

成層弾性体の Green 関数のスペクトル表現 に関わる複素 Rayleigh 波モードの性質

東平光生¹

¹正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (〒278-8510 千葉県野田市山崎2641)

成層弾性体の Green 関数のスペクトル表現に寄与する放射条件を満足する複素 Rayleigh 波について考察を行っている。まず、複素 Rayleigh 極と共役複素数の関係にある波数も複素 Rayleigh 極としての性質があることを述べる。そして、固有関数とエネルギー積分も互いに複素共役の関係にある固有値からは、互いに複素共役の関係にある量が得られることを示す。そして、これより複素 Rayleigh 波は非伝播性の波動であることを導く。また、数値計算より複素 Rayleigh 波は震源直上で無視できない大きさを持つことを示す。以上を通して、成層弾性体の Green 関数のスペクトル表現に関わる複素 Rayleigh 波モードの性質を考察している。

Key Words : Green's function, elastic layered half space, spectral representation, complex Rayleigh wave modes

1. はじめに

成層弾性体の波動場の Green を計算することは、地震応答解析や地下資源探査といった問題の中で重要な課題である。著者はこれまで成層弾性体の波動場の Green 関数のスペクトル分解表示を示してきた¹⁾²⁾。そこでの目的は Green 関数の新たな計算手法の展開というよりもむしろ、Green 関数に寄与する留数項と分岐線積分の数学的な統一性を固有関数とエネルギー積分によって明らかにすることであった。

ごく最近になって著者は、Green 関数を直接波数積分した結果とスペクトル表現による結果を一致させるためには、なお permissible sheet 上に存在する複素 Rayleigh 波を考慮しなければならないことを見出した。複素 Rayleigh 波に関するこれまでの研究は、Haddon³⁾⁻⁵⁾らの論文に見られるように、permissible sheet の外に存在し、放射条件を満足しないものに対し多く行われており、著者の調べた限りにおいて、permissible sheet 上に存在する複素 Rayleigh 極に関する研究については、Watson⁶⁾らによって 2-D の成層波動場でその性質が論じられているに過ぎない。

こうした背景の下で、本論文は 3-D の成層波動場の Green 関数のスペクトル表現と permissible sheet にある複素 Rayleigh 極の関係を論じることを目的とする。特に、波数領域の Green 関数の正規モード極での留数と正規モードの関係がそのまま複素 Rayleigh 波モードに適用されること、複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であることの二つを示す。

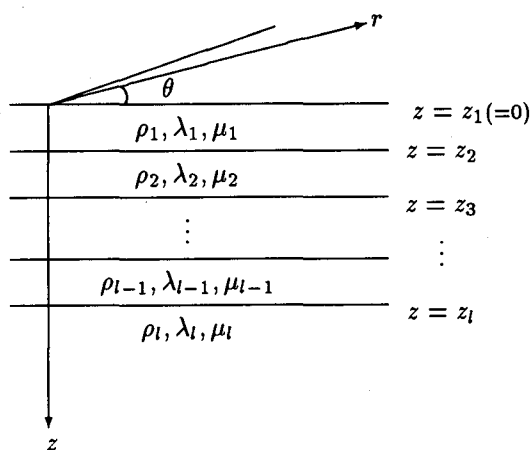


図-1 成層弾性波動場

2. 複素 Rayleigh 波モードを考慮した Green 関数のスペクトル表現

図-1に成層弾性波動場を示す。ここで、 ρ は質量密度、 λ および μ は Lamé の定数を示す。図-1に示すように、ここでは円筒座標系 (r, θ, z) を用い、鉛直座標 z は、鉛直下向きに正の方向をとる。また、自由表面の鉛直座標 z_1 は $z_1 = 0$ とする。

Aki and Richards のテキスト⁷⁾を参照すれば、この波動場の Green 関数を次のように誘導することはさほど難しくない。

$$G(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k H_k^m(r, \theta) g_k^m(z, z') dk \quad (1)$$

