

高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素モデルの構築

吉田純司¹・阿部雅人²・藤野陽三³

¹ 学生員 東京大学大学院 工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

² 正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

³ フェロー Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

高減衰積層ゴム支承はその複雑な力学特性のため、材料レベルからの精緻なモデルが存在せず、実験主体で性能の確認が行われている。本研究では有限要素法により、材料レベルからの高減衰積層ゴム支承のモデルを構築することを目的とした。まず、著者らが提案した構成則を有限要素法に導入するための式展開を示した。次いで微圧縮性で増分型の構成則を適用するための、混合型有限要素法の定式化を示した。本構成則と有限要素法を用いて積層ゴム支承の3次元有限要素モデルを構築し、支承の載荷実験結果と比較してモデルの検証した。

Key Words: *Finite element method, Mixed method, Slight compressibility, Base-isolation bearing, High damping rubber, Steel, Constitutive law, Hyper elasticity, Elasto-Plasticity*

1. はじめに

近年、高減衰積層ゴム支承を用いた免震構造を採用している橋梁、建築物が増加している。高減衰積層ゴム支承は、微圧縮性を有する高減衰ゴムと鋼板を積層状にすることで、ゴム層の体積変形を制限し構造物を常時支持している。また、地震時においては、高減衰ゴムの柔軟性およびエネルギー吸収性能により、慣性力を低減し、大変形下において地震エネルギーを吸収する。そのため、材料レベルから支承を精緻にモデル化するためには、ゴム材料の微圧縮性、幾何学非線形、材料非線形を同時に考慮する必要がある。

しかし、これまで高減衰ゴムの材料非線形を精度よく再現できる構成則は存在せず、超弾性体を代用して、微圧縮性および幾何学非線形のみを考慮した支承のモデル化が行われてきた¹⁾。そのため数値計算では、信頼性の高い結果を得ることができず、手間・費用のかかる載荷実験を主体として性能の確認が行われている。

以上のことから著者らは、まず材料試験結果に基づき、高減衰ゴムの精緻な構成則を構築した²⁾。本研究では、

- 1) 提案した構成則を有限要素法に適用するための定式化を示す。
 - 2) 構成則を適用可能な有限要素法を構築する。
 - 3) 高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築し、さらに支承の載荷実験結果と比較することでモデルを検証する。
- ことを目的とした。

具体的には提案した構成則を式変形し、有限要素法において必要な構成則テンソルを導出する。また、

既往の混合型有限要素法を拡張して提案した構成則に対応可能な有限要素法の基礎式を導く。最後に高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素モデルを構築し、既往の高減衰積層ゴム支承の多軸載荷実験結果と比較してモデルを検証する。

2. 構成則

以下では、高減衰積層ゴム支承をモデル化するために用いた高減衰ゴムならびに鋼材料の構成則を簡潔に説明する。

(1) 高減衰ゴムの構成則

高減衰ゴムの構成則として図-1 に示すような弾塑性体と微圧縮型超弾性体を並列に組み合わせるモデルを用いた。

(a) 超弾性部

ここでは以下のエネルギー密度関数 W_1 および W_2 に、最大経歴ひずみに依存したダメージ関数を加えたモデルを用いた²⁾。

$$W = gW_1 + hW_2 \quad (1a)$$

$$W_1 = c_1(\bar{I}_c - 3) + c_2(\bar{II}_c - 3) \quad (1b)$$

$$W_2 = \frac{c_3 c}{n+1} \left(\frac{\bar{I}_c - 3}{c} \right)^{n+1} \quad (1c)$$

ただし g および h はダメージ関数であり次式のものを用いた。

$$g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-x/\alpha}}{x/\alpha} \quad (2d)$$

$$x(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} \sqrt{2W_1(s)} \quad (2e)$$

