

履歴復元力特性による吸収エネルギーと地震応答の関係

青木 繁¹

¹東京都立工業高等専門学校機械工学科教授
(〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40)
E-mail:aoki@tokyo-tmct.ac.jp

構造物が過大な地震動入力を受けた場合に、応答が塑性域に入る。このような場合に、力と変位の関係は履歴特性となり、振動エネルギーが吸収される。本報告では、エネルギー吸収による応答の低減に着目した。等価線形化法を用いて理論計算によって、吸収されたエネルギーと最大応答の関係について検討した。その結果、吸収エネルギーが大きいほど最大応答が低減されることが明らかになった。履歴特性を表すパラメーターとの関連についても検討した。

Key Words : *Excess seismic load, Plastic deformation, Equivalent linearization method, Energy absorption, Maximum response*

1. 緒言

地震動入力を受ける構造物是非線形特性をもつことが多い。過大な地震動入力を受けた場合には応答が塑性域に入り、復元力と変位の関係は履歴特性をもつ¹⁾。この履歴特性によってエネルギーが吸収され、この性質を積極的に利用した弾塑性ダンパが実用化されている²⁾。

本報告では、塑性変形による履歴特性をもつ振動系が地震動入力を受けた場合の最大応答と履歴特性によって吸収されるエネルギーの関係について検討した。応答としては、不規則振動応答を表す代表値のひとつである自乗平均値に着目した。応答の自乗平均値および履歴特性によって吸収されるエネルギーを求める方法を示し、これらの間関係について検討した。地震動としては非定常白色雑音を用いた。振動系としては簡単のため1自由度系を用いた。また、ふたつの振動系の連成効果を検討するために2自由度系も用いた。本報告で示した手法では等価線形化法を用いた。

2. 解析方法

非定常白色雑音入力を受ける非線形系の履歴特性によって吸収されるエネルギー、応答の自乗平均値を求める手法を示す。

(1) 1自由度系

解析モデルと等価線形化法について述べる。

a) 解析モデル

簡単のため、解析モデルとして図-1に示す1自由度系を用いた。非線形特性として、塑性変形による履歴特性を考慮した。本報告では、復元力と変位の関係として図-2に示すbilinear履歴特性を用いた。入力端に対する質点の相対変位 $z(=x-y)$ に関する運動方程式は、

$$\ddot{z} + 2h\omega_n \dot{z} + f = -\ddot{y} \quad (1)$$

ここで、 $h(c/2\sqrt{mk})$ は減衰定数、 $\omega_n(\sqrt{k/m})$ は弾性

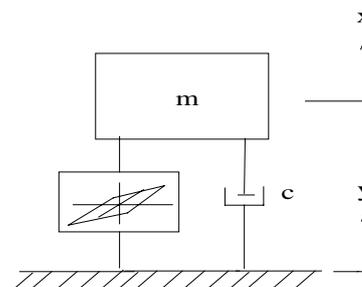


図-1 1自由度系モデル

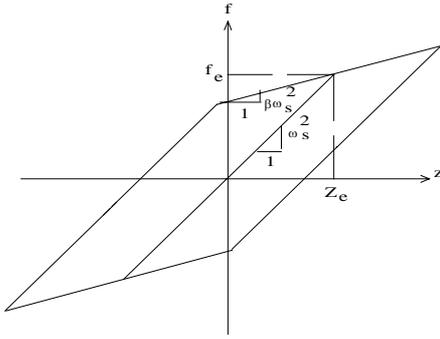


図-2 Bilinear 履歴復元力特性

範囲内での固有円振動数を表す． f は非線形復元力を表す．式(1)は次のように等価線形化する．

$$\ddot{z} + 2h_{eq}\omega_{eq}\dot{z} + \omega_{eq}^2 z = -\ddot{y} \quad (2)$$

ここで， h_{eq} は等価減衰定数， ω_{eq} は等価固有円振動数を表す．入力として非定常白色雑音を用いた．非定常白色雑音は定常白色雑音に図-3 に示す包絡関数を乗じることによって得られるものとした．

b) 等価減衰定数

調和振動入力を受ける振動系の定常応答振幅が Z である場合に，図-2 に示す履歴特性によって1サイクル中に吸収されるエネルギーは履歴特性によって囲まれる面積となり，

$$E_N' = 4\omega_n^2(1-\beta)Z_e(Z-Z_e) \quad (3)$$

ここで， Z_e は降伏変位を表す．応答が定常不規則過程の場合を考える．応答が狭帯域不規則過程であり， Z の確率密度関数が次のようなレーレー分布で表されると仮定する．

$$p(Z) = \frac{Z}{\sigma_z^2} \exp\left(-\frac{Z}{2\sigma_z^2}\right) \quad (4)$$

