

# 因果性を有する地震波の 位相と振幅の関係について

本田 利器<sup>1</sup> · 澤田 純男<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

地震波等の波形のフーリエ変換は広く用いられている概念であるが、その位相と振幅スペクトルの関係については明らかでない点も多い。本検討では、離散化された時刻歴波形（複素信号または実数信号）が因果律を満たすことを条件とすることにより、位相とフーリエ振幅の間に成立する関係を定式化できることを示す。また、その定式化を用いて、位相の値のみから元波形を復元する手法を提案し、数値計算により妥当性を示す。さらに、数値シミュレーションにより、位相が変化することによる振幅スペクトルの変化について検討する。

**Key Words :** causality, phase, amplitude, signal synthesis

## 1. はじめに

地震波形の合成は、地震工学において重要な課題のひとつである。非定常過程である地震波の合成においては、地震動の周波数特性を表すフーリエ振幅と、時間的な変化を表す位相の両者を考えることが重要である。一方、これらは独立に決定されるものではない可能性も指摘されており、位相の情報から波形を合成する手法についての報告<sup>1)</sup>もある。

このような背景をふまえ、本研究では、離散信号波形を対象として、その波形が因果性を有するという条件を用いると、位相の情報のみから元波形を合成できる事を示し、また、位相の変化が波形の諸特性に与える影響についても検討する。

## 2. 位相からの波形合成方法

### (1) 因果性を有する時系列信号

長さ  $N$  ( $N$  は 2 の階乗) の離散時系列信号  $s_n$  ( $n = -N/2 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2$ ) を考える。そのフーリエ級数を  $S(\omega_n)$  とする。ただし、

$$\omega_n = \frac{2\pi n \Delta t}{N}$$

である。ここで、

$$S_n = |S(\omega_n)| \quad (S_n \geq 0) \quad (1)$$

$$\theta_n = \arg(S_n) \quad (-\pi < \theta_n \leq \pi) \quad (2)$$

とおく。時刻  $t_n = n\Delta t$  における信号の値は、

$$s_n = \sum_{j=-N/2+1}^{N/2} S_j \exp(i\omega_j t_n + \theta_j) \quad (3)$$

と表される。ここで、 $i$  は虚数単位を表す。

離散時系列の場合、因果性を有する時系列は、 $n = -N/2 + 1, \dots, -1$  について

$$s_n = 0 \quad (4)$$

を満たす信号と考えられる。

以下、この因果性に起因する条件を用いることにより、実信号及び複素信号について位相スペクトルのみから振幅スペクトルを算出することができることを示す。

位相は与えられているので、振幅スペクトルが算出されれば、時刻歴波形を合成することが可能となる。

### (2) 複素信号の場合

まず、対象とする時系列信号が複素数の場合について述べる。

式(3)を式(4)に代入し、実部、虚部それぞれが0となることを独立に記すと、 $n = -N/2 + 1, \dots, -1$  について

$$\sum_{j=-N/2+1}^{N/2} S_j \cos(\omega_j t_n + \theta_j) = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=-N/2+1}^{N/2} S_j \sin(\omega_j t_n + \theta_j) = 0 \quad (6)$$

となり、 $2(N-1)$  個の式が得られる。いま、位相  $\theta_n$  ( $n = -N/2 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2$ ) が既知であるとす

る。DC成分が0であるとして、 $S_0 = 0$ とすると、未知数は $2N - 1$ 個の $S_n$ となる。振幅の絶対値は求まらないため、ある整数 $M$ についてフーリエ振幅 $S_M$ は与えるものとする。この $S_M$ の項を右辺に移行すると、

$$\sum_{\substack{j=-N/2+1 \\ j \neq M}}^{N/2} S_j \cos(\omega_j t_n + \theta_j) = -S_M \cos(\omega_j t_n + \theta_M) \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j=-N/2+1 \\ j \neq M}}^{N/2} S_j \sin(\omega_j t_n + \theta_j) = -S_M \sin(\omega_j t_n + \theta_M) \quad (8)$$

が得られる。例えば、 $M = 1, S_M = 1.0$ とおくことができる。これは、 $2N - 1$ 個の未知数に対する同数の連立一次方程式になるので解くことができる。これを解くことにより振幅の情報が得られ、既知の位相情報とあわせることによりフーリエ振幅が算出される。これをフーリエ逆変換することにより時系列波形が得られる。

