

履歴復元力特性を持つ構造物の 初通過破壊確率

青木繁¹

1 正会員 工博 東京都立工業高等専門学校教授 機械工学科 (〒140-0011 東京都品川区東大井一丁目 10-40)

土木構造物のような比較的重量のある構造物（主構造物系）に設置された比較的軽量の機械構造物（付加構造物系）の地震時の応答を考慮することは、土木構造物本体の耐震設計にとっても重要なことである。構造物は過大な地震入力を受けると応答が塑性域に入る。一方、地震時の構造物の信頼性を確率論的に評価することの重要性が指摘されている。応答が最初に破壊レベルを通過した瞬間破壊が生じるとする初通過破壊は、構造物の代表的な破壊様式である。本報告ではこのような状況を考慮して、塑性変形を考慮した付加構造物系の初通過破壊確率を簡便に推定する方法について検討した。

Key Words : Vibration, Random Vibration, Reliability, Floor Response Spectrum, Plastic Deformation

1. 緒言

土木構造物のような比較的重量のある構造物（主構造物系）に設置されている比較的軽量の機械構造物（付加構造物系）の地震応答は、両構造物系の振動特性の影響を大きく受ける。とくに両構造物系の固有周期が近い場合には、付加構造物系の地震応答は大きく増幅される¹⁾。構造物が過大な地震入力を受けると、応答は塑性域に入り、復元力特性は履歴特性をもつ²⁾。

耐震設計では1自由度系の最大応答を表す応答スペクトルがよく用いられる³⁾。付加構造物系の耐震設計には、主構造物系の地震応答を1自由度系に入力として得られる床応答スペクトルがよく用いられる⁴⁾。重要度の高い付加構造物系は地震動終了後もその機能を維持していることが要求される。このような付加構造物系の安全性を確率論的に評価することの重要性が指摘され、初通過破壊確率はひとつの評価要素となる⁵⁾。

本報告では、塑性変形による履歴特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率を簡便に推定する方法を提案した。両構造物系をそれぞれ1自由度系で模擬したモデルを用いた。入力地震波としては非定常非白色雑音を用いた。付加構造物系の復元力特性がbilinear履歴特性をもつものとした。

初通過破壊確率は、等価線形化法を用いてモーメント方程式を解くことによって求めた。その結果、破壊レベルを履歴特性のない線形系の付加構造物系

の最大標準偏差で無次元化すると、初通過破壊確率は付加構造物系と主構造物系の質量比、減衰定数、固有周期によらずに推定できることが明らかになった。最大標準偏差は最大応答に相当する⁶⁾。付加構造物系の最大応答は、主構造物系に対する増幅係数またはモード解析によって求めることができる^{1), 4)}。この方法は付加構造物系の初通過破壊確率の実用的な推定法となることが期待される。

2. 解析モデルおよび入力地震波

実際の主構造物系および付加構造物系は複雑で、多自由度系でモデル化されることもあるが、ここでは簡単のため、図-1に示すように両構造物系を1自由度系でモデル化する。付加構造物系のばね要素が塑性変形による履歴特性をもつものとする。運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{z}_s + f &= -\ddot{z}_p - \ddot{y} \\ \ddot{z}_p + 2\zeta_p \omega_p \dot{z}_p + \omega_p^2 z_p - \gamma(2\zeta_s \omega_s \dot{z}_s + f) &= -\ddot{y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 z_s は付加構造物系と主構造物系との間の相対変位 $x_s - x_p$ 、 z_p は主構造物系と地盤の間の相対変位 $x_p - y$ を表す。 $h_s (= c_s / 2\sqrt{m_s k_s})$ および $h_p (= c_p / 2\sqrt{m_p k_p})$ はそれぞれ付加構造物系と主構造物系の減衰定数を表す。 $\omega_s (= \sqrt{k_s / m_s})$ および $\omega_p (= \sqrt{k_p / m_p})$ はそれぞれ付加構造物系および主構造物系の固有円振動数を表す。 γ は付加構造物系

と主構造物系の質量比を表す。f は付加構造物系に生じる復元力であり、 $\ddot{y}$ は入力加速度を表す。

入力加速度としては、定常非白色雑音に振幅非定常性を表す包絡線に乗じて得られる非定常非白色雑音を用いた。図-2 に振幅非定常性を表す包絡線を示す。定常非白色雑音のパワースペクトル密度関数は次式で与えられるものとする。

$$G(\omega) = \frac{(2h_g \omega_g \omega)^2 + \omega_g^4}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2h_g \omega_g \omega)^2} G_0 \quad (2)$$