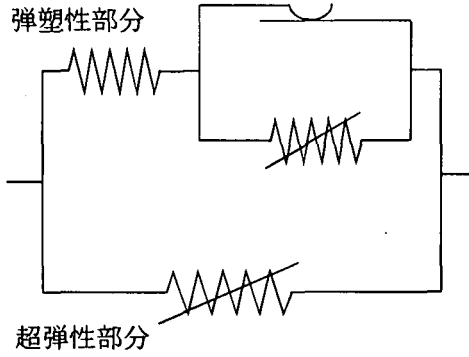


図-1 高減衰ゴムの構成則の概略図

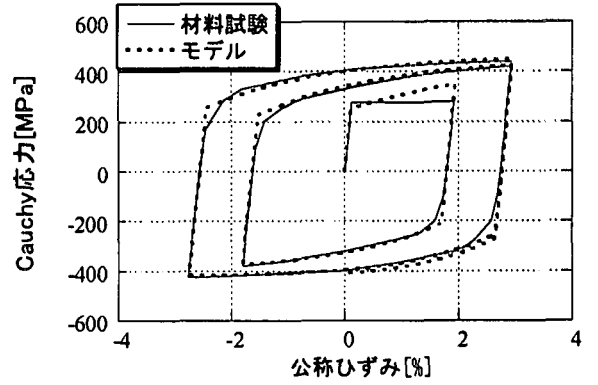


図-2 SS400 の引張り試験結果とモデルの比較

$$h(y) = 1 - \frac{1}{1 + \exp\{-a_H(y - b_H)\}} \quad (2f)$$

$$y(t) = \max_{s \in (-\infty, t]} (\bar{I}_C - 3) \quad (2g)$$

ここに $c_1, c_2, c_3, c, n, \alpha, \beta, a_H$ および b_H は材料定数である。以上の式を用いると第 2Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}$ と Green-Lagrange ひずみ $\mathbf{E}$ の関係は以下ようになる。

$$\mathbf{S} = g \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{E}} + h \frac{\partial W_2}{\partial \mathbf{E}} \quad (3)$$

(b) 弾塑性部

弾塑性部では、既往の微分方程式による弾塑性モデルを拡張して用いた²⁾。最終的な式を以下に示す。

$$\dot{\mathbf{T}}_{(j)} = C_{ijkl}^{(E)} (\mathbf{D}_H - \mathbf{D}_H^p) \quad (4)$$

ここに

$$\mathbf{D}_H^p = (3K_2)^{1/2} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}_H}{\tau_y} \quad (5a)$$

$$K_2 = \frac{D'_{ij} D'_{ij}}{2}, \quad J_2 = \frac{T'_y T'_y}{2\tau_y^2} \quad (5b)$$

$$\tau_y = \tau_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{I}_C - 3}{c} \right)^b \right\} \quad (5c)$$

である。また $C_{ijkl}^{(E)}$ は弾性構成則テンソルであり、

$$C_{pqrs}^{(E)} = \frac{1}{J} F_{pi} F_{qj} F_{rk} F_{sl} C_{ijkl}^{(0)} + \delta_{pr} T_{sp}^{(h)} + \delta_{qs} T_{pr}^{(h)} - \delta_{rs} T_{pq}^{(h)} \quad (6a)$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \frac{\partial^2 W_E}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{T}^{(h)} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W_E}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (6c)$$

$$W_E = c_4 (\bar{I}_C - 3) + c_5 (\bar{I}_C - 3) + \frac{c_4 c}{m+1} \left(\frac{\bar{I}_C - 3}{c} \right)^{m+1} \quad (6d)$$

ただし $\dot{\mathbf{T}}_{(j)}$ は Cauchy 応力テンソルの Jaumann 速度、 $\mathbf{D}$ は変形速度テンソルであり c_4, c_5, m, b, τ_0 および N は材料定数である。

