3成分の微動アレー観測記録を用いた表面波の位相速度の推定法に関する一考察

盛川　仁 [1]

[1] 東京工業大学大学院総合理工学研究科助教授 (〒 226-8502 横浜市緑区長津田町 4259)
E-mail: morika@enveng.titech.ac.jp

水平動直交 2 成分及び上下動の 3 成分の微動を円形アレー上の複数の観測点で同時に観測し，その記録を用いて Rayleigh 波と Love 波の位相速度を推定する手法を提案する。既に，空間自己相関法を利用した手法が提案されているが，その定式化においては Rayleigh 波と Love 波の伝播方向が同一であることが仮定されている。微動のようにその震源の性質がはっきりしない震動において，Rayleigh 波と Love 波が同一方向に伝播するという仮定が必ずしも成立するとは限らないと考えられる。そこで，Rayleigh 波と Love 波の伝播方向が異なることを前提とした定式化を示し，その場合にも 3 成分の微動アレー観測記録よりこれらの位相速度を推定可能であることを理論的に示す。

Key Words : *spatial auto-correlation method, phase velocity, Rayleigh wave, Love wave, microtremors, array observation*

1．はじめに

容易に観測が可能な微動を用いて，地盤構造を推定する手法は広く利用されている。特に，微動のアレー観測記録から求められた表面波の位相速度を用いることにより，地盤の速度構造を精度良く推定することができる。アレー観測記録から表面波の位相速度を求める際には，周波数–波数 (F-K) スペクトル法[1),2)]や空間自己相関 (SPAC) 法[3),4),5)]がしばしば用いられており，多くの観測事実から，これらの手法が妥当な結果を与えるものと考えられている。

しかし，多くの場合，上下動成分のみを観測し，それに基づいて Rayleigh 波の位相速度を推定しており，水平動成分に含まれる Love 波の位相速度についてはあまり関心が払われてこなかった。これは，多数の 3 成分地震計をアレーに展開して同時観測することが，実際の作業として非常に手間がかかる，ということと無関係ではないであろう。しかし，Rayleigh 波の位相速度のみならず，Love 波の位相速度を用いることで地盤の速度構造の推定精度を高め得る，という可能性も無視できない。

Aki[3)]は，SPAC 法の提案に際して，Rayleigh 波ばかりでなく，Love 波の位相速度の推定法についても言及しているが，Rayleigh 波と Love 波を別々に定式化しているため，微動中の表面波の自然な表現にはなっていなかった。岡田・松島[6)]はこの問題を改善するために，より適切な定式化に基づいて水平動の空間自己相関係数を誘導し，実際の観測記録に適用して妥当な結果を得ている[7)]。また，山本ほか[8),9)]，盛川・西村[10)] もそれぞれ岡田・松島の定式化[6)]にしたがって 3 成分の微動アレー観測記録から Rayleigh 波と Love 波の位相速度を推定することに成功している。

ところが，岡田・松島の定式化[6)]では，Rayleigh 波と Love 波の伝播方向に関する取り扱いがあまり明確には示されていない。彼らの本文中の記述からは，これら 2 種類の表面波が同じ方向に伝播していることを前提として定式化しているように読み取れるのである。地震動のように，表面波の伝播方向がある程度予想できるような場合には，このような前提にたって定式化を行っても特に問題はないものと考えられるが，微動のようにその震源があまりはっきりしておらず，さまざまな震源から表面波が伝播してきているような震動に対しては必ずしも十分な定式化とはいえない。

本研究では，この点に注目し，Rayleigh 波と Love 波が異なる方向に伝播している場合についての定式化を陽な形で明確に示し，その場合でも，3 成分のアレー観測記録を用いて表面波の位相速度を正しく推定可能であることを理論的に示す。

2．問題設定

平面上の任意の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ における微動を $(X_{\mathfrak{r}}(t,\boldsymbol{r}), X_{\vartheta}(t,\boldsymbol{r}))$ と表す。ここで，t は時刻を，$X_{\mathfrak{r}}$，X_{ϑ} はそれぞれある地点 $\boldsymbol{r}_0$ に対する微動の半径成分，接線成分である。いま，$\boldsymbol{r}_0$ を中心とする半径 r の円

