

ディジタルフィルタを伴う時間積分法の特性

本田利器¹・澤田純男²

¹ 正会員 工修 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

² 正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

非線形地震応答解析のような時間領域の動的解析においては、しばしば高周波ノイズに起因する解の発散が問題となる。このような問題に対処するために、Wilson θ 法等の高周波成分に対して減衰を付加する効果のある時間積分手法が用いられている。筆者らは時間積分を行う過程の一環としてディジタルフィルタを施すことにより、高周波成分を除去する手法を提案したが、これは中央差分法に適用すると問題が生じるものであった。本論文では、この問題を回避し、同手法を中央差分法へ適用する場合の具体的な定式化を示すとともに、非線形地震応答解析例を示し、その適用性も示す。また、同手法を用いて算出される自由振動の周波数特性に基づき、同手法により実現されるフィルタリング特性を示す。

Keywords: Time integration scheme, Digital filter, Nonlinear analysis, Dynamic analysis, Central difference method

1 はじめに

時間領域における動的解析においては、解析の発散の回避は重要な課題である。解の発散は、アルゴリズムが増加傾向の指数関数を含む等、強い発散傾向を持っている場合も含めて、一般に高周波のノイズがトリガとなって引き起こされる場合が多い。したがって、いわゆる減衰に相当する効果を加えることにより解析の発散を防ぐことができる。このようなアルゴリズムによる減衰効果を加えることにより安定な時間積分を可能にする手法は、多様に提案されてきている。

広く使われている Newmark の β 法¹⁾ (において β を適切に定めた場合) や、Wilson の θ 法²⁾ 等はこのような高周波成分を除去する減衰効果を持つ時間積分法である。さらに、アルゴリズムの中で与える減衰の振動数特性 (周波数特性) を可変にしたり、Newmark の β 法の一般化をはかるなどして、より効率のよい減衰をあたえることを可能としたアルゴリズムも種々 (例えば³⁾⁴⁾) 提案されてきている。

このような背景に鑑み、筆者らは時間積分を行う過程においてディジタルフィルタにより高周波成分を除去できる手法 (ここでは「DFTI 法」とよぶ) を提案した⁵⁾。しかし、これは時間積分法として中央差分法を用いた場合には解析が不正確になるなどの問題を有するものであった。この問題は解決されることが明らかになったため、本論文では、これをふまえ、同手法を中央差分法へ適用する場合の定式化について述べる。また、同手法により実現されるフィルタリングの影響についても示す。

2 DFTI 法

2.1 手法の概要

まず、DFTI 法⁵⁾について簡単に述べる。同手法は、時間積分の過程において作用させるディジタルフィルタによって、高周波成分を除去するものである。DFTI 法では、状態量の時刻歴を表す時系列として、仮想的に、フィルタリングされた時系列とフィルタリングされていない時系列という2種類を考慮することにより、様々な高次のフィルタを作用させることを可能にする手法である。

フィルタを施した時系列 $\{\tilde{x}_n\}$ とフィルタを施していない時系列 $\{x_n\}$ を考える。ここで $\{x_n\}$ は運動方程式に含まれる状態量を全て含む必要があるため、変位のみではなく、速度、加速度、外力も含む。計算手順は次のようになる。まず、運動方程式を解く (時間積分を行う) ことにより $\{x_n\}$ を算出する。そして、ディジタルフィルタを施すことにより、 $\{\tilde{x}_n\}$ を

$$\tilde{x}_n = \sum_{i=0}^M a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N b_i \tilde{x}_{n-i} \quad (1)$$

と算出する。ここで、 $a_i (i=0..M)$ 、 $b_i (i=1..N)$ はフィルタの特性を決める係数である。なお、一般にディジタルフィルタは遅延時間を有しているため、時間積分においてその影響を考慮する必要がある。

DFTI 法では、 $\{x_n\}$ を時刻 $t = t_n + \tau$ (τ : フィルタの時間遅れ) における状態量と定義することにより、 $\{\tilde{x}_n\}$ に $t = t_n$ における値をもたせることを可能にしている。ディジタルフィルタの遅延時間を考慮した時間積分の方