### (3) 実信号の場合

ここでは、対象とする時系列信号が実信号の場合について述べる。この時、

$$S(-\omega) = S^*(\omega) \quad (9)$$

(\*は複素共役を表す。)であるため、 $j = 1, \dots, N/2 - 1$ について、

$$\theta_{-j} = -\theta_j \quad (10)$$

となる。また、虚数部が0になることを示す式(6)は考えなくてよい。したがって、式(5)に相当する式のみを考慮すれば良く、これは

$$S_0 \cos(\theta_0) + \sum_{j=1}^{N/2-1} S_j \cos(\omega_j t_n + \theta_j) + S_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t_n + \theta_{N/2}) = 0 \quad (11)$$

となる。虚数部が0となることより

$$\sin(\theta_0) = \sin(\theta_{N/2}) = 0 \quad (12)$$

であることから、

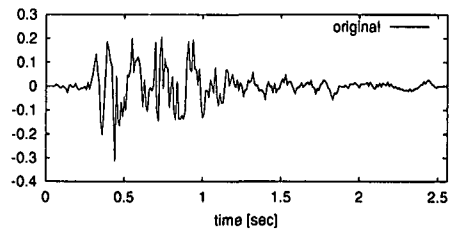
$$\theta_0 = \theta_{N/2} = 0 \quad (13)$$

としてよい。ここで、

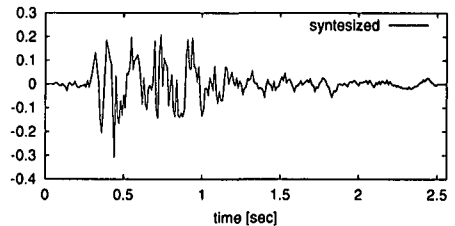
$$\omega_{N/2} t_n = n\pi \quad (14)$$

であること、及びDC成分を含まないと仮定して $S_0 = 0$ とすることを考慮すると式(11)は、

$$\sum_{j=1}^{N/2-1} 2S_j \cos(\omega_j t_n + \theta_j) + S_{N/2} \cos(n\pi) = 0 \quad (15)$$



(a) 元波形



(b) 合成波形

図-1 元波形と提案する手法で合成した波形(実信号)との比較

とかける。複素信号の場合と同様に、ある整数 $M$ についてフーリエ振幅 $S_M$ は与えるものとする、

$$\sum_{j=1, j \neq M}^{N/2-1} 2S_j \cos(\omega_j t_n + \theta_j) + S_{N/2} \cos(n\pi) = -2S_M \cos(\omega_M t_n + \theta_M) \quad (16)$$

が得られる。 $(M = N/2$ とした場合は別途適切な変形が必要となるが、その変形はほぼ自明であり、また、必要性も小さいのでここでは述べない。)以上により、 $N/2 - 1$ 個の未知数に対する同数の連立一次方程式が得られる。この解を用いて得られるフーリエ振幅を逆フーリエ変換することにより時系列信号が得られる。

### (4) 数値計算例

上記の手法を、兵庫県南部地震の時のポートアイランド記録に適用した結果を示す。元波形としては、強震記録をリサンプリングし、離散時間間隔 $\Delta t = 0.01$ 秒とみなして、データ数256とした実信号を、

$$\sum_n |s_n|^2 = 1 \quad (17)$$

となるように正規化したものを用いた。

元波形と、提案する手法による合成波を正規化した波形の比較を図-1に示す。同図から、元波形と合成波形が完全に一致していることが分かる。これは提案する手法の妥当性を示すものである。

## 3. 位相の変化が周波数特性に及ぼす影響

提案した手法を用いて、因果性を有する時刻歴波形の位相が変化することにより周波数特性が受ける影響

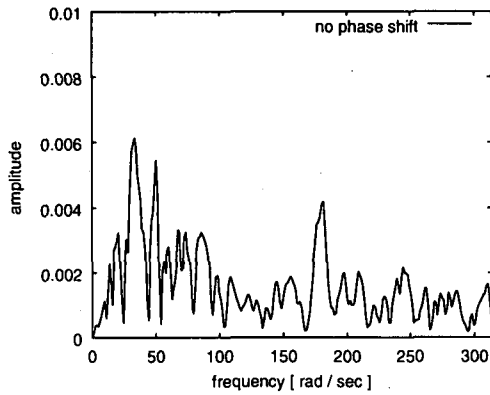
について検討する。周波数特性は振幅スペクトルにより評価する。

なお、位相の値については、これを直接与えるのではなく、群遅延時間を用いて定める。群遅延時間  $T_{gr}$  は、位相スペクトル  $\theta(\omega)$  を周波数  $\omega$  で微分することにより

