

時間領域解析におけるマス-バネ系モデルを用いた 離散系半無限体の境界設定

李相勲¹・田邊忠顕²

¹名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 博士課程後期課程
(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

E-mail:lee@civil.nagoya-u.ac.jp

²名古屋大学大学院教授 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

E-mail:tanabe@civil.nagoya-u.ac.jp

無限境界を数値解析の中に取り入れようとする研究はさまざまな分野で行われてきた。しかし、これらの研究対象は連続体であり、波動解そのものは簡単である。数キロあるいはそれ以上に長く連続する高速鉄道のような離散系構造物は波動解にモーメントの項や地動との連成が加わるため、その解を求めるのは容易ではない。今までの著者らの研究では離散系におけるエネルギー伝達境界を用いた無限境界の設定が行われてきた。しかし、このエネルギー伝達境界は周波数領域の解析であるため、コンクリート構造物のような材料の非線形性が強い構造物に対してはより正確な応答を求めるには適していない。本研究では離散系半無限体に対し時間領域での解析を可能にするためマス-バネ系モデルを用い粘性境界を導入した。

Key Words : Viscous Boundary, Discrete System, Mass-Spring Model, Wave Velocity, Energy Absorption

1. はじめに

新幹線などの鉄道橋や道路橋の連続高架橋において、同形式の構造が非常に長く連続している高架橋のような構造物の応答を解析する際、その一部を取り出し、構造物両端を自由境界として取り扱う一般の解析方法は‘全構造物が様な地震動を受ける’と仮定しそれが安全側であることを前提に行われている。しかし、このような方法は2つの問題点が考えられる。その1つは対象高架橋の中に不規則的な構造を含んでいる場合には対応できないことである。また、新幹線高架橋のような構造物は数キロもしくは数十キロの長さを持っており、それが様な地震動を受けるとは考えにくくむしろ地震動が一部に集中し、その集中点から発生したエネルギーは外方向へ逸散し、波動の移動が発生することが予想される。このようなエネルギーの流れを考慮することができないのがもう1つの問題点である。著者らは、離散系に対して、地震動が集中する部分を不規則領域とその両側を半無限規則領域として想定し、1自由度を持つマス-バネ系モデル

を用いてエネルギー伝達境界を定式化した^{1),2),3)}。しかし、これらの研究は周波数領域の解析であるため、コンクリート構造物のような材料の非線形性が強い構造物に対してはより正確な応答を求めるには適していない。本研究では時間領域での解析をその目的としてマス-バネ系モデルを用い、粘性境界を離散系に適用することを試みた。また、エネルギー伝達境界との比較を行い、エネルギー吸収能を確認した。

2. 波動の伝播速度

粘性境界を定式化するには対象媒体における波動の伝播速度を求める必要がある。本研究では連続高架橋のような離散系構造物をその対象と想定し、さらに問題を簡単にするためマス-バネ系モデルを用いる。マス-バネ系モデルに対する波動（縦波）の伝播速度は直接求める方法もあるが、ここでは図-1(a)に示すような弾性地盤上の半無限棒における縦波の伝播速度⁴⁾から求める。図-1(b)よ

り、単位長さ当たりの静的バネ係数 k_g で表す弾性地盤上の、断面積 A 、弾性係数を E 、密度 ρ の棒の dx 部分に関する x 方向の運動方程式を立てる。

$$N_{,x} dx - k_g u dx - \rho A \ddot{u} dx = 0 \quad (1)$$

ここで、 N は軸方向力を、 u は軸方向変位を表す。力-変位関係式は

$$N = EA u_{,x} \quad (2)$$

であり、この式を式(1)に代入すると次の運動方程式が求められる。

$$u_{,xx} - \frac{1}{r_0^2} u - \frac{\ddot{u}}{c_l^2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 r_0 と c_l は各々特性長さと伝播速度であり次式で表される。

$$r_0 = \sqrt{\frac{EA}{k_g}} \quad (4)$$

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5)$$

この半無限棒を、図-2 に示すような、質量 m 、軸方向のバネ係数 k 、地盤との連結バネ係数 k' で表されるマス-バネ系モデルに置き換える。質点間の長さを l とするとバネ係数は