ここに、 m は円筒座標系 θ に関する Fourier 成分の次数、 k は波数、 $g_k^m(z, z')$ は波数領域の Green 関数で 3 行 3 列の行列の形式をとる。また、 H_k^m は波動の水平方向への伝播を記述する行列で、ここでは horizontal wave function と呼ぶ。この horizontal wave function の成分は次式であらわされる。

$$H_k^m(r, \theta) = \begin{bmatrix} Y_k^m(r, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{kr} \partial_r Y_k^m(r, \theta) & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) \\ 0 & \frac{1}{kr} \partial_\theta Y_k^m(r, \theta) & -\frac{1}{k} \partial_r Y_k^m(r, \theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし、

$$Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) \exp(im\theta)$$

であり、 J_m は m 次の第 1 種 Bessel 関数、 ∂ は下付き添え字のパラメータによる偏微分の演算子である。

また、波数領域の Green 関数は次の方程式の解である。

$$A_k g_k^m(z, z') = -\hat{f}^m \delta(z - z') \quad (3)$$

ここに、 A_k は微分演算子で、

$$A_k = L_k - k^2 D + \rho \omega^2 1 \quad (4)$$

であり、 A_k を構成する L_k および D は次のように与えられる。

$$L_k = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \partial_z^2 & -(\lambda + \mu) k \partial_z & 0 \\ (\lambda + \mu) k \partial_z & \mu \partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \partial_z^2 \end{bmatrix}$$

$$D_k = \text{diag.} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix}$$

また、 $\hat{f}^m$ は波数領域での外力場をあらわす。

複素 Rayleigh 波の性質を論じるために、 $g_k^m(z, z')$ の極の集合を σ_p とし、 $k_n \in \sigma_p$ に対する固有関数を $\varphi_n(z)$ で表す。そして、これに対するエネルギー積分を次のように定義する。

$$I_2 = \int_0^\infty \varphi_n(z)^T K_2 \varphi_n(z) dz \\ I_3 = \int_0^\infty \partial_z \varphi_n(z)^T K_3 \varphi_n(z) dz \quad (5)$$

ただし、式(5)の K_p ($p=2, 3$) は 3 行 3 列の行列であり、その成分は

$$K_2 = \text{diag.} \begin{bmatrix} \mu & (\lambda + 2\mu) & \mu \end{bmatrix} \\ K_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。

このエネルギー積分の定義によって、複素 Rayleigh 波モードを含めた形で次の定理を得る⁸⁾。

Theorem 1 $k_n \in \sigma_p$ とする。このとき、極 k_n における Green 関数の留数は次のように固有関数に分解される。

$$\text{Res}_{k=k_n} g_k^m(z, z') = \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z')^T}{2k_n I_2 + 2I_3} \hat{f}^m \quad (T.1)$$

ただし、 $\varphi_n(z)$ は固有値 k_n に対する固有関数である。

Theorem 2 $k_n \in \sigma_p$ とし、 $\varphi_n(z)$ をこの固有値に対する固有関数とする。このとき、 k_n の共役複素数 k_n^* も固有値であり、これに対応する固有関数は、 $\varphi_n(z)$ の複素共役ベクトル $\varphi_n^*(z)$ である。さらに、互いに複素共役の関係にある固有値のエネルギー積分も互いに複素共役の関係にある。

これら一連の定理ならびに著者が前論文¹⁾²⁾で示した分岐線積分核の固有関数への分解を考慮することで、複素 Rayleigh 波モードを含めた Green 関数のスペクトル分解表示が次のように得られる。

$$G(r, \theta, z) = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k_n \in \sigma_{pn}} k_n H_k^{m(2)}(r, \theta) \frac{\varphi_n(z) \varphi_n(z')^T}{k_n I_2 + I_3} \hat{f}^m \\ - \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_c} k H_k^{m(2)}(r, \theta) \Psi_k(z) [k I_2 + I_3]^{-1} \\ \times \Psi_k(z')^T |dk| \hat{f}^m \\ + \Lambda(r, \theta, z) + \Gamma(r, \theta, z) \quad (7)$$