法の概念図を図-1に示す。

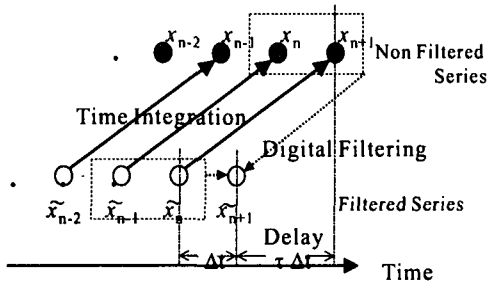


図-1 DFTI 法の計算手順の概念図

フィルタリングが解析に悪影響をおよぼさないためには、着目している周波数領域においてデジタルフィルタの振幅、遅延は周波数非依存である必要がある。このようなフィルタは、定振幅・定遅延フィルタとして、種々提案されている。ここでは、佐藤⁶⁾が提案した有理ジャンドルフィルタを用いる。これは IIR フィルタであり、比較的少ない項数で振幅、遅延ともに十分な平坦性を有している。また、関数形が陽に与えられているので係数の設定も容易である。有理ジャンドルフィルタは、項数 M, N および遅延時間 τ により定まる。

2.2 中央差分法における定式化

DFTI 法を時間積分法に適用する定式化について、中央差分法に適用する場合を例として示す。

対象とする系の運動方程式として

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = p(t) \quad (2)$$

と表される系を考える。ここで、 $x, p, [M], [C], [K]$ はそれぞれ、変位及び外力ベクトル、質量、減衰、剛性の各マトリクスである。中央差分法を用いれば、これは、

$$[M] \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} + [C] \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta t} + [K]x_n = p_n \quad (3)$$

と表される。ここで、 x_{n+1} 及び x_{n-1} はそれぞれ時刻 $t = t_{n+1}$ 及び $t = t_{n-1}$ における変位であり、これらは一般的な定式化においては、 x_{n+1} 及び x_{n-1} が用いられるものである。各時刻レベルで運動方程式を満たす必要があるため、中央差分法の場合、時刻 $t = t_n$ における状態を記述する変数として x_{n+1} 及び x_{n-1} を含む必要がある。しかし、DFTI 法では、例えば x_{n+1} は一般に x_{n+1} とは一致しない。そのため、時刻 t_{n+1} 及び t_{n-1} における変位を表す変数も、時刻 t_n における状態を表す変数として設けることになる。これらをそれぞれ x_{n+1}, x_{n-1} と表している。

時刻 $t = t_n$ から $t = t_{n+1}$ への時刻レベルの更新を例にとって、計算手順を具体的に示すと以下ようになる。まず、フィルタリングされた時系列の $t = t_n$ における状態量である $\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_n$ から、式 (3) に基づく一般的な時刻レベルの更新手続きにより、1 ステップ先の状態量 (ここでは変位) を算出し、これを $\tilde{x}_{n+2}$ とする。以下同様に、 $\tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_{n+2}$ から、 $\tilde{x}_{n+3}$ を算出する、というプロセスを合計 $\tau + 1$ 回繰り返す。なお、時刻 $t = t_n$ から $t = t_{n+1} + \tau$ までの時刻レベルの更新において外力 $p(t)$ は、該当する時刻レベルにおける外力 $p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+\tau}$ を用いる。これにより、このプロセスのすべての時刻レベルにおいて運動方程式 (3) が満たされることになる。ここで、 $\tilde{x}_{n+\tau}, \tilde{x}_{n+\tau+1}, \tilde{x}_{n+\tau+2}$ が、それぞれ $x_{n+1[-1]}, x_{n+1}, x_{n+1[+1]}$ となる。これは時刻 $t = t_n$ におけるフィルタリングされた状態量を初期状態にして算出された時刻 $t = t_{n+1} + \tau\Delta t$ における状態量である。この算出プロセスにおいてはフィルタリング等は行われていないのでこれらの状態量はフィルタリングされていない値に相当する。

