跡と比較する。その結果を図-8に示す。実線はモード展開された成分の変位軌跡を表し、点線は理論値を示す。

モード展開された波動成分の変位振幅の軌跡を理論的に求められる軌跡と比較すると、Rayleigh波については両者が極めて良く一致している。したがって、モード展開手法によって散乱波から検出されるRayleigh波の精度は極めて高いことがわかる。一方、リーキングモードについてはRayleigh波のような理論値との一致は見られないものの、良い対応を示していると言える。以上の結果より、モード展開手法から検出される成分はRayleigh波とリーキングモードであることが確認される。

つぎに、これらのモードの振幅から、散乱波に及ぼす影響について調べる。ここでは、図-8に示した楕円軌道で表される変位振幅の長辺の1/2の長さを、このモード

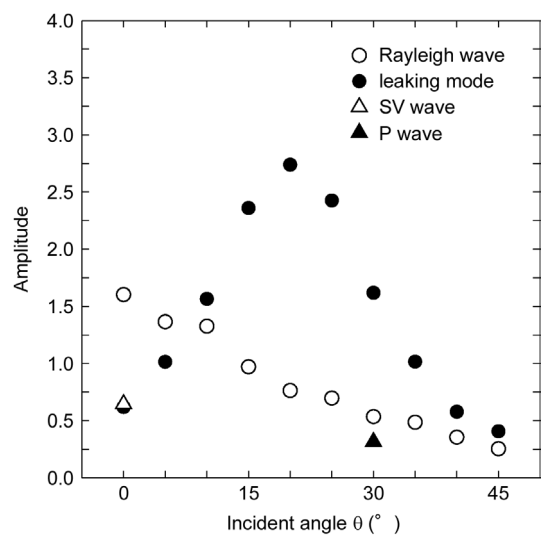


図9 モードの振幅

の振幅の大きさを表す値とする。このようにして求められるモード毎の振幅を図-9に示す。図の縦軸は入射波振幅に対するモード振幅の比を表す。

図-9より、モードの振幅は入射角によって変化する。まず、Rayleigh波の振幅は $\theta=0^\circ$ の時に1.6であり最大となる。ここから入射角が変化すると振幅は単調に減少し、

$\theta=45^\circ$  では0.3となる。

つぎに、リーキングモードについて見ると、 $\theta=0^\circ$  の時に振幅は0.6であり、Rayleigh波の振幅の1/2以下の大きさである。しかし、入射角が変化するのに伴って振幅は増大し、 $\theta=10^\circ$  では1.6となりRayleigh波の振幅を超える。さらに $\theta=20^\circ$  では2.7にまで達して最大となる。その後、振幅は減少し、 $\theta=45^\circ$  では0.4となる。

以上の結果をまとめると、斜面で発生する散乱波は主にRayleigh波とリーキングモードによって構成される。このうち、Rayleigh波は減衰性を持たない波動成分であるから、その影響は無遠慮まで伝わる。一方、リーキングモードには強い減衰性があるため、その影響は遠方まで伝わらない。ただし、入射角によっては振幅が入射波の3倍近くに達することがある。このような場合には、図4に示したように、水平な地表面端部の変位応答が大きく増幅されることから、注意が必要な波動成分であると言える。

このように、Rayleigh波とリーキングモードの振幅は入射角によって変化するため、場合によってはRayleigh波のみならず局所的にリーキングモードも散乱波の支配的な成分となることがある。

## 6. モード振幅の励起に関する考察

前章ではSV波の入射角によってRayleigh波とリーキングモードの振幅が変化することを示した。そこで、本節ではこれらの固有モードの励起に変化が起こる理由について考察を試みる。

本論文で示した散乱波は斜面の影響により発生するものである。ところで、Gilbert and Laster<sup>9)</sup>によると、Rayleigh波はS波に関連して励起されるモードであり、リーキングモードはP波に関連して励起されるモードであることが指摘されている。本論文ではこの点に注目し、入射SV波が斜面に反射して発生するP波とSV波に焦点を当てながら考察を進める。