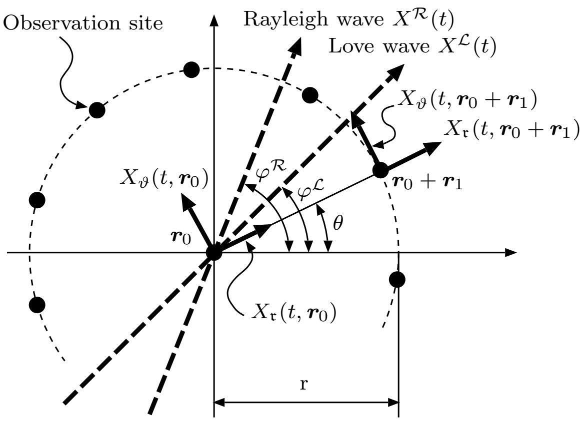

図-1 表面波の伝播方向と観測点の配置

形アレー上の中心点および円周上で微動を観測しているものとし，円周上の観測点の位置を $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1$ とする。このとき，適当な軸と，$\boldsymbol{r}_1$ がなす角を θ とすると，$\boldsymbol{r}_1 = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ である。また，Rayleigh 波および Love 波はそれぞれ $\varphi^{\mathcal{R}}$，$\varphi^{\mathcal{L}}$ の方向に伝播しているものとする。以上のパラメータを図-1 に示す。

各観測点 $\boldsymbol{r}_0$ および $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1$ における微動の水平動成分が Rayleigh 波と Love 波のみから構成されていると仮定すると，各観測点で観測される微動は,

$$X_{\mathfrak{r}}(t, \boldsymbol{r}) = X^{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{r})\cos(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) - X^{\mathcal{L}}(t, \boldsymbol{r})\sin(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \tag{1}$$

$$X_{\vartheta}(t, \boldsymbol{r}) = X^{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{r})\sin(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) + X^{\mathcal{L}}(t, \boldsymbol{r})\cos(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \tag{2}$$

と表される。ここで，$X^{\mathcal{R}}$，$X^{\mathcal{L}}$ はそれぞれ Rayleigh 波および Love 波を表す。

微動が定常確率過程ならば，$X^{\mathcal{S}}(t, \boldsymbol{r})$ は以下のようにスペクトル表示される[11]。ただし，上付き文字 $^{\mathcal{S}}$ は Rayleigh 波または Love 波を表しており，適宜，$^{\mathcal{R}}$ または $^{\mathcal{L}}$ と読み替えるものとする。

$$X^{\mathcal{S}}(t, \boldsymbol{r}) = \iiint \exp\left[i\omega t + i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{r}\right] dZ^{\mathcal{S}}(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}) \tag{3}$$

ここで，ω，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ振動数，波数ベクトル，$dZ(\omega, \boldsymbol{k})$ は直交増分過程で,

$$E[dZ^*(\omega, \boldsymbol{k})dZ(\omega', \boldsymbol{k}')] = \begin{cases} E[|dZ(\omega, \boldsymbol{k})|^2] \\ \qquad (\text{if } \omega = \omega', \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}') \\ 0 \\ \qquad (\text{if } \omega \neq \omega', \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}') \end{cases} \tag{4}$$

を満たし，表面波の伝播方向にのみ値を有する関数となる。ただし，$E[\,\cdot\,]$ は期待値演算を表す。なお，$H(\omega, \boldsymbol{k})$ を微分可能な積分スペクトルとすると,

$$E[|dZ(\omega, \boldsymbol{k})|^2] = dH(\omega, \boldsymbol{k}) = h(\omega, \boldsymbol{k})d\omega d\boldsymbol{k} \tag{5}$$

と表せる。$h(\omega, \boldsymbol{k})$ は微動のパワースペクトル密度関数である。

3．微動の水平動成分の空間自己相関係数

微動の水平動成分の空間自己相関係数を求める。すなわち，半径成分，接線成分について

$$\begin{aligned} &E[X_{\mathfrak{r}}^*(t, \boldsymbol{r}_0)X_{\mathfrak{r}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &\quad = \cos^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta)E[X^{\mathcal{R}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &\quad\ \ + \sin^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta)E[X^{\mathcal{L}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{L}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &E[X_{\vartheta}^*(t, \boldsymbol{r}_0)X_{\vartheta}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &\quad = \sin^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta)E[X^{\mathcal{R}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &\quad\ \ + \cos^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta)E[X^{\mathcal{L}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{L}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \end{aligned} \tag{7}$$