$$k = \frac{EA}{l} \quad (6)$$

$$k' = k_g l \quad (7)$$

で表される。式(6)と(7)を式(1)に代入し整理すると、次のような無限に連続するマス-バネ系モデルに対する運動方程式が求められる。

$$kl^2 u_{,xx} - k' u - m \ddot{u} = 0 \quad (8)$$

ただし、この式は、 x 軸上の座標、 x に関する方程式であるので次の x, r 関係式

$$x = r \cdot l \quad (9)$$

より質点番号 r に関する方程式で表すと

$$k u_{,rr} - k' u - m \ddot{u} = 0 \quad (10)$$

になる。従って、マス-バネ系モデルにおける 1 質点ごとの縦波の伝播速度は次式のようなものである。

$$V_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

この伝播速度はまた、質量 m 、バネ係数 k の 1 質点系の固有円振動数と同じ式になっている。

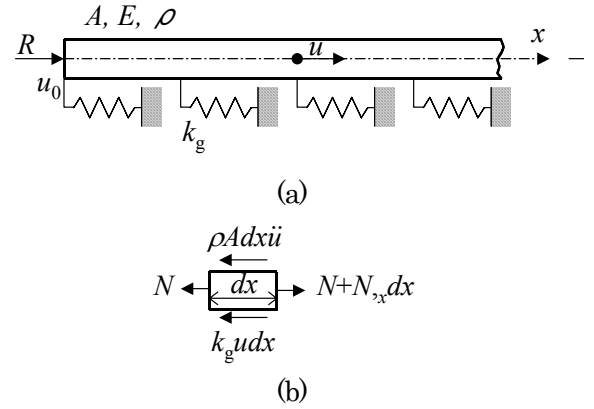


図-1 弾性地盤上の半無限棒

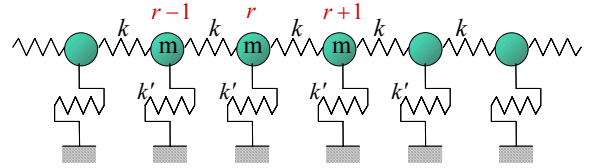


図-2 マス-バネ系モデル

3. 粘性境界の設定

Lysmer らは無限連続体に対し、次式で与えられる応力を仮想境界上に与える粘性境界を提案した⁵⁾。

$$\sigma = \rho V_P \dot{w}, \quad \tau = \rho V_S \dot{u} \quad (12)$$

ここに、 σ と τ はそれぞれ垂直応力とせん断応力、 $\dot{w}$ と $\dot{u}$ は法線方向と接線方向の速度、 ρ は密度、 V_P と V_S はそれぞれ P 波および S 波速度である。

同様に、マス-バネ系においては仮想境界上に次式で表される力を与えられることにする。

$$f = m V_m \dot{u} \quad (13)$$

従って、粘性境界の設定方法とは式(13)の $m V_m$ を全体系の減衰マトリックスにおける境界部分に対応して加えることである。

4. 境界におけるエネルギーの吸収

マス-バネ系モデルにおける波動の伝播速度を求めることは、その粘性境界の定式化において最も重要な要素である。ここに、エネルギー吸収を議論する前に式(11)の伝播速度を数値計算的に検証する必要がある。いま、図-2 のようなマス-バネ系モデルと同様の、両側が自由境界である 101 質点のケースを考える。中央の質点に衝撃荷重を与える動的解析を行い、時間の経過($t=0.01, 0.2, 0.4$,

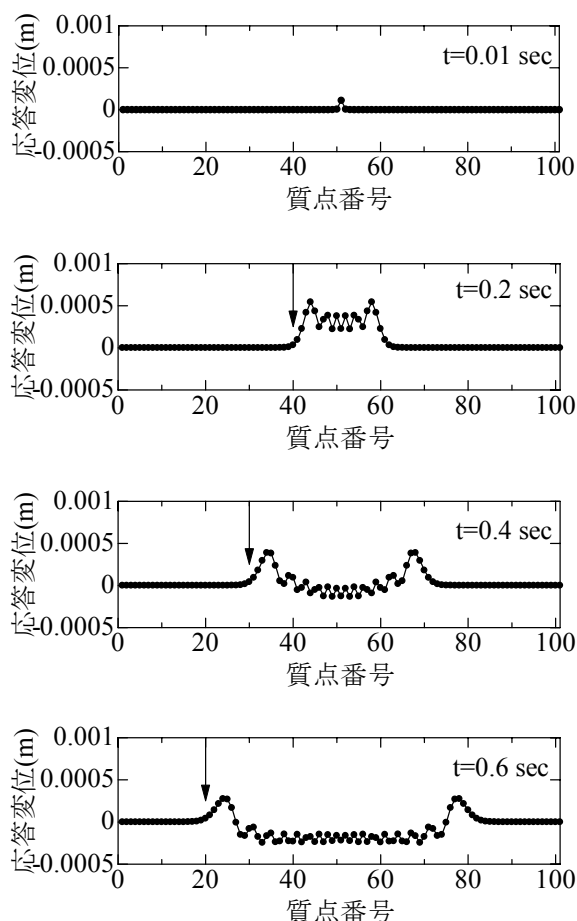


図-3 弾性地盤上の半無限棒

0.6 sec)に対する各質点の応答変位を図-3に示す。解析条件は $m=2$ ton, $k=5000$ kN/m, $k'=100$ kN/m で、10 kN の単位衝撃波を入力した。減衰は考慮していない。そのときの式(11)による伝播速度は