このように求められた $x_{n+1[-1]}, x_{n+1}, x_{n+1[+1]}$ の各時系列にそれぞれ式 (1) に表されるデジタルフィルタを施すことにより、 $\tilde{x}_{n+1[-1]}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{x}_{n+1[+1]}$ が算出される。これらは時刻 $t = t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$ におけるフィルタリングされた値に相当する。

次に、この手法により求められた時刻歴が運動方程式を満たすことを示す。今、時刻 $t \leq t_n$ において $\tilde{x}_n, x_n$ の両者が運動方程式を満たしているとする。なお、外力 p_n についても、状態量と同じデジタルフィルタを作用させるものとし、フィルタリングされた時系列を $\tilde{p}_n$ とする。そして、フィルタリングされた時系列が満たす運動方程式では、外力はフィルタリングされた $\tilde{p}_n$ を用いる。この時、上述した更新プロセスから、時刻 $t = t_{n+1}$ におけるフィルタリングされていない状態量 x_{n+1} が運動方程式を満たすことは明らかである。また、時刻 $t = t_{n+1}$ における x_{n+1} については、外力項にフィルタリングされた $\tilde{p}_n$ を用いることにより、式 (3) の各項についてデジタルフィルタを施したものとなる。デジタルフィルタは時刻 $t \leq t_n$ における値の線形和である。したがって、フィルタリングされた状態量の運動方程式は、過去のすべての時点において満たされている運動方程式の線形和となるため、この運動方程式も成立することになる。これより、フィルタリングされた状態量も、フィルタリングされていない状態量もすべての時刻ステップにおいて運動方程式を満たすことが、帰納的に示される。

以上より、DFTI 法により算出される状態量 $\tilde{x}_n$ は全ての時間ステップにおいて運動方程式を満たしており、かつデジタルフィルタにより高周波数成分を除去された時系列を構成するものとなることが分かる。

なお、本手法はあくまで高周波成分を除去する効果のみを有するものであり、時間積分法の収束性を高めるものではないことには注意が必要である。

3 DFTI法の周波数特性

DFTI法により実現されるフィルタリングの周波数特性を示すため、Newmarkの β 法及びWilsonの θ 法の有する周波数特性と比較する。

時間積分法の周波数特性は、固有周期 ω を有する運動方程式

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4)$$

を時間ステップ Δt として得られる解の特性から知ることができる。

ここでは、DFTI法のフィルタリングによる影響のみを抽出するため、時間ステップの更新は、厳密解を用いることとした。この場合、

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

とおくと、時刻 $t = t$ における状態を初期条件とした場合の $t = t + \Delta t$ における系(4)の解は、

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\Delta t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega\Delta t) \\ -\omega \sin(\omega\Delta t) & \cos(\omega\Delta t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

と与えられる。ここで、時刻 $t = n\Delta t$ における変位を $x_n = x(t_n)$ のように書いて

$$\mathbf{x}(t) = \{\tilde{x}_n, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-1}, \dots, \tilde{x}_{n-N+1}, \tilde{x}_{n-N+1}, x_n, \dot{x}_n, x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, \dots, x_{n-M+1}, \dot{x}_{n-M+1}\}^T \quad (8)$$

とおき、また、

$$\mathbf{A}_{2(N+M) \times 2(N+M)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{(2 \times N)} & \mathbf{a}_{(2 \times M)} \\ \mathbf{I}_{2(N-1) \times 2(N-1)} & \mathbf{0}_{2(N-1) \times 2(M+1)} \\ \mathbf{T}(\Delta t)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(M+N-1)} \\ \mathbf{0}_{2(M-1) \times 2N} & \mathbf{I}_{2(M-1) \times 2(M-1)} \quad \mathbf{0}_{2(M-1) \times 2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

を定義する。ただし、

$$\mathbf{a}_{(2 \times M)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & a_M & 0 \\ 0 & a_1 & & 0 & a_M \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{b}_{(2 \times N)} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & b_N & 0 \\ 0 & b_1 & & 0 & b_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