を検討する。ただし，Rayleigh 波と Love 波は互いに独立であると仮定し,

$$E[X^{\mathcal{R}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{L}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] = 0 \tag{8}$$

$$E[X^{\mathcal{L}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{R}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] = 0 \tag{9}$$

を用いた。

次に，式 (6)，(7) の Rayleigh 波および Love 波の空間自己相関関数を求める。式 (4) を用いると,

$$\begin{aligned} &E[X^{\mathcal{S}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{S}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &= E\left[\iiint \exp[-i\omega t - i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{r}_0]dZ^{\mathcal{S}*}(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}) \right. \\ &\qquad \left. \cdot \iiint \exp[i\omega t + i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)]dZ^{\mathcal{S}}(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}})\right] \\ &= \underbrace{\int \cdots \int}_{\text{6-fold}} \exp[-i\omega t - i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{r}_0 + i\omega' t + i\boldsymbol{k}'^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \\ &\qquad \cdot E[dZ^{\mathcal{S}*}(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}})dZ^{\mathcal{S}}(\omega', \boldsymbol{k}'^{\mathcal{S}})] \\ &= \iiint \exp[i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{r}]E[|dZ^{\mathcal{S}}(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}})|^2] \\ &= \iiint \exp[i\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{r}]h(\omega, \boldsymbol{k}^{\mathcal{S}})d\omega d\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}} = (k^{\mathcal{S}}\cos\varphi^{\mathcal{S}}, k^{\mathcal{S}}\sin\varphi^{\mathcal{S}})$ であるから，$d\boldsymbol{k}^{\mathcal{S}} = k^{\mathcal{S}}dk^{\mathcal{S}}d\varphi^{\mathcal{S}}$ が得られ，さらに，$\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ なる関係を用いると，式 (10) は以下のように書き改められる。

$$\begin{aligned} &E[X^{\mathcal{S}*}(t, \boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{S}}(t, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1)] \equiv S^{\mathcal{S}}(t, \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1) \\ &= \iiint \exp[ik^{\mathcal{S}}r(\cos\varphi^{\mathcal{S}}\cos\theta + \sin\varphi^{\mathcal{S}}\sin\theta)] \\ &\qquad \cdot h(\omega, k^{\mathcal{S}}\cos\varphi^{\mathcal{S}}, k^{\mathcal{S}}\sin\varphi^{\mathcal{S}})k^{\mathcal{S}}d\omega dk^{\mathcal{S}}d\varphi^{\mathcal{S}} \\ &= \iiint \exp[ik^{\mathcal{S}}r\cos(\varphi^{\mathcal{S}} - \theta)] \\ &\qquad \cdot h(\omega, k^{\mathcal{S}}\cos\varphi^{\mathcal{S}}, k^{\mathcal{S}}\sin\varphi^{\mathcal{S}})k^{\mathcal{S}}d\omega dk^{\mathcal{S}}d\varphi^{\mathcal{S}} \end{aligned} \tag{11}$$

表面波が主として基本モードのみからなっていると仮定すると，$k^{\mathcal{S}}$ は ω の一価関数として表すことができる。すなわち，適当な関数 $f(\omega)$ が存在して，$k^{\mathcal{S}} = f(\omega)$ の形で書ける。このとき，振動数 ω を固定してその成分波を考えるならば，波数 $k^{\mathcal{S}}$ も固定される。したがって，振動数 ω の成分波に関する表面波の空間自己相関関数は，

$$S^{\mathcal{S}}(r,\omega,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ik^{\mathcal{S}} r\cos(\varphi^{\mathcal{S}} - \theta)] \cdot h(\omega, k^{\mathcal{S}}, \varphi^{\mathcal{S}}) k^{\mathcal{S}} d\varphi^{\mathcal{S}} \quad (12)$$