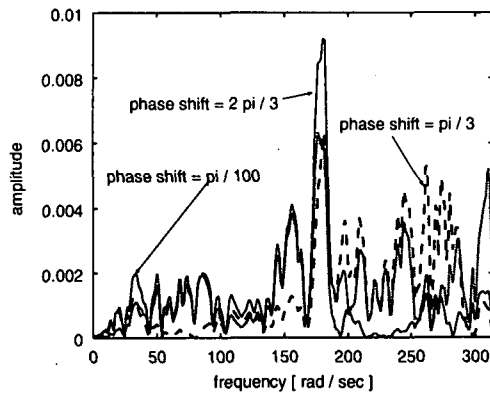
$$T_{gr}(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (18)$$

と与えられる。群遅延時間は、対応する周波数帯の振幅が大きくなる時間を与えるものと見なせ、地震動合成のシミュレーションでも用いられている<sup>1),2)</sup>。

### (1) 位相シフトの影響



(0) 位相シフトなし



(1) 位相シフトあり

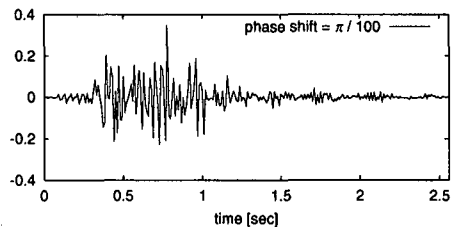
図-2 同一の群遅延時間を有する波形のフーリエ振幅

式(18)から、群遅延時間スペクトルを  $\omega$  で積分することにより位相スペクトル  $\theta(\omega)$  が

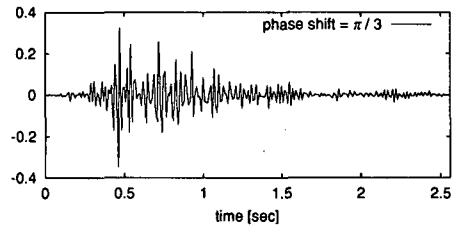
$$\theta(\omega) = \theta(0) - \int_0^\omega T_{gr}(v) dv \quad (19)$$

として求められることが分かる。この時の積分定数、すなわち、 $\theta(0)$  の値が与える影響について検討する。 $\theta(0)$  は、初期位相とも呼ばれる<sup>3)</sup>が、ここでは位相シフトと呼ぶ。

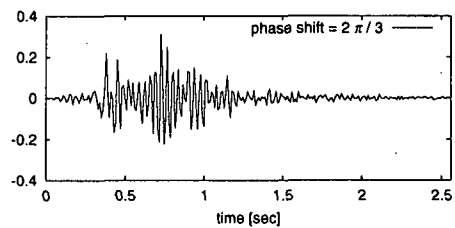
図-2(0)に、2.(4)で用いた波形の振幅スペクトルを示し、また、同図(1)に、同じ波形の位相を  $\pi/100, \pi/3$



(a) 位相シフト  $\pi/100$



(b) 位相シフト  $\pi/3$



(c) 位相シフト  $2\pi/3$

図-3 同一の群遅延時間を有する波の時刻歴

及び  $2\pi/3$  だけシフトさせた場合に算出される振幅スペクトルを示す。また、位相をシフトさせたそれぞれの場合について算出した時刻歴波形を図-3に示す。

図-2より、位相をわずか  $\pi/100$  だけ変化させた場合でも振幅スペクトルが大きく変化していることが分かる。位相を  $\pi/3, 2\pi/3$  だけ変化させた場合には、周波数特性は元波形と大きく異なるものとなっている。また、これにともない、時刻歴波形も大きく変化していることが図-3から分かる。

### (2) 群遅延時間の不確定性による影響

位相情報を規定する群遅延時間に不確定性がある場合の影響について検討した。

群遅延時間の期待値は元波形のそれと一致するものとする。また、群遅延時間は完全にランダムではなく、異なる周波数における値の相関関数が

$$C(\omega_1 - \omega_2) = T_0^2 \exp\left(-\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\pi b}\right) \quad (20)$$

と与えられるものとする。なお、 $b = 0.5, T_0 = 0.1[\text{sec}]$  とした。このような不確定性の影響について、試行回数 1,000 回のモンテカルロシミュレーションにより検討した。