ここに $H_k^{m(2)}(r, \theta)$ は horizontal wavefunction で、式(2)で用いる第 1 種 Bessel 関数の代わりに第 2 種 Hankel 関数を用いたものである。また、後で $H_k^{m(1)}(r, \theta)$ も現れるが、これには第 1 種 Hankel 関数を用いる。また、 $\Psi_k(z)$ は連続スペクトルに対する固有関数、 I_2 および I_3 は行列形式で与えられる連続スペクトルのエネルギー積分を示す。また、 σ_c は連続スペクトルであり、簡単に言えば、Riemann 面の cut 上の波数である。さらに $\Lambda(r, \theta, z)$ 複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与、 $\Gamma(r, \theta, z)$ は積分路 C_2 ならびに C_3 からの寄与で、horizontal wavefunction の特異性に基づく $k=0$ での留数項である。前論文¹⁾²⁾では $\Lambda(r, \theta, z)$ および $\Gamma(r, \theta, z)$ の二つの寄与が考慮されていなかった。複素 Rayleigh 波の Green 関数への寄与を固有関数で表現することで次式を得る。

$$\Lambda(r, \theta, z) = -\frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\xi_j \in \sigma_{pl}} \left[\xi_j^* H_{\xi_j}^{m(2)}(r, \theta) \frac{\hat{\varphi}_j^*(z) \hat{\varphi}_j^*(z')^T}{\xi_j^* \hat{I}_2 + \hat{I}_3} \right. \\ \left. - \xi_j H_{\xi_j}^{m(1)}(r, \theta) \frac{\hat{\varphi}_j(z) \hat{\varphi}_j(z')^T}{\xi_j \hat{I}_2 + \hat{I}_3} \right] \hat{f}^m \quad (8)$$

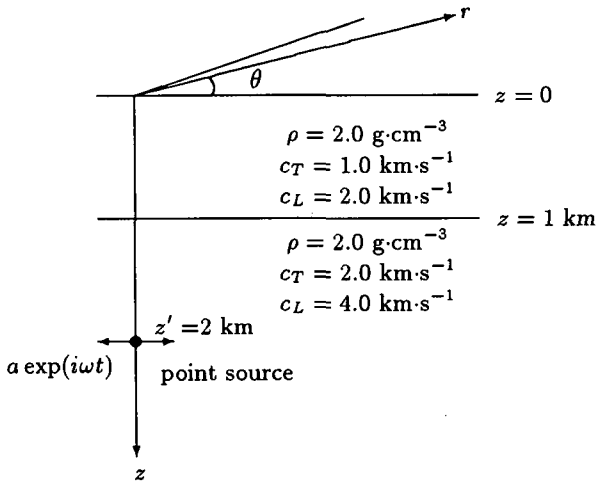


図-2 解析モデル

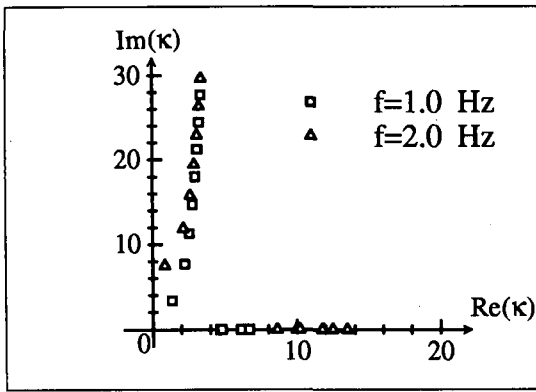


図-3 複素波数平面 (permissible sheet) における極の分布

ここに、 $\hat{\varphi}_j(z)$ は複素 Rayleigh 波モードであり、正規モードと区別するために、 $\hat{\cdot}$ の記号を付加した。また、 $\hat{I}_2$ および $\hat{I}_3$ は複素 Rayleigh 波モードのエネルギー積分である。また、Rayleigh 波モードおよびエネルギー積分に付けられた記号*は共役複素数を取るものであることに注意する。この複素 Rayleigh 波モードの寄与は Hankel 関数の性質に関する次の性質⁸⁾