ここで、 h_g および ω_g はそれぞれ地盤モデルの減衰定数および固有円振動数を表す。 G_0 は基盤への入力をホワイトノイズであるとしたときのパワースペクトル密度を表す。地盤モデルの運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} &= I(t)(\ddot{z}_g + \ddot{y}_g) \\ \ddot{z}_g + 2h_g \omega_g \dot{z}_g + \omega_g^2 z_g &= -\ddot{y}_g \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 z_g は地盤と基盤の間の相対変位、 $\ddot{y}_g$ は基盤の加速度を表す。

3. 初通過破壊確率の理論式

付加構造物系の相対変位 z_s の絶対値が最初に破壊レベル B_D を通過した瞬間に付加構造物系が破壊すると仮定すると、初通過破壊確率は次式で求めることができる。

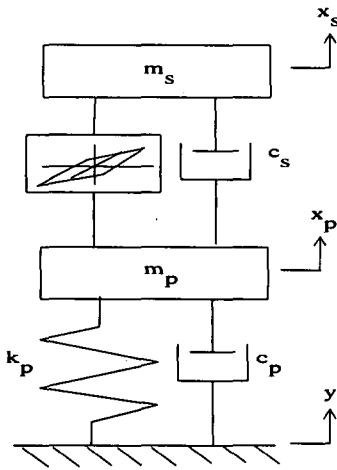


図-1 解析モデル

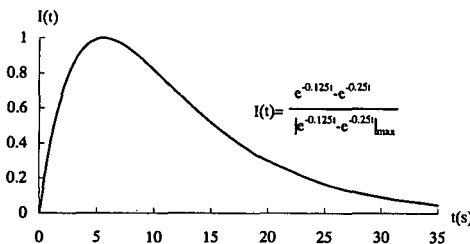


図-2 包絡関数

$$P_f(t) = 1 - \exp \left\{ -2 \int_0^t v(t) dt \right\} \quad (4)$$

z_s が B_D を通過する確率が統計的に独立であると仮定すると、 $v(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{D}}{\sigma_{z_s}^2} \left[\exp \left\{ -\frac{B_D^2}{2\sigma_{z_s}^2} \left(1 + \frac{\kappa_{z_s \dot{z}_s}^2}{D} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + B_D \kappa_{z_s \dot{z}_s} \sqrt{\frac{\pi}{2D\sigma_{z_s}^2}} \exp \left\{ -\frac{B_D^2}{2\sigma_{z_s}^2} \right\} \{ 1 + \text{erf}(C) \} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\sigma_{z_s}^2$ は付加構造物系の相対変位応答の分散、 $\sigma_{\dot{z}_s}^2$ は相対速度の分散、 $\kappa_{z_s \dot{z}_s}$ は相対変位応答と相対速度応答の共分散を表す。さらに、

$$C = \frac{\kappa_{z_s \dot{z}_s}}{\sqrt{2D\sigma_{z_s}^2}}, \quad D = \sigma_{z_s}^2 \sigma_{\dot{z}_s}^2 - \kappa_{z_s \dot{z}_s}^2,$$

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-y^2) dy \quad (6)$$

$z_s, \dot{z}_s, z_p, \dot{z}_p, z_g$ and $\dot{z}_g$ に関する推移確率密度関数 P に対する Fokker-Planck の式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z_p} \dot{z}_p + 2h_p \omega_p p - \frac{\partial p}{\partial \dot{z}_p} \left\{ 2h_p \omega_p \dot{z}_p - \omega_p^2 z_p \right. \\ &\quad \left. + \gamma(2h_s \omega_s \dot{z}_s + f) + I(t)(2h_g \omega_g \dot{z}_g + \omega_g^2 z_g) \right\} \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial z_s} \dot{z}_s + 2h_s \omega_s \dot{z}_s (1 + \gamma) p \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial \dot{z}_s} \left\{ -2h_s \omega_s \dot{z}_s (1 + \gamma) \dot{z}_s \right. \\ &\quad \left. - (1 + \gamma)f + 2h_p \omega_p \dot{z}_p + \omega_p^2 z_p \right\} \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial z_g} \dot{z}_g + 2h_g \omega_g \dot{z}_g + \frac{\partial p}{\partial \dot{z}_g} (2h_g \omega_g \dot{z}_g + \omega_g^2 z_g) \\ &\quad + \frac{\partial^2 p}{\partial \dot{z}_g^2} \frac{\pi G_0}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、付加構造物系に生じる復元力 f を次のように等価線形化した。

$$f = 2h_{eq} \omega_{eq} \dot{z}_s + \omega_{eq}^2 z_s \quad (8)$$

ここで、 h_{eq} は等価減衰定数、 ω_{eq} は等価固有円振動数を表す。式(4)および式(5)を用いて初通過破壊確率を求めるために、 $\sigma_{z_s}^2$ 、 $\sigma_{\dot{z}_s}^2$ および $\kappa_{z_s \dot{z}_s}$ が必要となる。式(6)に部分積分法を応用すると、次式のような $z_s, \dot{z}_s, z_p, \dot{z}_p, z_g$ および $\dot{z}_g$ に関するモーメント方程式が得られる⁷⁾。このモーメント方程式を解き、式(5)および式(6)を用いて式(4)から初通過破壊確率を求めることができる。