シミュレーションで作成された波形の例の振幅の例

を図-4に、また、それらの時刻歴波形を図-5にそれぞれ示した。これらの図から分かるように、振幅や波形は群遅延時間の不確定性により大きく変化することが分かる。

モンテカルロシミュレーションにより求められたフーリエ振幅の平均及び分散を図-6に示す。

これらの図には、200回、500回及び1,000回を抽出して算出した平均や分散をプロットしている。これらの図より、統計的な性格は200回以上の試行で一定の値に収束していることを示している。収束値は図-2(0)に示される元波形の値とは大きく異なっており、高周波成分を多く含むスペクトルとなっている。(式(20)において、 $b$ や $T_0$ の値を変えた場合にも、同様の結果が得られた。)これは、群遅延時間がばらつきを有する際に、これをある特性を有する確率過程とみなしてシミュレートすると高周波成分を多く含む波形を生成する可能性が高いことを示唆していると考えられる。

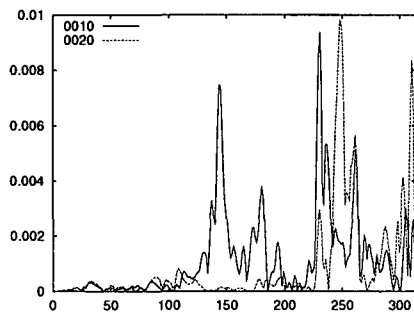
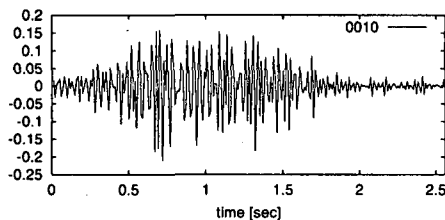
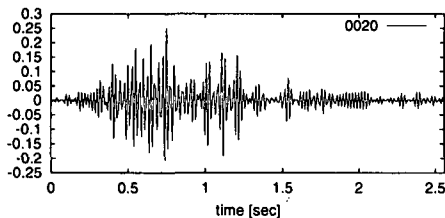


図-4 モンテカルロシミュレーションにより作成されたフーリエ振幅の例

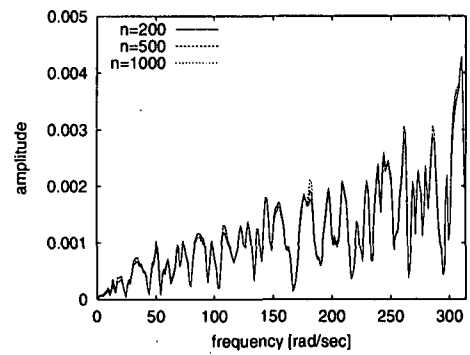


(a) ケース 0010

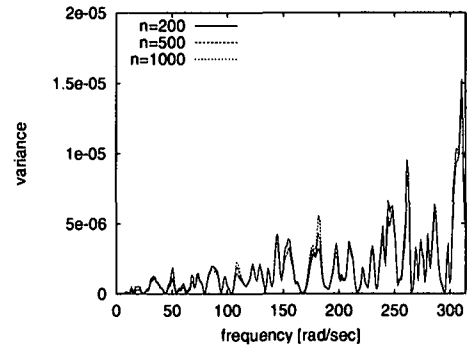


(b) ケース 0020

図-5 モンテカルロシミュレーションにより作成された波形の例



(a) 平均



(b) 分散

図-6 モンテカルロシミュレーションにより得られたフーリエ振幅の平均と分散

#### 4. おわりに

因果律を満たす時系列を対象として、位相特性の情報のみを用いて、振幅特性を算出し、時系列信号を算出できることを示した。提案する手法は実信号及び複素信号のいずれにも適用できる。

また、提案する手法を用いて、位相特性が振幅特性に与える影響について数値シミュレーションにより検討した。その結果、位相特性の変化は、振幅特性に大きく影響すること、位相特性を確率過程として波形を合成すると(群遅延時間に相関性を仮定しても)高周波成分が卓越する波形になる傾向がみられること、等が明らかになった。今後も位相と振幅の関係についてより詳細に検討をしていく予定である。

#### 参考文献

- 1) 佐藤忠信, 室野剛隆: 位相情報を用いた地震動のシミュレーション法, 土木学会論文集, No.675/I-55, pp.113-123, 2001
- 2) 澤田純男, 盛川 仁, 土岐憲三, 横山圭樹: 地震動の位相スペクトルにおける伝播経路・サイト特性の分離, 第10回日本地震工学シンポジウム論文集, Vol.1, pp.915-920, 1998
- 3) 木村正彦: 模擬地震動作成における波形制御について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第367号, pp.30-36, 1986