(c) 構成則テンソルの導出

構成則を実際に有限要素法に適用するためには、構成則テンソルを導く必要がある。超弾性部については文献 3) ですでに得られている。以下では弾塑性

部における構成則テンソルを導出する。

式(5a)の $(3K_2)^{1/2}$ を以下のように変形する。

$$(3K_2)^{1/2} = \frac{3K_2}{(3K_2)^{1/2}} \quad (7)$$

ここで K_2 は、

$$K_2 = \frac{D'_{ij} D'_{ij}}{2} = \frac{D'_{ij} D_{ij}}{2} \quad (8)$$

のように記述できることを用いると式(16a)の $\mathbf{D}^p$ は、

$$\mathbf{D}_H^p = \frac{D'_{ij} D_{ij}}{2(3K_2)^{1/2}} (3J_2)^{(N-1)/2} \frac{\mathbf{T}_H}{\tau_y} \quad (9)$$

となる。従って上式を式(4)に代入して整理すると

$$\dot{\mathbf{T}}_H = C_{ijkl}^{ep} D_{ij} \quad (10)$$

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^{(E)} - \frac{D'_{ij} (3J_2)^{(N-1)/2}}{2(3K_2)^{1/2}} \cdot \frac{C_{ijpq}^{(E)} T'_{pq}}{\tau_y} \quad (11)$$

となり構成則テンソルを得ることができた。

(2) 鋼材料の構成則

本研究では、鋼材料の挙動を精緻に再現できる構成則として、既往の弾塑性モデル⁴⁾を拡張し、大ひずみ状態に適用可能なモデルを用いた⁷⁾。この構成則は、非線形移動硬化則と、指数関数型の硬化曲線を有する等方硬化則を用いている。SS400 の引張り試験結果とモデルの比較を図-2 に示す。図-2 をみると本構成則により材料試験結果を精緻に再現できることがわかる。

3. 有限要素定式化

渡邊⁵⁾は、微圧縮性を有する超弾性体を対象として、圧力-変位を同時に内挿する射影混合法を提案している。この手法では超弾性体を対象としているため、上述した高減衰ゴムの構成則をそのまま適用することはできない。本研究では、射影混合法の弱形式とその時間導関数を、以下のような現配置で定義される量に変換し、その後 updated Lagrange 法⁶⁾により離散化した。

表-1 多軸載荷実験における載荷条件

実験項目	水平変位	載荷速度[Hz]	載荷振幅 [%]	鉛直面圧[MPa]
水平1方向載荷	正弦波3サイクル	0.01	50, 100, 150, 200	一定値: 3.92
水平2方向載荷	8の字経路3サイクル	0.01	8の字: 50, 100, 150	一定値: 3.92
鉛直載荷実験	—	0.01	—	繰り返し載荷: 0~7.84