である。また、下付き添字はマトリクスのサイズを示しており、 $\mathbf{I}, \mathbf{0}$ はそれぞれ、下付き添字で示されるサイズの単位マトリクス及び零マトリクスをあらわす。

これらを用いると、DFTI法により算出した式(4)の自由振動の解は、

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad (12)$$

から得られる。したがって、式(4)において $\mathbf{A}$ の i 番目の固有値を

$$\lambda_i(\omega) = \alpha_i + i\beta_i \quad (13)$$

とすると、式(12)の固有振動数 $\bar{\omega}_i$ 及びその減衰定数 $\bar{\xi}_i$ は

$$\bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_i / \Delta t \quad (14)$$

$$\bar{\xi}_i = -\text{Re}(\log(\lambda_i)) / \bar{\Omega} = -\ln(\alpha_i^2 + \beta_i^2) / 2\bar{\Omega} \quad (15)$$

$$\bar{\Omega}_i = \text{Im}(\log(\lambda_i)) = \tan^{-1}(\beta_i / \alpha_i) \quad (16)$$

と与えられる。固有振動数については、式(4)の有する固有周期 $T = 2\pi / \omega$ と式(12)の有する固有周期 $T'_i = 2\pi / \bar{\omega}_i$ から

$$\frac{T'_i - T}{T} \quad (17)$$

として評価できる。

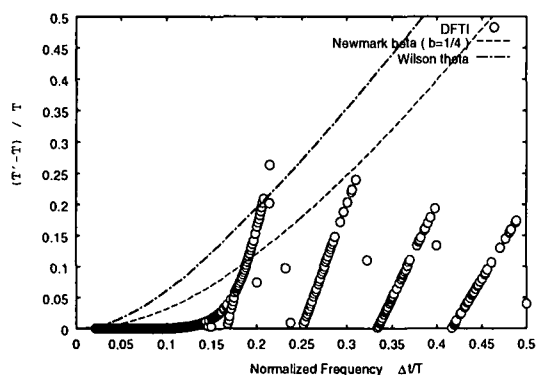
また、具体的な式はここでは示さないが、Newmarkの β 法及びWilsonの θ 法においても同様の考え方によりその周波数特性を知ることができる。

DFTI法において、 $N = 6, M = 10, \tau = 6$ とした有理ジャンドルフィルタを用いた場合、Newmarkの β 法において $\beta = \frac{1}{4}$ とした場合及びWilsonの θ 法において $\theta = 1.4$ とした場合のそれぞれについてその特性を検討した。図-2に、周期の評価精度、及び付加される減衰の周波数依存性を示す。同図(a)より、固有周期の精度においては、DFTI法は他の方法に比較して広い周期範囲で小さい値を示していることが分かる。これは、すなわち、運動方程式(4)の正確な固有周期を算定できることを示す。また、同図(b)より、減衰については、DFTI法は、Wilson θ 法に比較して、計算上重要となる低い周波数領域においては小さい値をとっており、ノイズ成分となる高周波数領域においては大きい減衰を与えるものとなっていることが分かる。(Newmarkの β 法は $\beta = 1/4$ では減衰を持たない。)

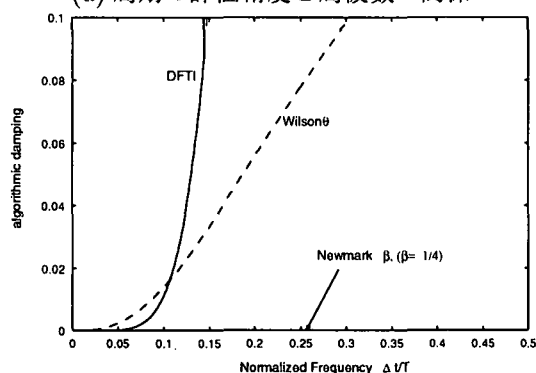
4 計算例

水平整層地盤を対象とした1次元非線形応答解析を行った。地盤は深度45mまでの非線形挙動をとる層とその下に位置する厚さ5mの線形挙動をとる層からなるものとし、厚さ1mごとに要素分割した。

非線形地盤の応力ひずみ関係はバイリニアとし、降伏応力はMohr Coulombの破壊条件に基づき与えた。入



(a) 周期の評価精度と周波数の関係



(b) 減衰と周波数の関係

図-2 DFTI 法, Newmark の β 法及び Wilson の θ 法の周期精度及び減衰の周波数依存性. 横軸は, 周波数を時間間隔 Δt を乗じることににより正規化したもの.