$$H_\nu^{(1)}(z^*) = \left(H_\nu^{(2)}(z) \right)^* \quad (9)$$

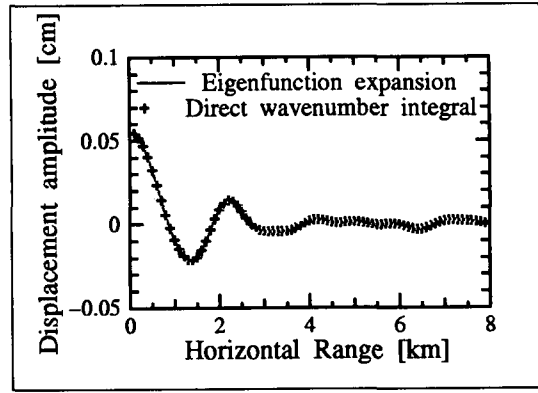
によって、

$$\text{Im} \{ A(r, \theta, z) \} = 0 \quad (10)$$

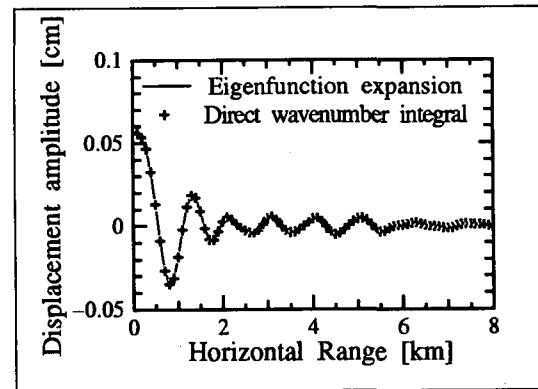
が導かれ、これより、複素 Rayleigh 波は、非伝播性の波動となることが示される。ただし、式(9)では、 z は複素変数、 ν は実数である。

3. 数値計算例

図-2 に数値計算のための2層からなる成層弾性波動場の解析モデルを示す。解析モデルでは、表面層の質量密度を $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P 波の速度を $2.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、



(a) $f = 1 \text{ Hz}$



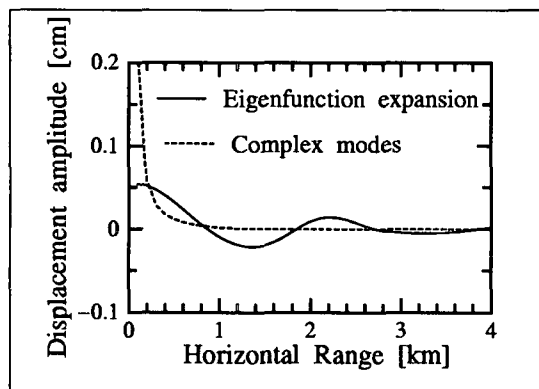
(b) $f = 2 \text{ Hz}$

図-4 直接積分とスペクトル表現による Green 関数の比較

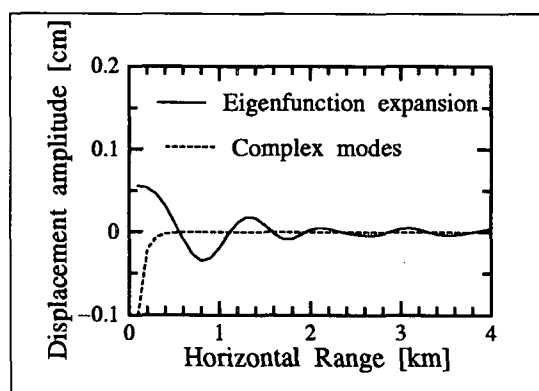
S 波の速度を $1.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ 、表面層厚を 1.0 km とする。また、半無限層の質量密度を表面層と同じ $2.0 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ 、P 波と S 波の速度を表面層の波動伝播速度のそれぞれ2倍の $4.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ および $2.0 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ とする。点振源は、地表面から 2.0 km の深さにとり、水平加振を考える。加振力の大きさは、 $1.0 \times 10^7 \text{ kN}$ とし、考慮する振動数は、 1.0 と 2.0 Hz の2種類とする。また、波動場の固有関数および特性方程式は伝達マトリックス法をベースに求めることにする。