ここで， σ_z^2 は相対変位応答 z の自乗平均値を表す． E_N' の期待値は，

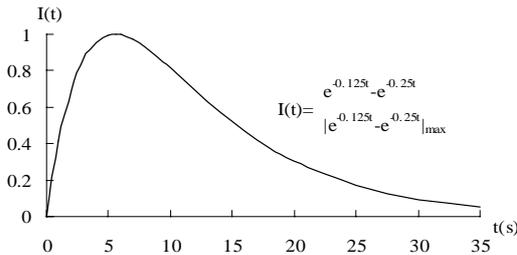


図-3 包絡関数

$$\begin{aligned} E_N &= \int_{Z_e}^{\infty} E_N' p(Z) dZ \\ &= 4\omega_n^2(1-\beta)Z_e^2 \frac{1}{y_0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y_0) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで，

$$y_0 = \frac{Z_e}{\sqrt{2}\sigma_z}, \operatorname{erfc}(y_0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_0} \exp(-y^2) dy \quad (6)$$

等価減衰係数 C_{eq} をもつダンパで 1 サイクル中に吸収されるエネルギーは，

$$E_D' = \pi C_{eq} \omega_n Z^2 \quad (7)$$

E_D' の期待値は，

$$E_D = \int_0^{\infty} E_D' p(Z) dZ = 2\pi\sigma_z^2 C_{eq} \omega_n \quad (8)$$

E_N は E_D と等しいから，

$$C_{eq} = \frac{2\omega_n^2(1-\beta)y_0 \operatorname{erfc}(y_0)}{\sqrt{\pi}\omega_n} \quad (9)$$

等価減衰定数 h_{eq} は次式で得られる．

$$h_{eq} = \frac{2h\omega_n + C_{eq}}{2\omega_{eq}} \quad (10)$$

c) 等価固有円振動数

調和振動入力を受ける振動系の等価固有円振動数が履歴特性の対角線の傾きであると仮定すると，

$$\left(\omega_{eq}^2\right)' = \begin{cases} \omega_n^2 & : Z \leq Z_e \\ \frac{\omega_n^2 Z_e + \beta\omega_n^2(Z-Z_e)}{Z} & : Z > Z_e \end{cases} \quad (11)$$

$\left(\omega_{eq}^2\right)'$ の期待値は，

$$\begin{aligned} \omega_{eq}^2 &= \int_0^{Z_e} \left(\omega_{eq}^2\right)' p(Z) dZ + \int_{Z_e}^{\infty} \left(\omega_{eq}^2\right)' p(Z) dZ \\ &= \omega_n^2 - (1-\beta)\omega_n^2 \exp(-y_0^2) \\ &\quad + (1-\beta)\omega_n^2 \sqrt{\pi} y_0 \operatorname{erfc}(y_0) \end{aligned} \quad (12)$$

d) 自乗平均応答・吸収エネルギー

非定常入力に対しても，定常不規則振動応答に対して求められた等価減衰定数および等価固有円振動数はそれぞれ式(10)および式(12)で近似できるものとした．入力加速度は次式で表される．

$$\ddot{y}(t) = I(t)s_y(t) \quad (13)$$

ここで、 $s_y(t)$ は定常白色雑音、 $I(t)$ は図3に示す振幅非定常性を表す包絡関数を表す。自乗平均応答は次式で表されるモーメント方程式から得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_z^2}{dt} &= 2\kappa_{zz} \\ \frac{d\sigma_{\dot{z}}^2}{dt} &= -2C_{eq}\sigma_{\dot{z}}^2 - 2\omega_{eq}^2\kappa_{zz} + 2\pi S_0\{I(t)\}^2 \\ \frac{d\kappa_{zz}}{dt} &= \sigma_{\dot{z}}^2 - C_{eq}\kappa_{zz} - \omega_{eq}^2\sigma_z \end{aligned} \quad (14)$$

履歴特性によって吸収されるエネルギーは、非定常振動応答の等価的周期は T_n であると考えられるから、単位時間に吸収されるエネルギーは式(5)を用いると、 E_N/T_n となる。これを地震動入力の継続時間に渡って積分し、弾性範囲内のひずみエネルギーで除して無次元化すると、

$$E_T = \frac{\int_0^T \frac{E_N}{T_n} dt}{\frac{1}{2}\omega_n^2 Z_e^2} \quad (15)$$