となる。

式 (12) の上付き文字 $^{\mathcal{S}}$ を $^{\mathcal{R}}$ および $^{\mathcal{L}}$ で読み替えて，式 (6) に代入し，微動の半径成分の振動数 ω なる成分波に関する空間自己相関係数を求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} &S_{\mathfrak{r}}(r,\omega,\theta;\varphi^{\mathcal{R}},\varphi^{\mathcal{L}}) \\ &= \cos^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ik^{\mathcal{R}} r\cos(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta)] \\ &\qquad \cdot h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \\ &\quad + \sin^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ik^{\mathcal{L}} r\cos(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta)] \\ &\qquad \cdot h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) において，$r = 0$ とおくと，

$$\begin{aligned} &S_{\mathfrak{r}}(0,\omega,\theta;\varphi^{\mathcal{R}},\varphi^{\mathcal{L}}) \\ &= \cos^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \\ &\quad + \sin^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (14)$$

となり，微動のパワーに関する関係式を得る。

次に，円形アレーの円周上の多数の点で観測をしているという仮定のもとで，式 (13) について θ に関する方位平均をとる。

$$\begin{aligned} &\bar{S}_{\mathfrak{r}}(r,\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \cos^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ik^{\mathcal{R}} r\cos(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta)] \\ &\qquad \cdot h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \sin^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[ik^{\mathcal{L}} r\cos(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta)] \\ &\qquad \cdot h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \\ &\qquad \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta) \exp[ik^{\mathcal{R}} r\cos(\varphi^{\mathcal{R}} - \theta)] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \\ &\qquad \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta) \exp[ik^{\mathcal{L}} r\cos(\varphi^{\mathcal{L}} - \theta)] d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

付録の式 (32)，(33) を用いて式 (15) の積分を実行すると，

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathfrak{r}}(r,\omega) &= \frac{J_1(z^{\mathcal{L}})}{z^{\mathcal{L}}} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \\ &\quad + \left\{ J_0(z^{\mathcal{R}}) - \frac{J_1(z^{\mathcal{R}})}{z^{\mathcal{R}}} \right\} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (16)$$

となり，半径成分の空間自己相関関数が求められる。ここで，$J_0(\ \cdot\ )$，$J_1(\ \cdot\ )$ はそれぞれ第 1 種 0 次および 1 次のベッセル関数である。また，

$$\begin{aligned} z^{\mathcal{R}} &\equiv k^{\mathcal{R}} r = \frac{\omega r}{c^{\mathcal{R}}(\omega)} \\ z^{\mathcal{L}} &\equiv k^{\mathcal{L}} r = \frac{\omega r}{c^{\mathcal{L}}(\omega)} \end{aligned} \quad (17)$$

と定義され，$c^{\mathcal{R}}(\omega)$，$c^{\mathcal{L}}(\omega)$ はそれぞれ Rayleigh 波，Love 波の位相速度である。

同様にして接線成分についても空間自己相関関数を求めることができ，

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\vartheta}(r,\omega) &= \frac{J_1(z^{\mathcal{R}})}{z^{\mathcal{R}}} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \\ &\quad + \left\{ J_0(z^{\mathcal{L}}) - \frac{J_1(z^{\mathcal{L}})}{z^{\mathcal{L}}} \right\} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。

$J_0(0) = 1$，$\lim_{z\to 0} J_1(z)/z = 1/2$ を式 (16)，(18) に用いると，微動のパワーに関する以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathfrak{r}}(0,\omega) = \bar{S}_{\vartheta}(0,\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで，k が ω の一価関数であることを利用して，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{R}}(\omega, k^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}}) k^{\mathcal{R}} d\varphi^{\mathcal{R}} &\equiv h_0^{\mathcal{R}}(\omega; k^{\mathcal{R}}) = h_0^{\mathcal{R}}(\omega) \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} h^{\mathcal{L}}(\omega, k^{\mathcal{L}}, \varphi^{\mathcal{L}}) k^{\mathcal{L}} d\varphi^{\mathcal{L}} &\equiv h_0^{\mathcal{L}}(\omega; k^{\mathcal{L}}) = h_0^{\mathcal{L}}(\omega) \end{aligned} \quad (20)$$