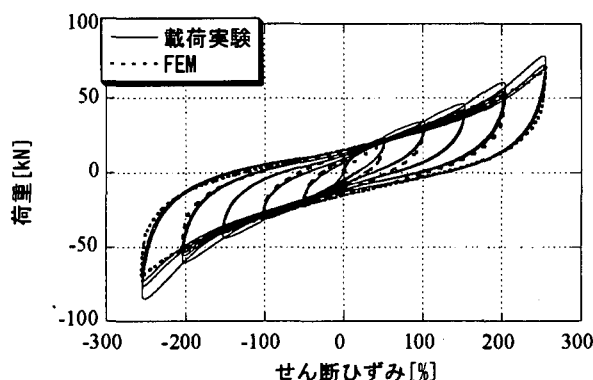


図-4 水平1方向載荷実験結果とFEMの比較

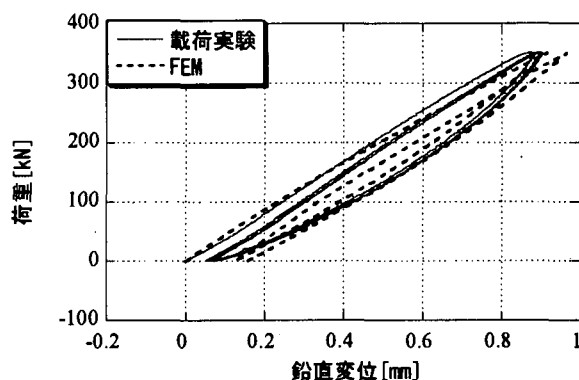


図-5 鉛直載荷実験結果とFEMの比較

(1) 現配置で記述される弱形式

外力のなす仮想仕事を δR とすると、平衡する内力による仮想仕事は、

$$\delta R = \int_v T_{ij} \delta A_{ij} dv \quad (12)$$

となる。また体積変形は次式により拘束される。

$$\int_v \left(W^v - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \frac{\delta \lambda}{J} dv = 0 \quad (13)$$

ここに $\mathbf{T}$ は Cauchy 応力、 $\delta \mathbf{A}$ は仮想変位から生じる Almansi ひずみの線形成分である。また J は変形勾配テンソルの determinant, λ は圧力、 W^v は非圧縮性の条件を示している。式(13)では、係数 α を用いて非圧縮の条件を緩和し微圧縮性を再現している。

(2) 現配置で記述される弱形式の時間導関数

一方、射影混合法⁵⁾の速度型弱形式は現配置で定義される量に変換されると以下ようになる。

$$\delta \dot{R} = \int_v [\delta A_{ij} D'_{ijm} \dot{A}_{im} + \delta F_i(t) T_{ij} L_{ij} + \delta A_{ij} T_{ij}^p \dot{\lambda}] dv \quad (14a)$$

$$\int_v \delta \lambda \left(T_{ij}^p \dot{A}_{ij} - \frac{\dot{\lambda}}{\alpha} \right) dv = 0 \quad (14b)$$

ただし、

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \delta \mathbf{F}_i(t) = \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \quad (15a)$$

$$\mathbf{T}^p = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \left(2 \frac{\partial W^v}{\partial \mathbf{C}} \right) \cdot \mathbf{F}^T \quad (15b)$$

また、 $\mathbf{D}'$ は Truesdell 応力速度と変形速度テンソルを関連付ける構成則テンソルである。

(3) 数値計算手法

式(14)を updated Lagrange 型の混合型有限要素法⁵⁾により離散化した。実際の数値計算においては、

ゴム材料に変位節点 8、圧力節点 1、鋼材料に変位節点 8 の 6 面体要素⁶⁾を用いた。また増分方程式の数値解法では、Newton-Raphson 法⁶⁾を用いた。弾塑性体の応力積分は、サブインクレメント積分を用いて forward-Euler 法⁶⁾により行った。

4. 実験結果との比較

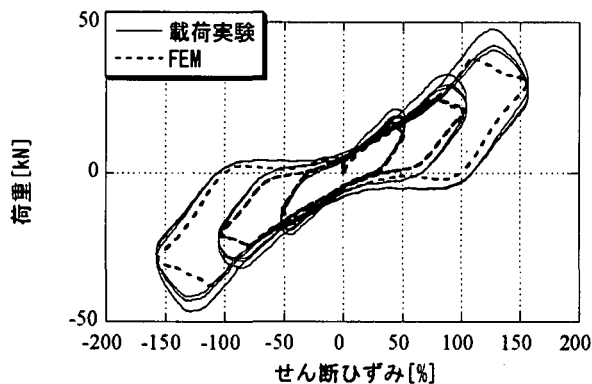
上述した構成則と有限要素法を用いて高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築した。ここでは、構築したモデルと既往の載荷実験結果⁷⁾とを比較してモデルを検証する。各載荷実験における載荷条件を表-1に示す。