まずはじめに、複素 Rayleigh 極の複素波数平面での分布の様子を示す。図-3に、複素波数平面の第1象限に分布する複素 Rayleigh 極および実軸上の正規モード極の位置を示す。図-3によれば、複素 Rayleigh 極は虚数軸に沿うように分布している。ここでは、 1 Hz と 2 Hz の振動数の結果についてしか載せていないが、複素 Rayleigh 極は絶対値が大きくなると、振動数によらず、同一の直線上にのってくるようである。

次に、Green 関数のスペクトル表現による結果と、Green 関数を直接波数積分した結果について比較したものを図-4に示す。これらの図の横軸は加振点からの



(a) $f = 1 \text{ Hz}$



(b) $f = 2 \text{ Hz}$

図-5 複素 Rayleigh 波モードの Green 関数への寄与

水平距離を示し、その軸の方向は加振力の方向と一致させている。ここでの変位の方向は radial 成分であり、変位は地表面上のものである。この図より Green 関数のスペクトル表現による結果と直接波数積分の結果はきわめて良い一致を示していることが分かる。これは Green 関数のスペクトル表現の妥当性を数値計算の上で示すばかりでなく、Green 関数のスペクトル表現に、複素 Rayleigh 波のモードと horizontal wavefunction の $k = 0$ の特異性の考慮が必要であることを示している。最後に Green 関数に寄与する複素 Rayleigh 波の様子を調べるために、Green 関数の値と複素 Rayleigh 波の振幅の比較を図-5 に示す。この図の横軸は、図-4 と同様に加振点からの水平距離であり、軸の方向は加振力の方

向と一致させている。この図によると、複素 Rayleigh 波は加振点直上付近で Green 関数の振幅と比して、非常に大きな振幅を示す一方、水平距離の増大によって急激に減衰する。

4. 結論

本論文では、複素 Rayleigh 波と Green 関数のスペクトル表現との関係を中心に検討を行った。そして、複素 Rayleigh 波が非伝播性の波動であること、Green 関数の振幅に比べ震源直上付近で非常に大きな振幅を持つことを明らかにした。また、Green 関数がエネルギー積分を介して正規モードに分解される形式がそのまま複素 Rayleigh 波モードに拡張されることも示した。Green 関数のスペクトル表現には、正規モードと分岐線積分からの寄与の他に放射条件を満足する複素 Rayleigh 波モードの寄与と horizontal wavefunction の $k = 0$ の特異性に基づく留数項を加えねばならず、直接的な Hankel 変換に基づく波数積分と比較して相当複雑な形式となる。しかしながら、これらの考慮によって、Green 関数の完全な固有関数展開の形式が得られると言える。

参考文献

- 1) 東平光生: 離散および連続スペクトルの固有関数を用いた成層弾性波動場の Green 関数の表現, 土木学会論文集, No.605/I-45, 171-185, 1998.
- 2) 東平光生: Hyperfunction の概念による成層弾性波動場の Green 関数の分岐線積分核の分解について, 土木学会論文集, No.640/I-50, 231-236, 2000.
- 3) Haddon, R. A. W.: Computation of synthetic seismograms in layered earth models using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 74, 1225-1248, 1984.
- 4) Haddon, R. A. W.: Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 76, 1755-1775, 1986.
- 5) Haddon, R. A. W.: Response of an oceanic wave guide to an explosive point source using leaky modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 77, 1804-1822, 1987.
- 6) Watson, T.H.: A real frequency, complex wavenumber analysis of leaking modes, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **62**, pp. 369-384, 1972.
- 7) Aki, K. and Richards, P.G., *Quantitative Seismology*, Freeman and Company, 1980.
- 8) 東平光生, 成層弾性波動場の Green 関数のスペクトル表現に寄与する放射条件を満足する複素 Rayleigh 波モードについて, 応用力学論文集 Vol.4 投稿中

(2001 年 5 月 25 日 受付)