4. 非線形特性

非線形特性として、図-3 に示す bilinear 履歴復元力特性を用いた。 f_c は降伏力、 β は降伏後剛性と降伏前剛性の比を表す。復元力 f は式(8)のように等価線形化した。非線形性が弱い場合、主要動付近で $z_s(t)$ が定常過程で振幅の分布が Rayleigh 分布であると仮定すると、 ζ_{eq} および ω_{eq} は次のようになる。

$$h_e = \frac{\omega_s^2 \operatorname{erfc}(\eta^{-1})(1-\beta)}{\sqrt{\pi} \omega_e^2 \eta} \quad (9)$$

$$\omega_e^2 = \omega_s^2 - \omega_s^2 \left\{ \exp(-\eta^{-2}) - \eta^{-1} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\eta^{-1}) \right\} (1-\beta) \quad (10)$$

ここで、

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-v^2) dv, \eta = \sqrt{2} \sigma_{z_s} / Z_c \quad (11)$$

また、 Z_c は降伏変位 f_c / ω_s^2 である。降伏力は履歴特性のない線形系の付加構造物系の復元力の最大標準偏差 $\omega_s^2 |\sigma_{se}|_{\max}$ で次式のように無次元化した。

$$\alpha = f_c / \omega_s^2 |\sigma_{se}|_{\max} \quad (12)$$

破壊レベル B_D は履歴特性のない線形系の付加構造物系の相対変位応答の最大標準偏差 $|\sigma_{se}|_{\max}$ で次式のように無次元化した。

$$\delta_i = B_D / |\sigma_{se}|_{\max} \quad (13)$$

最大標準偏差は最大応答に相当する⁶⁾。付加構造物系の最大応答は、主構造物系に対する増幅係数やモード解析によって推定することができる^{1),4)}。

5. 数値計算例

式(4)から、初通過破壊確率 p_f は時間 t 時間の関数となる。重要度の高い付加構造物系は地震動終了後もその機能を維持していることが要求されることから、地震動終了時の p_f を求めた。多くのパラメータがあるが、いくつかの値は固定した。主構造物系の減衰定数 h_p は 0.05 とした。付加構造物系の応答が大きき増幅される条件を考慮して、付加構造物系の固有周期 $T_s (2\pi / \omega_s)$ は主構造物系の固有周期 $T_p (2\pi / \omega_p)$ と一致するものとした。

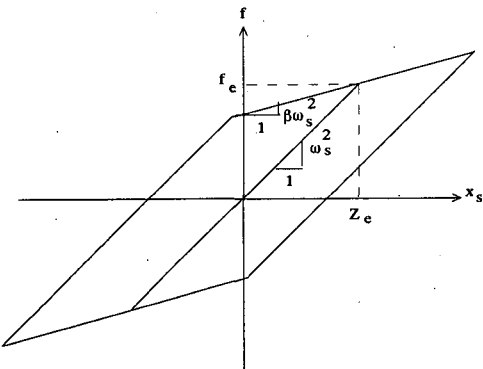


図-3 Bilinear 履歴復元力特性

表-1 から表-4 に結果を示す。表-1 から表-3 までは $\alpha=1.0$ および $\beta=0$ とした。この条件では、履歴特性は完全弾塑性履歴特性となる。表-1 は異なる質量比 γ に対する p_f を示す。表-2 は異なる付加構造物系の減衰定数 h_s に対する p_f を示す。表-3 は異なる付加構造物系の固有周期 T_s と主構造物系の固有周期 T_p に対する p_f を示す。表-1 から、 γ が大きくなるにつれて p_f が大きくなっている。しかしながら、 γ に対する p_f の変動は小さくなっている。表-2 から、 h_s が大きくなるにつれて p_f が大きくなっている。しかしながら、 h_s に対する p_f の変動は小さくなっている。表-3 から、 T_s および T_p が短くなるにつれて p_f が大きくなっている。しかしながら、 T_s および T_p に対する p_f の変動は小さくなっている。