(1) 水平1方向載荷実験結果との比較

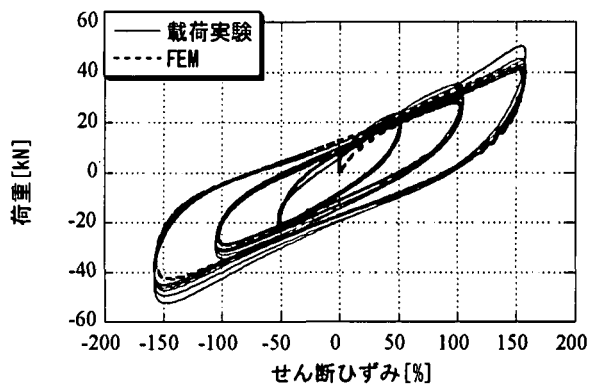
本実験は、表-1に示すように一定面圧 3.92[MPa]の下で水平1方向にせん断変形を与える実験である。図-4に載荷実験結果と FEM による解析結果の比較を示す。図-4をみると両者は非常によく一致していることがわかる。

(2) 鉛直載荷実験との比較

本実験では水平方向を無変形となるよう固定し、表-1に示す繰り返し面圧を与える。図-5に載荷実験結果と FEM による解析結果の比較を示す。図-5を見ると鉛直方向の剛性は概ね一致しているものの、荷重が零付近の挙動が実験結果と異なっている。この原因として、ゴムの構成則において粘性を含むエネルギー吸収性能を等価な塑性で置き換えているため、本来回復するはずのひずみが永久変形として残ったものと推測される。



(a) X 方向



(b) Y 方向

図-6 水平 2 方向載荷実験結果と FEM の比較

(3) 水平 2 方向載荷実験結果との比較

一定面圧 3.92[MPa]の下で水平 2 方向に 8 の字型の経路を設定して繰り返し載荷を与える。図-6 に水平 2 方向載荷実験結果と FEM による解析結果との比較を示す。図-6 をみると X 方向における履歴ループの角部で若干の不一致が見られるものの全体として両者はよく一致していることがわかる。

6. まとめ

本研究では、高減衰積層ゴム支承の精緻な 3 次元有限要素モデルを構築することを目的とした。得られた知見は以下の通りである。

- 1) 提案した構成則を有限要素法に適用するための定式化を示した。
- 2) 微圧縮性でかつ速度型の構成則を適用するための updated Lagrange 法による混合型有限要素法を構築した。
- 3) 高減衰積層ゴム支承の有限要素モデルを構築し、モデルによる数値解析結果と、載荷実験結果とを比較してモデルを検証した。

謝辞：有限要素コードの開発では、東京大学新領域創成科学研究科環境学の渡邊講師に丁寧なご指導を賜った。また積層ゴム支承の載荷実験では、川

口金属(株)の鶴野氏、(株)ブリジストンの須藤氏、横浜ゴム(株)の遠藤氏、オイレス工業(株)の横川氏に協力して頂いた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Mineo, T, Hideyuki, T., and Ryuichi, T.: Finite Element Analysis of Laminated Rubber Bearing used in Base Isolation System, *The meeting of the Rubber Division*, American Chemical Society, Washington D.C., pp.46-62, 1990.
- 2) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 高減衰ゴムの構成則, 土木学会論文集(投稿中).
- 3) Simo, J.C.: On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.60, pp.153-173, 1987.
- 4) Chaboche, L.J.: Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.5, pp.247-301, 1989.
- 5) 渡邊浩志: 非圧縮性超弾性体の混合型有限要素解析に関する研究, 東京大学学位論, 1995.
- 6) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1995.
- 7) 阿部雅人, 吉田純司, 藤野陽三: 免震用積層ゴム支承の水平 2 方向を含む復元力特性とそのモデル化, 土木学会論文集(accepted).

3 DIMENSIONAL FINITE ELEMENT MODEL OF HIGH DAMPING RUBBER BEARING

JUNJI Yoshida, MASATO Abe and YOZO Fujino

3 dimensional finite element modeling of High Damping Rubber bearing is studied. At first, the constitutive law of High damping rubber materials is formulated for the application to the Finite Element method. Then weak form for updated Lagrangian method of Mixed Finite element method is shown, where slightly compressible materials with incremental form of constitutive law can be applied. Finally FEM model of High Damping Rubber Bearing is constructed and it shows good agreement with experimental results.