$$V = \sqrt{\frac{5000}{2}} = 50 \text{ (EA/sec)}$$

一方、図-3の数値解析の結果(矢印は波の先頭部分で一定の値を持っている部分を示す)から直接に伝播速度を計算してみると、

$$V = \frac{40-30}{0.4-0.2} = 50 \text{ (EA/sec)}$$

であり、計算値と等しい値が得られた。

次に同条件のモデルに対し、両側の境界条件が自由境界の場合と粘性境界の場合、エネルギー伝達境界(計算方法は参考文献1)を参照)の場合の解析結果を比較する。ただし、ここではエネルギー伝達境界のため減衰を考慮した($h=0.01$)。図-4、図-5、図-6にその結果を示す。ここに、 $t=1.0$ secまでは応答波がまだ反射する前であり、3つのケースともに同形を示すので、粘性境界とエネルギー伝達境界の方ではその以前のグラフは省略する。図-4の自由境界の場合は、衝撃により中央の質点から発生した

波は境界で反射し($t=1.20$ sec)、また中央質点に向かって移動する($t=1.40, 1.60$ sec)ことが分かる。それに対し図-5の粘性境界の場合は反射波が生成されず、応答波が境界で吸収されることが分かる。それは、図-6のエネルギー伝達境界の場合も全く同様の結果を示している。

5. まとめ

離散系に対する伝達境界の適用は、著者らがエネルギー伝達境界を用いて行っているが、それは周波数領域の解析であるため非線形解析などの時間領域での解析を行うことができなかった。本研究では1自由度を持つマスバネ系モデルを用いて粘性境界を定式化した。そのために求めた縦波の伝播速度は1質点系の固有円振動数と同じ式で表されることが分かった。数値解析でその伝播速度を検証した後、提案した粘性境界のエネルギー吸収能とほぼ完璧な吸収能力を持ったエネルギー伝達境界を比較した。その結果、本研究で提案した粘性境界はエネルギー吸収率が高く、また非常に簡便なので、エネルギー伝達境界の代わりに用いることができると考えられる。次の段階として、地盤連結バネ k' が速度に及ぼす影響や離散系の無限境界における非線形の影響について研究を進める。また、3自由度を持つはり要素モデルに対する粘性境界を定式化する予定である。

謝辞：本研究の一部は、(財)堀情報科学振興財団の研究助成を受けて行われた。ここに謝意を表す。

参考文献

- 1) 李相勲, 田邊忠顕: 連続したマスバネ系モデルを用いた連続高架橋構造物の伝達境界の定式化, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.24, No.2, pp.1165-1170, 2002
- 2) 李相勲, 田邊忠顕: 連続高架橋構造物におけるエネルギー伝達境界と逸散減衰評価に関する一検討, 第11回日本地震工学シンポジウム論文集, pp.1339-1342, 2002
- 3) Lee, S. and Tanabe, T.: Formulation of transmitting boundary for infinitely long elevated bridge of dynamic response analysis, *Proceedings of the 1st fib congress*, Session 6, 17-22, 2002
- 4) Wolf, J.P. and Song, Ch.: Finite-Element Modelling of Unbounded Media, *John Wiley & Sons Ltd*, pp.289-294, 1996
- 5) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L.: Finite dynamic model for infinite media, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.95, pp.859-877, 1969

(2003. 6. 30 受付)