表-4 および表-5 では $\alpha=1.0$ および $\beta=0.5$ とした。この条件では、履歴特性は bilinear 履歴特性となる。表-4 は異なる質量比 γ に対する p_f を示す。表-4 から、 γ が大きくなるにつれて p_f が大きくなっている。しかしながら、 γ に対する p_f の変動は小さくなっている。表-5 から、 h_s に対する p_f の変動は小さくなっている。 T_s および T_p が異なる場合にも、表-3 と同様に T_s および T_p に対する p_f の変動は小さくなった。

6. 結言

塑性変形による履歴特性をもつ付加構造物系の初通過破壊確率の簡便な推定法を提案した。入力地震波として非定常非白色雑音を用いた。破壊レベルを式(13)のように履歴特性がない線形系の付加構造物系の最大標準偏差で無次元化すると、付加構造物系と主構造物系の質量比、付加構造物系の減衰定数、付加構造物系と主構造物系の固有周期の値にかかわらず、初通過破壊確率の変動が小さいことが明らかになった。最大標準偏差は最大応答に相当する。したがって、この方法は、付加構造物系の初通過破壊確率の実用的で簡便な推定法になることが期待される。

参考文献

- 1) Suzuki, K. and Aoki, S. : "Conventional Estimating Method of Earthquake Response of Mechanical Appendage System Installed in the Nuclear Structural Facilities", Trans of 6th SMIRT, K10/3, 1981.
- 2) Roberts, J.B. and Spanos, P.D. : Random Vibration and Statistical Linearization, John Wiley & Sons, 1990.
- 3) Hart, G.C. and Wong, K. : Structural Dynamics for Structural Engineers, John Wiley & Sons, 1999.
- 4) Gupta, A.J., : Response Spectrum Method, Blackwekk Scientific Publication, 1990.
- 5) Lin, Y.K. and Cai, G.Q. : Probabilistic Structural Dynamics, MacGraw-Hill, 1995.
- 6) Tajimi, H. : "A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake", Proc. of 2WCEE, Vol. II, pp. 781-798, 1960.

表-1 非定常非白色雑音入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率
($h_s = 0.01, T_s = 0.5s, h_p = 0.05, T_p = 0.5s, h_g = 0.4, T_g = 0.5s, \alpha = 1, \beta = 0$)

δ_t	γ				
	0	0.01	0.02	0.05	0.1
1.5	0.969	0.996	0.999	1.000	1.000
2.0	0.527	0.842	0.927	0.979	0.992
2.5	0.114	0.397	0.581	0.803	0.906
3.0	0.014	0.105	0.214	0.449	0.645

表-2 非定常非白色雑音入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率
($\gamma = 0, T_s = 0.5s, h_p = 0.05, T_p = 0.5s, h_g = 0.4, T_g = 0.5s, \alpha = 1, \beta = 0$)

δ_t	h_s			
	0.01	0.02	0.05	0.1
1.5	0.969	0.964	0.977	0.987
2.0	0.527	0.526	0.613	0.712
2.5	0.114	0.118	0.165	0.240
3.0	0.014	0.016	0.025	0.045

表-3 非定常非白色雑音入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率
($\gamma = 0, h_s = 0.01, h_p = 0.05, T_s = T_p, h_g = 0.4, T_g = 0.5s, \alpha = 1, \beta = 0$)

δ_t	$T_s = T_p$			
	0.3s	0.5s	0.8s	1.0s
1.5	0.997	0.969	0.917	0.892
2.0	0.745	0.527	0.429	0.409
2.5	0.210	0.114	0.093	0.093
3.0	0.029	0.014	0.013	0.014

表-4 非定常非白色雑音入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率
($h_s = 0.01, T_s = 0.5s, h_p = 0.05, T_p = 0.5s, h_g = 0.4, T_g = 0.5s, \alpha = 1, \beta = 0.5$)

δ_t	γ				
	0	0.01	0.02	0.05	0.1
1.5	0.995	0.997	0.999	0.999	0.999
2.0	0.784	0.895	0.928	0.949	0.954
2.5	0.294	0.500	0.586	0.657	0.680
3.0	0.060	0.161	0.219	0.281	0.304

表-5 非定常非白色雑音入力を受ける付加構造物系の初通過破壊確率
($\gamma = 0, T_s = 0.5s, h_p = 0.05, T_p = 0.5s, h_g = 0.4, T_g = 0.5s, \alpha = 1, \beta = 0.5$)

δ_t	h_s			
	0.01	0.02	0.05	0.1
1.5	0.995	0.992	0.993	0.994
2.0	0.784	0.757	0.779	0.809
2.5	0.294	0.281	0.311	0.350
3.0	0.060	0.059	0.070	0.085