とおき，式 (16)，(18)，(19) の空間自己相関関数を書き直すとそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\mathfrak{r}}(r,\omega) &= \frac{J_1(z^{\mathcal{L}})}{z^{\mathcal{L}}} h_0^{\mathcal{L}}(\omega) \\ &\quad + \left\{ J_0(z^{\mathcal{R}}) - \frac{J_1(z^{\mathcal{R}})}{z^{\mathcal{R}}} \right\} h_0^{\mathcal{R}}(\omega) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\vartheta}(r,\omega) &= \frac{J_1(z^{\mathcal{R}})}{z^{\mathcal{R}}} h_0^{\mathcal{R}}(\omega) \\ &\quad + \left\{ J_0(z^{\mathcal{L}}) - \frac{J_1(z^{\mathcal{L}})}{z^{\mathcal{L}}} \right\} h_0^{\mathcal{L}}(\omega) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\bar{S}_{\mathfrak{r}}(0,\omega) = \bar{S}_{\vartheta}(0,\omega) = \frac{1}{2} \left\{ h_0^{\mathcal{R}}(\omega) + h_0^{\mathcal{L}}(\omega) \right\} \quad (23)$$

である。微動のパワーに関する関係式 (23) を用いて式 (21) および (22) を正規化し，さらに，付録の式 (34) を用いて整理すると，

$$\frac{\bar{S}_{\mathfrak{r}}(r,\omega)}{\bar{S}_{\mathfrak{r}}(0,\omega)} = \{J_0(z^{\mathcal{R}}) - J_2(z^{\mathcal{R}})\}\mathfrak{R}^{\mathcal{R}} + \{J_0(z^{\mathcal{L}}) + J_2(z^{\mathcal{L}})\}(1-\mathfrak{R}^{\mathcal{R}}) \quad (24)$$

$$\frac{\bar{S}_{\vartheta}(r,\omega)}{\bar{S}_{\vartheta}(0,\omega)} = \{J_0(z^{\mathcal{R}}) + J_2(z^{\mathcal{R}})\}\mathfrak{R}^{\mathcal{R}} + \{J_0(z^{\mathcal{L}}) - J_2(z^{\mathcal{L}})\}(1-\mathfrak{R}^{\mathcal{R}}) \quad (25)$$

となる。ここで，$\mathfrak{R}^{\mathcal{R}}$ は Rayleigh 波のパワー比で

$$\mathfrak{R}^{\mathcal{R}} = \frac{h_0^{\mathcal{R}}(\omega)}{h_0^{\mathcal{R}}(\omega) + h_0^{\mathcal{L}}(\omega)} \quad (26)$$

である。

以上により，微動の水平動成分の空間自己相関係数が求められた。この結果は微動の伝播方向に関する仮定が異なるにも拘らず，岡田・松島による結果[6]と全く同じである。このことは，式 (15) において，θ に関する方位平均を求める際に，$\varphi^{\mathcal{R}}$ と $\varphi^{\mathcal{L}}$ が互いにどのような関係を有しているか，には関係なく，各項別に積分を実行することができるからである。すなわち，θ に関して積分することにより，空間自己相関係数が微動の伝播方向の影響をうけない，という定式化になっているのである。

これまでに，得られているいくつかの実観測記録にもとづく解析結果を見ると[7),8),9),10)]，Rayleigh 波と Love 波が同じ方向に伝播するという厳しい制約条件のもとで解析しているにも拘らず，良い結果が得られている。このことは，微動に含まれる Rayleigh 波と Love 波が同じ方向に伝播している，という事実を裏付けているのではなく，空間自己相関係数が微動の伝播方向に依存しないという数学的な性質を持つために，定式化の際の仮定が制約条件として機能していなかったことを意味している。従って，これらの実観測記録に基づく解析結果は，本論文の主張を支持するよい例題となっているといえる。

4．相互相関について

前節までの議論により，微動の水平動成分の空間自己相関係数を求められたので，これを用いることにより，Rayleigh 波と Love 波の位相速度を推定することができる。既に述べた通り，本研究で得られた空間自己相関係数の表現は岡田・松島による結果[6]と全く同じであるから，3 成分の微動観測記録を用いて位相速度を算出するための具体的手順も同一である。