(2) 2自由度系

解析モデルについて述べる。

a) 解析モデル

ふたつの振動系の連成効果を検討するために、図-4に示す2自由度系力学モデルを用いた。上振動系が非線形特性をもつものとした。相対変位 $z_s(x_s-x_p)$ および $z_p(x_p-y)$ に関する運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{G}\mathbf{z} + \mathbf{f} \quad (16)$$

ここで、

$$\mathbf{z}^T = \{z_p \quad z_s \quad \dot{z}_p \quad \dot{z}_s\} \quad (17)$$

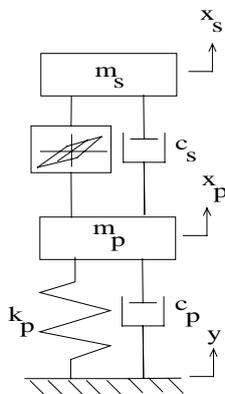


図-4 2自由度系モデル

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_p^2 & \omega_{eq}^2\gamma & -2h_p\omega_p & C_{eq}\gamma \\ \omega_p^2 & -\omega_{eq}^2(1+\gamma) & 2h_p\omega_p & -C_{eq}(1+\gamma) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{f}^T = \{0 \quad 0 \quad -\ddot{y} \quad 0\} \quad (19)$$

ここで、 $h_s (c_s/2\sqrt{m_s k_s})$ および $h_p (c_p/2\sqrt{m_p k_p})$ はそれぞれ上振動系と下振動系の減衰定数、 $\omega_s (\sqrt{k_m/m_m})$ および $\omega_p (\sqrt{k_p/m_p})$ はそれぞれ上振動系と下振動系の弾性範囲内の固有円振動数、 $\gamma (m_s/m_p)$ は上振動系と下振動系の質量比を表す。非線形復元力は1自由度系と同様に等価線形化した。

b) 自乗平均応答

2自由度系の自乗平均応答は次のモーメント方程式から求めた³⁾。

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}\mathbf{V}^T + \mathbf{V}\mathbf{G}^T + \mathbf{D} \quad (20)$$

ここで、

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{z_p}^2 & \kappa_{z_p z_s} & \kappa_{z_p \dot{z}_s} & \kappa_{z_p \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p z_s} & \sigma_{z_s}^2 & \kappa_{z_s \dot{z}_p} & \kappa_{z_s \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p \dot{z}_s} & \kappa_{z_s \dot{z}_p} & \sigma_{\dot{z}_p}^2 & \kappa_{\dot{z}_p \dot{z}_s} \\ \kappa_{z_p \dot{z}_s} & \kappa_{z_s \dot{z}_s} & \kappa_{\dot{z}_p \dot{z}_s} & \sigma_{\dot{z}_s}^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi S_0\{I(t)\}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3. 解析結果

式(15)から求まる履歴特性によって吸収されるエネルギーを求めた。さらに、相対変位応答 z または z_s および相対速度応答の自乗平均値の最大値および、式(10)から求まる等価減衰定数 h_{eq} の最大値、式(12)から求まる等価固有周期 $T_{eq} (2\pi/\omega_{eq})$ の最大値を求めた。応答の自乗平均値の最大値は応答の最大値に対応する⁴⁾。

1自由度系の場合の降伏変位 Z_e は履歴特性のない弾性系の標準偏差の最大値 $\sigma_{z\ell\max}$ を用いて次式で定めた。

$$Z_e = \alpha\sigma_{z\ell\max} \quad (23)$$

2自由度系の場合には式(23)の $\sigma_{z\ell\max}$ を上質点系と下質点系の相対変位 z_s の標準偏差の最大値 $\sigma_{z_s\ell\max}$

で置き換えた。

(1) 1自由度系に対する結果

表-1に相対変位応答および相対速度応答の自乗平均値、等価減衰定数および等価固有周期の最大値、履歴特性によって吸収されるエネルギーを示す。表の下方には弾性系応答の自乗平均値の最大値を示す。履歴特性がある場合に弾性系と比較して自乗平均値の最大値が小さくなっている。非線形特性に注目すると、 α （降伏変位を表す）および β （降伏後剛性と降伏前剛性の比）が小さくなるほど自乗平均値の最大値が小さくなる。また、 α および β が小さいほど等価減衰定数および等価固有周期の最大値が大きくなり、履歴特性によって吸収されるエネルギーが大きくなる。これらのことから、履歴特性によって吸収されるエネルギーが大きいほど応答の最大値が低減されることが明らかである。

(2) 2自由度系に対する結果

表-2に上質点および下質点の応答の自乗平均値、等価減衰定数および等価固有周期の最大値、履歴特性によって吸収されるエネルギーを示す。表の下方には弾性系の応答の自乗平均値の最大値を示す。1自由度系の場合と同様に、履歴特性がある場合に弾性系と比較して自乗平均値の最大値が小さくなっている。非線形特性に注目すると、 α および β が小さくなるほど自乗平均値の最大値が小さくなる。また、 α および β が小さいほど等価減衰定数および等価固有周期の最大値が大きくなり、履歴特性によって吸収