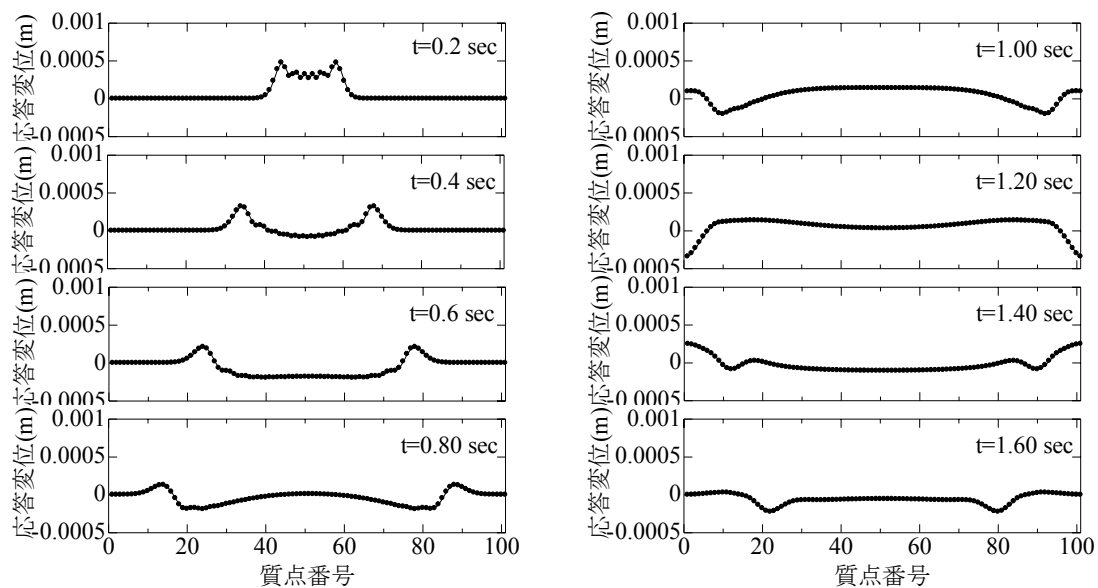


図-4 自由境界

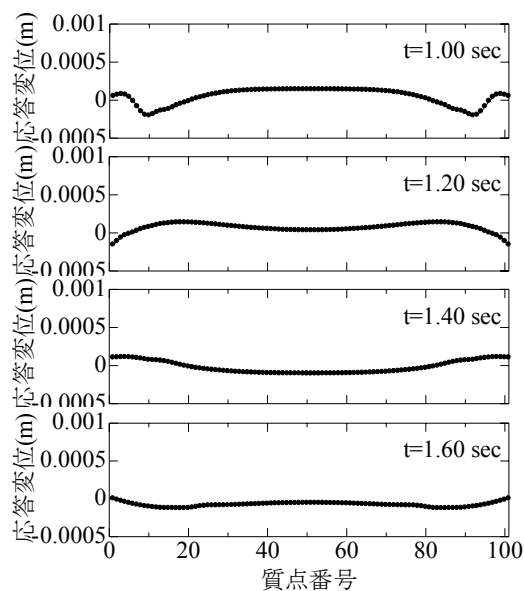


図-5 粘性境界

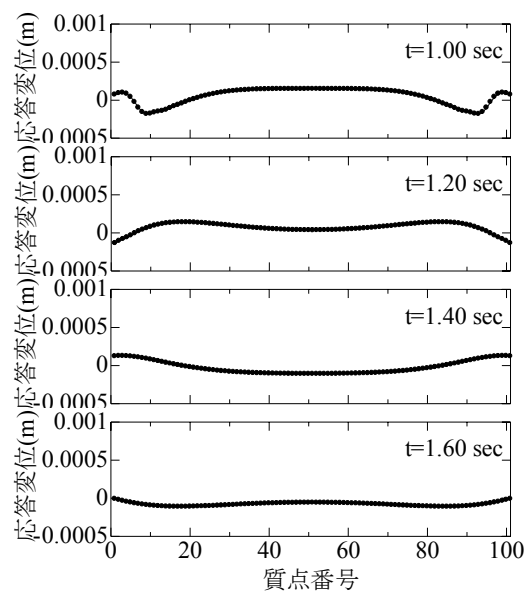


図-6 エネルギー伝達境界

Viscous Boundary for Infinitely Long Structure Using a Mass-Spring Model

Sanghun LEE, Tada-aki TANABE

When a designer carries on a seismic analysis of those semi-infinite long structures, a unit of a structure has been taken out from them and modeled with its both ends as a free boundary. However, it is not free in fact and an interaction between the unit structure and its adjoining ones inevitably exists. Therefore, these inconsistencies should be solved and appropriate boundary condition is needed to conduct analysis suitable for the actual condition. In the geotechnical field, Lysmer and Kuhlemeyer (1969) make an infinite system approximate to a finite system with a special viscous boundary condition. The authors (2002) formulated the energy-transmitting boundary as an infinite continuous system using the mass-spring model with 1 D.O.F, and carried out numerical verification. However, since this boundary is for the analysis in the frequency domain, it cannot be used in the nonlinear analysis, for example. In this research, a viscous boundary has been developed for discrete system using a mass-spring model. And the comparison with the energy-transmitting boundary has been carried out.