斜面に入射するSV波および反射するP波とSV波を図10に示す。ここに、 $\theta$ は入射角を表すのに対し、 $\theta'$ は斜面の垂直方向から見た入射角を表す。図中に示す $\phi_0$ は斜面に入射するSV波のポテンシャルを、 $\phi'$ と $\phi'$ は反射波についてのポテンシャルを示す。これらを次式で表す。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= B_0 \exp(-i\xi x + i\eta_s z + i\omega t) \\ \phi' &= A' \exp(-i\xi x - i\eta_p z + i\omega t) \\ \phi' &= B' \exp(-i\xi x - i\eta_s z + i\omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $B_0$ 、 $A'$ 、 $B'$ はポテンシャルの係数を表す。

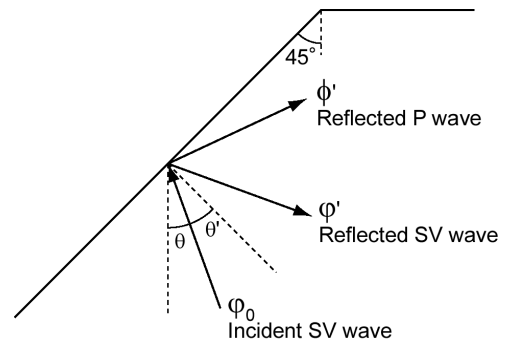


図-10 斜面における入射と反射

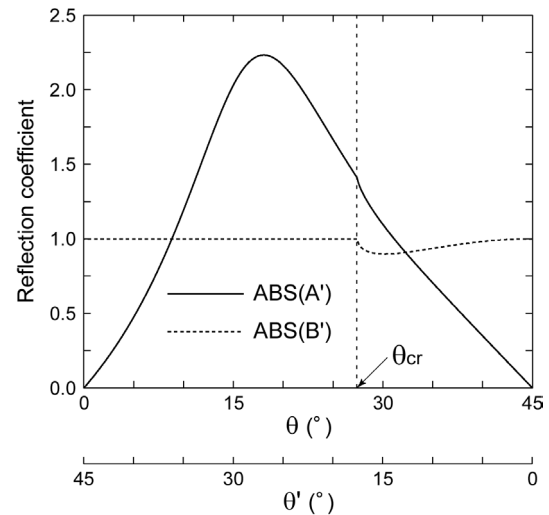


図-11 SV波入射に対する反射係数

また、 $x$ は斜面方向、 $z$ は斜面垂直方向を表し、 $\xi$ は斜面方向の波数、 $\eta_p$ と $\eta_s$ はP波とSV波に関する斜面垂直方向の波数を表す。 $t$ は時間、 $\omega$ は角振動数を示す。

つぎに、式(2)を用いて、半無限弾性体表面の入射と反射の関係に従って求められるSV波が斜面に入射するときの反射係数の絶対値を図11に示す。図の横軸には入射角 $\theta$ と斜面の垂直方向から見た入射角 $\theta'$ を並べて示す。縦軸には入射波係数に対する絶対値で表された反射波係数の比を示す。図中の $\theta_{cr}$ は臨界角を表す。

図11に示すP波の反射係数 $A'$ に注目すると、入射角が $\theta=0^\circ$ から変化するにつれ反射係数が増加し、 $\theta=20^\circ$ 付近で最大となる。このような変化の様子を図9に示したリーキングモードの振幅の変化と比べてみると、両者は同じような経過を辿ることがわかる。このことから、リーキングモードの励起には斜面で発生する反射P波の性質が関連しているものと考えられる。

図11において、入射角 $\theta$ が臨界角 $\theta_{cr}$ よりも小さければ斜面では全反射となる。その結果、P波のエネルギーは斜面に沿って伝播し、頂上の水平面端部に集中することになる。しかもP波の振幅は $\theta=15\sim 25^\circ$ 付近では大きい。リーキングモードの励起はこのような状況を反映し