されるエネルギーは大きくなる。

4. 結言

塑性変形による履歴特性をもつ振動系が地震動入力を受けた場合の履歴特性によって吸収されるエネルギーおよび自乗平均応答を求める手法を示した。解析モデルとしては1自由度系およびふたつの振動系の連成効果について検討するために2自由度系を用いた。地震動入力は非定常白色雑音とした。

降伏変位が小さく、降伏後剛性と降伏前剛性の比が小さくなるほど応答の自乗平均値の最大値が小さくなり、履歴特性によって吸収されるエネルギーは大きくなることが明らかになった。このことから、履歴特性によって吸収されるエネルギーが大きいほど最大応答が低減されることが明らかになった。

参考文献

- 1) Clough, R.W. and Penzien, J.: *Dynamics of Structures*, Second Edition, Shigapore, McGraw-Hill, pp.711-730, 1993.
- 2) Soong, T.T. and Dargush, G.F.: *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, John Wiley & sons, Chichester, pp.5-125, 1997.
- 3) Roberts, J.B. and Spanos, P.D.: *Random Vibration and Statistical Linearization*, John Wiley & sons, Chichester, pp.113-115, 1990.
- 4) Tajimi, H., A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake, *Proceedings of 1st World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.II, pp.781-798, 1960.

(2003. 7. 8 受付)

表-1 1自由度系の応答の自乗平均値、等価減衰定数、等価固有周期の最大値、履歴特性による吸収エネルギー (h=0.01, T_n=1.0s)

β	α	$\sigma_z^2/S_0(s^5)$	$\sigma_{\dot{z}}^2/S_0(s^3)$	h_{eq}	$T_{eq}(s)$	E_T
0	1.0	1.07×10^{-1}	4.09	6.14×10^{-2}	1.02	3.39
	1.5	1.70×10^{-1}	6.62	3.62×10^{-2}	1.00	1.11
	2.0	2.36×10^{-1}	9.25	2.37×10^{-2}	1.00	3.97×10^{-1}
0.5	1.0	1.38×10^{-1}	5.30	4.58×10^{-2}	1.01	3.11
	1.5	2.02×10^{-1}	7.89	2.86×10^{-2}	1.01	9.71×10^{-1}
	2.0	2.64×10^{-1}	1.04x10	1.94×10^{-2}	1.00	3.29×10^{-1}

弾性系 $\sigma_z^2/S_0=3.57 \times 10^{-1}$ and $\sigma_{\dot{z}}^2/S_0=1.41 \times 10$.

表-2 2自由度系の応答の自乗平均値、等価減衰定数、等価固有周期の最大値、履歴特性による吸収エネルギー ($\gamma=0.1$, $h_s=0.01$, $T_s=1.0s$, $h_p=0.01$, $T_p=1.0s$)

β	α	$\sigma_{z_s}^2/S_0(s^5)$	$\sigma_{\dot{z}_s}^2/S_0(s^3)$	$\sigma_{z_p}^2/S_0(s^5)$	$\sigma_{\dot{z}_p}^2/S_0(s^3)$	h_{eq}	$T_{eq}(s)$	E_T
0	1.0	4.69×10^{-1}	1.52x10	7.00×10^{-2}	2.36	1.06×10^{-1}	1.05	9.35
	1.5	6.30×10^{-1}	2.13x10	8.35×10^{-2}	2.75	5.90×10^{-2}	1.02	2.65
	2.0	7.75×10^{-1}	2.70x10	9.66×10^{-2}	3.17	3.34×10^{-2}	1.01	7.70×10^{-1}
0.5	1.0	6.17×10^{-1}	2.05x10	7.72×10^{-2}	2.56	6.68×10^{-2}	1.03	7.53
	1.5	7.34×10^{-1}	2.52x10	9.11×10^{-2}	2.99	4.03×10^{-2}	1.01	1.94
	2.0	8.42×10^{-1}	2.96x10	1.02×10^{-1}	3.36	2.41×10^{-2}	1.00	5.10×10^{-1}

弾性系 $\sigma_{z_s}^2/S_0=9.60 \times 10^{-1}$, $\sigma_{\dot{z}_s}^2/S_0=3.44 \times 10$, $\sigma_{z_p}^2/S_0=1.14 \times 10^{-1}$, $\sigma_{\dot{z}_p}^2/S_0=3.76$.