そこで，本論文では，位相速度の推定法に関する詳細は参考文献に譲り[6),9)]，残りの部分では微動の半径成分と接線成分に関する空間相互相関関数について検討を加えておく。

次式で表される空間相互相関関数を考える。

$$\begin{aligned}
&E[X_{\mathfrak{r}}^{*}(t,\boldsymbol{r}_0)X_{\vartheta}(t,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1)] \\
&\quad = E[X_{\vartheta}^{*}(t,\boldsymbol{r}_0)X_{\mathfrak{r}}(t,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1)] \\
&\quad = \sin(\varphi^{\mathcal{R}}-\theta)\cos(\varphi^{\mathcal{R}}-\theta) \\
&\qquad\qquad \cdot E[X^{\mathcal{R}*}(t,\boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{R}}(t,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1)] \\
&\qquad - \sin(\varphi^{\mathcal{L}}-\theta)\cos(\varphi^{\mathcal{L}}-\theta) \\
&\qquad\qquad \cdot E[X^{\mathcal{L}*}(t,\boldsymbol{r}_0)X^{\mathcal{L}}(t,\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_1)] \qquad (27)
\end{aligned}$$

前節と同様にして，式 (11) を式 (27) に代入し，振動数 ω なる成分波について θ に関する方位平均をとると，

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\mathfrak{r}\vartheta}(r,\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi^{\mathcal{R}}-\theta)\cos(\varphi^{\mathcal{R}}-\theta) \\
&\cdot \int_{-\pi}^{\pi}\exp[ik^{\mathcal{R}}r\cos(\varphi^{\mathcal{R}}-\theta)]h^{\mathcal{R}}(\omega,k^{\mathcal{R}},\varphi^{\mathcal{R}})k^{\mathcal{R}}d\varphi^{\mathcal{R}}d\theta \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\varphi^{\mathcal{L}}-\theta)\cos(\varphi^{\mathcal{L}}-\theta) \\
&\cdot \int_{-\pi}^{\pi}\exp[ik^{\mathcal{L}}r\cos(\varphi^{\mathcal{L}}-\theta)]h^{\mathcal{L}}(\omega,k^{\mathcal{L}},\varphi^{\mathcal{L}})k^{\mathcal{L}}d\varphi^{\mathcal{L}}d\theta
\end{aligned} \qquad (28)$$

となる。ところが，θ に関する積分に注目すると，第一項，第二項ともに，被積分関数がいずれも奇関数であるので，その積分は 0 となる。従って，

$$\bar{S}_{\mathfrak{r}\vartheta}(r,\omega) = 0 \qquad (29)$$

である。

このことより，もしも，観測された微動記録の空間相互相関関数を計算した結果，その値が 0 にならなければ，それは，その観測記録と本論文で導入した仮定とが整合していないという事を意味する。すなわち，微動が Rayleigh 波と Love 波のみからできていて，それらが互いに独立である，という仮定が満足されていない場合には $\bar{S}_{\mathfrak{r}\vartheta}(r,\omega) \neq 0$ となるのである。

したがって，3 成分の微動アレー観測記録を用いて Love 波の位相速度を推定しようとする場合には，本論文の手法が観測記録に対して適用可能かどうかを式 (29) を用いて確認できる。しかし，その一方で，観測記録から求められた $\bar{S}_{\mathfrak{r}\vartheta}(r,\omega)$ が厳密に 0 となることはほとんど期待できないため，$\bar{S}_{\mathfrak{r}\vartheta}(r,\omega)$ の値としてどの程度の値であれば誤差として認め得るかといった点について，今後，検討する必要があろう。

5．まとめ

Rayleigh 波と Love 波が異なる方向に伝播しているような波動場を仮定し，3 成分の微動アレー観測によってそれらの位相速度を推定するための理論的背景を示した。岡田・松島によって提案されている理論では Rayleigh 波の伝播方向は Love 波と同じであると仮定されているが，空間自己相関係数が微動の伝播方向には依存しないため，空間自己相関係数の表現は，微動