て起こるものと考えられる。

つぎに、図-9に示すRayleigh波の振幅は $\theta=0^\circ$ で最大であり、そこから変化すると振幅は単調に減少するのに対して、図-11に示すSV波の反射係数 $B'$ は入射角に関わらずほぼ一定である。したがって、Rayleigh波の振幅の変化について反射SV波の振幅の変化は余り関係ないと考えられる。

ところが、図-10によると、 $\theta=0^\circ$ の場合、反射SV波の伝播方向は水平な地表面と平行になり、 $\theta$ が変化するにつれて伝播方向は水平な地表面から遠ざかることになる。これらのことから判断して、反射SV波の伝播方向が水平な地表面と平行であるときにRayleigh波は最も大きく励起し、波線が地表面から離れるにつれて減少するものと考えられる。

## 7. 結論

本論文では $45^\circ$ の斜面を有し、ポアソン比0.45の半無限均質地盤に任意の角度から平面SV波が入射するときの応答をBEMによる波動伝播解析から求めた。つぎに、モード展開手法を用いて斜面で発生する散乱波の性質を分析した。その結果は次のようにまとめられる。

- (1) 斜面で発生する散乱波は主にRayleigh波とリーキングモードによって構成される。これらの波動成分はSV波の入射角に関わらず常に存在する。
- (2) 散乱波の変位振幅は水平な地表面端部で大きく変化するが端部から離れるにつれて一定になる。このうち、端部における大きな振幅はリーキングモードの影響を表し、端部から離れた地点における一定振幅はRayleigh波の影響を表す。
- (3) 散乱波に含まれるRayleigh波とリーキングモードの振幅はSV波の入射角度によって変化する。特に、

入射角 $\theta=15\sim 25^\circ$ ではリーキングモードの振幅は入射SV波の3倍近くに達し、水平な地表面端部の地震応答に大きな影響を与える。

- (4) リーキングモードの振幅の変化は斜面で発生する反射P波の性質に関連する。すなわち、SV波が $\theta=15\sim 25^\circ$ で斜面に入射する場合、振幅の大きな反射P波のエネルギーは斜面頂点に集中することが原因となり、リーキングモードの振幅が大きく励起される。

## 参考文献

- 1) Phinney, R. A.: Leaking Modes in the Crustal Wave-Guide. 1. The Oceanic PL Wave, *Jour. Geophys. Res.*, Vol.66, pp.1445-1469, 1961
- 2) Gilbert, F.: Propagation of Transient Leaking Modes in a Stratified Waveguide, *Reviews of Geophysics*, Vol.2, No.1, pp.123-153, 1964.
- 3) Chapman, C. H.: Lamb's Problem and Comments on the Paper 'On Leaking Modes' by Usha Gupta, *Pure and Applied Geophysics*, 94, pp.233-247, 1972.
- 4) Lamb, H.: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, Vol.203, pp.1-42, 1904.
- 5) 秋山伸一：モード展開手法を用いた不整形地盤における面内波動の分析，第26回地震工学研究発表会講演論文集，505-508, 2001
- 6) 秋山伸一：Rayleigh波特性方程式から導かれる固有モードを用いた不整形地盤で発生する面内波動の分析，土木学会論文集 No.731/ I -63, 267-282, 2003
- 7) 秋山伸一：傾斜層で発生する波動とLove波の関連，土木学会論文集 No.459/ I -22, 129-138, 1993
- 8) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店，84-86，1978
- 9) Gilbert, F. and Laster, S. J.: Excitation and propagation of pulses on an interface, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 52, pp.294-319, 1962

(2003. 6. 30 受付)

## LEAKING MODE IN A GROUND WITH TOPOGRAPHIC IRREGULARITY

Shinichi AKIYAMA

We investigate the behavior of leaking mode appearing in a ground with topographic irregularity. The responses of surface displacement of the ground when a plane SV wave is incident from arbitrary angle are obtained from the wave propagation analysis by boundary element method. Those responses are expanded in a series of components whose amplitude are predominantly large in terms of the wave number by use of a modal expansion method which are proposed by us. It is found that the leaking mode may have serious influence for the ground motion near the edge. Excitation in the leaking mode is related to the behavior of the reflected P wave generated in the slope of the ground.