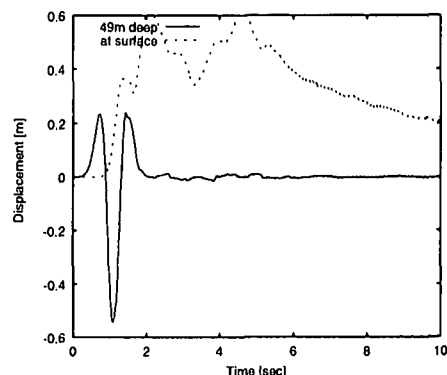
力波としてモデル底面に周期 1 秒の Ricker 波を与えた. また, 不安定な解析をシミュレートするために, 0.05Hz および 25Hz においてそれぞれ 0.02 および -0.02 となる高周波数領域において負になる減衰を与えた. 解析の積分時間間隔は $\Delta t = 0.01$ とした. デジタルフィルタとしては, $M=6$, $N=10$, $\tau=6$ とした有理ルジャンドルフィルタを用いた.

図-3 に, 深度 49m 及び地表における変位の時刻歴を示す. DFTI 法を用いていない解析においては負の減衰による高周波ノイズが卓越して解析は発散しているが, DFTI 法を用いた解析では安定的な解が得られていることが分かる.

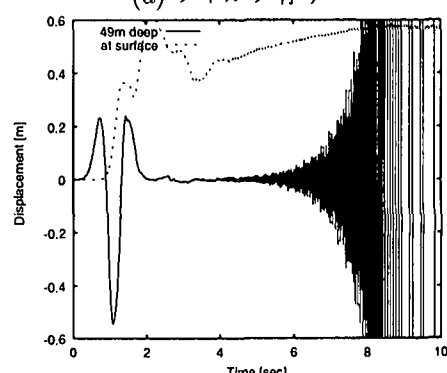
5 まとめ

デジタルフィルタを用いて高周波数成分を除去する時間積分法について, 中央差分法を例にとり, 適用するための定式化を示した.

また, 同手法により付加されるフィルタリング効果の影響を Wilson の θ 法等との比較により定量的に示した. 発散するノイズを含む地盤の地震応答非線形解析に適用し, 本手法を用いることにより, 高周波ノイズを除去した解析が可能となることを示した.



(a) フィルタ有り



(b) フィルタ無し

図-3 デジタルフィルタを用いた場合と用いていない場合の変位応答の時刻歴の比較

本手法は, フィルタの遅延時間の影響を考慮するために, 時刻レベルの更新における計算量が, 一般的な計算手法に比較して多い. 今後の課題として, より少ない計算量で必要なフィルタリング効果を得るための手法の開発があげられる.

参考文献

- 1) N.M. Newmark: A method of computation for structural dynamics, *ASCE Proc.* 85 (EM3), pp.67-94, 1959.
- 2) E.L. Wilson: A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, *SESM Report No.68-1*, University of California, Berkeley, CA, 1968.
- 3) C. Hoff and P.J. Pahl: Practical performance of the θ_1 method and comparison with other dissipative algorithms in structural dynamics, *Comput. methods appl. mech. eng.* 67, pp.87-110, 1988
- 4) J. Chung, G. M. Hulbert: A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation - the generalized- α method -, *J. applied mechanics, Transactions of ASME*, 60, pp.371-375, 1993.
- 5) 本田利器, 澤田純男: デジタルフィルタを内蔵した時間積分法, *応用力学論文集*, 1, pp.389-396, 1998
- 6) 佐藤正光: 有理ルジャンドルフィルタ - 減衰及び遅延平たんデジタルフィルタ -, *電子通信学会論文誌*, J59-A No.4, pp.327-332, 1976