の伝播方向の考慮の有無に拘らず全く同じとなることが明らかとなった。

また，Love 波の位相速度を利用可能であるかを判断するために，微動の水平動成分の半径成分と接線成分の空間相互相関が 0 に近いかどうか，という基準を利用できる可能性があることを示した。ただし，その定量的な判断基準については今後の課題である。

謝辞：本研究を遂行するにあたって，岩手大学の山本英和 博士，(財) 地域 地盤 環境研究所の長郁夫 博士には常に示唆に富む議論をしていただいた。記して感謝の意を表する。

付録

本論文で用いた定積分の値と，低次の第一種ベッセル関数に関する関係式をいくつか挙げておく。一般に，

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi \tag{30}$$

が成り立つ[12]。ここで $J_\nu(\,\cdot\,)$ は第一種 ν 次のベッセル関数である。従って，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$ を使って，以下の関係式を得る。

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[\pm iz\cos\varphi\right]d\varphi \tag{31}$$

$$J_1(z) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\exp\left[\pm iz\cos\varphi\right]d\varphi \tag{32}$$

さらに，これらの関係式から，

$$zJ_0(z) - J_1(z) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\varphi\exp\left[\pm iz\cos\varphi\right]d\varphi \tag{33}$$

が得られる。また，

$$J_2(z) = \frac{2}{z}J_1(z) - J_0(z) \tag{34}$$

である[12]。

参考文献

1) Capon, J.: High-Resolution Frequency-Wave Number Spectrum Analysis, *Proceedings of IEEE*, Vol.57, pp.1408–1419, 1969.
2) 掘家正則：微動の位相速度及び伝達関数の推定，地震，第 2 輯，Vol.33, pp.425–442, 1980.
3) Aki, K.: Space and Time Spectra of Stationary Stochastic Waves with Special Reference to Microtremors, *Bulletin of Earthquake Reserach Institute, University of Tokyo*, Vol.35, pp.415–456, 1957.
4) Okada, H.: A New Method of Underground Structure Estimation Using Microtremors, *Lecture note for Beijing Graduate School, China*, Institute of Mining and Technology, 1992.
5) 松岡達郎，梅沢夏実，巻島秀男：地下構造推定のための空間自己相関法の適用に関する検討，物理探査，Vol.49, pp.26–41, 1996.
6) 岡田廣，松島健：微動探査法 (1) —微動に含まれるラブ波の識別方法とその理論—，物理探査学会第 81 回学術講演会講演論文集，pp.15–18, 1989.
7) 松島健，岡田廣：微動探査法 (2) —長周期微動に含まれるラブ波を識別する試み—，物理探査学会第 82 回学術講演会講演論文集，pp.5–8, 1990.
8) 山本英和，吉田芳則，小渕卓也，斎藤徳美，岩本鋼司：短周期微動のアレイ観測による盛岡市域の地下速度構造の推定，物理探査，Vol.50, pp.93–106, 1997.
9) 山本英和：3 成分空間自己相関法による微動に含まれる表面波の位相速度の推定に関する研究，北海道大学博士学位論文, 1998.
10) 西村敬一，盛川仁：重力および脈動を用いた広島市の基盤構造の推定，第 11 回 日本地震工学シンポジウム論文集，pp.241–246, 2002.
11) Yaglom, A.M.: *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
12) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, CA, Eqs. 8.411.7 and 8.473.1, 1979.

(2003.5.24 受付)

A METHOD TO ESTIMATE PHASE VELOCITIES OF SURFACE WAVES USING ARRAY OBSERVATION RECORDS OF 3-COMPONENT MICROTREMORS

Hitoshi MORIKAWA

We propose a method to estimate phase velocities of the Rayleigh and Love waves using array observation records of three-component microtremors. Previous researchers have provided a method on the basis of the spatial auto-correlation (SPAC) method, assuming that the Rayleigh and Love waves are propagated in the same direction. However, this assumption seems to be poorly suited to microtremors, because of the various possible sources and the uncertain nature of microtremors. Thus, we formulate the SPAC coefficients for microtremors in a case where the Rayleigh and Love waves are propagated in different directions. From this, it is shown analytically that the phase velocities of surface waves can be calculated from the SPAC coefficients and that they are independent of the propagation directions of the surface waves.