

# 多点外力を受ける構造系の応答値を用いた 外力波形の同定

佐藤忠信<sup>1</sup>・原田俊崇<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 京都大学防災研究所教授

<sup>2</sup>学生会員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻

構造物に原因の分からないノイズ振動が複数作用している場合に、それらの振動の特徴、発生場所を特定することは重要である。そこで本研究では、このような複数の入力独立かつ多点入力すると仮定し、その時の構造系の応答値および構造系の動特性が既知という条件の下で入力波形を同定することを考える。その際用いる手法として、情報処理の分野で開発の進められている独立成分解析を利用し、線形8自由度構造モデルを対象とし、その適応性を検証する。その結果入力位置が既知であれば観測値にノイズが含まれる場合でも同定が可能であることが分かった。またノイズがない場合は入力数、位置が未知の場合でも、同定が可能であることが分かった。

**Key Words :** independent components analysis(ICA), identification

## 1. はじめに

構造物に原因の分からないノイズ振動が複数作用している場合に、それらの振動の特徴、発生場所を特定することは重要である。そこで本研究では、このような複数の入力独立かつ多点入力すると仮定し、その応答値から入力を同定することを考える。その際用いる手法として、情報処理の分野で考えられている独立成分解析を利用し、線形8自由度構造モデルでその適応性を検証する。また、最小二乗法による外力波形の同定も行う。ここで同定を行う際、構造系の動特性を既知として用いるために、あらかじめ適応型カルマンフィルターを用いて同定された値を用いる。

## 2. 最小二乗法による外力波形の同定

### (1) 最小二乗法の適用

本章では、逆解析でよく用いられる最小二乗法による外力波形の同定を考える。

一般に、各質点に外力が加わる場合の  $n$  自由度構造系の運動方程式<sup>1)</sup>は次式で表される。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  はそれぞれ  $(n \times n)$  の質量マトリックス、粘性係数マトリックス、剛性マトリックスであり、 $\mathbf{x}$  は構造物の地盤に対する相対変位、 $\mathbf{f}(t)$  は  $(n \times 1)$  の各質点に作用する外力をベクトル表示したものである。

次に、状態量  $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}(t)]^T$  として運動方程式を書き換えると次式のような状態方程式が得られる。

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (2)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

とする。そして、(2)式を離散時間系で表すと次式のようになる<sup>2)</sup>。

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{f}(t) \quad (4)$$

ここで、サンプリング時間を  $T$  とすると、

$$\mathbf{P} = \Phi(T) = \exp(\mathbf{A}T) \equiv \mathbf{I} + \mathbf{A}T \quad (5)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}[\Phi(T) - \mathbf{I}]\mathbf{B} \quad (6)$$

で表される。

また、観測量と状態量の関係を表す観測方程式は次式で表される。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{y}$  は観測ベクトル、 $\mathbf{C}$  は観測行列、 $\mathbf{z}$  は状態量ベクトル、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$  はそれぞれシステム行列、入力行列、 $\mathbf{f}$  は入力ベクトルである。そして、式(4)、(7)より得られる次式を考える。

$$\{\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}(t)\} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\{\mathbf{f}(t)\} \quad (8)$$

上式の左辺と右辺の行列  $\mathbf{C}\mathbf{Q}$  が既知量、入力ベクトル  $\mathbf{f}$  を未知量として最小二乗法を適用し、入力ベクトル  $\mathbf{f}$  を同定する。すなわち式(8)で左辺のベクトルを  $\mathbf{a}(t)$ 、 $\mathbf{C}\mathbf{Q}$  を観測行列  $\mathbf{H}$  として、

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{H} \mathbf{f}(t) \quad (9)$$

と見ると、ベクトル  $\mathbf{f}(t)$  は次式のように求まる。

$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{a}(t) \quad (10)$$

この式を用いて入力波形の同定を行う。

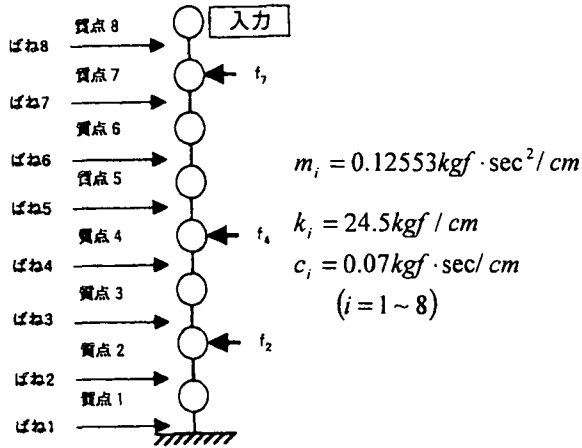


図1 解析モデルおよび諸元

## (2) 解析結果および考察

解析モデルとしては図1に示される線形8自由度構造系を用いる。質点2、4、7の3点に周波数帯域の異なるピンクノイズが外力として作用しており、構造系の動特性（減衰定数  $h$ 、固有円振動数  $\omega$ 、質量  $m$ ）が既知であり、全ての質点での速度、変位応答が観測されているとする。ただし、動特性（減衰定数  $h$ 、固有円振動数  $\omega$ ）は事前にカルマンフィルターで同定した値を用いるため10%程度の誤差があり、観測値については、入力に対して応答計算を Newmark  $\beta$  法によって行い、観測値の標準偏差の1%の標準偏差をもつホワイトノイズを付加している。なお、時間刻みは0.01秒で、1000ステップを考える。このような条件の下で、数値解析を行う。図2は入力のあった質点2、4、7における同定された入力波形と真の入力波形の比較を示しており、細線が真の入力波形、太線が同定波形である。図2より、入力波形が精度よく同定されることが分かる。なお、質点2、4、7以外での同定波形はほぼゼロであるのでここでは省略している。これより、応答値にノイズが含まれる場合でも同定が可能であることが分かった。

## 3. 独立成分解析による外力波形の同定

### (1) 独立成分解析<sup>3)</sup> (Independent Component Analysis)

本章では、独立成分解析による外力波形の同定を考える。ここで独立成分解析とは、いくつかの独立な情報源があり、これらの信号の混合したものが観測される場合に、こうした混合信号を解析して、元の信号を分離し同

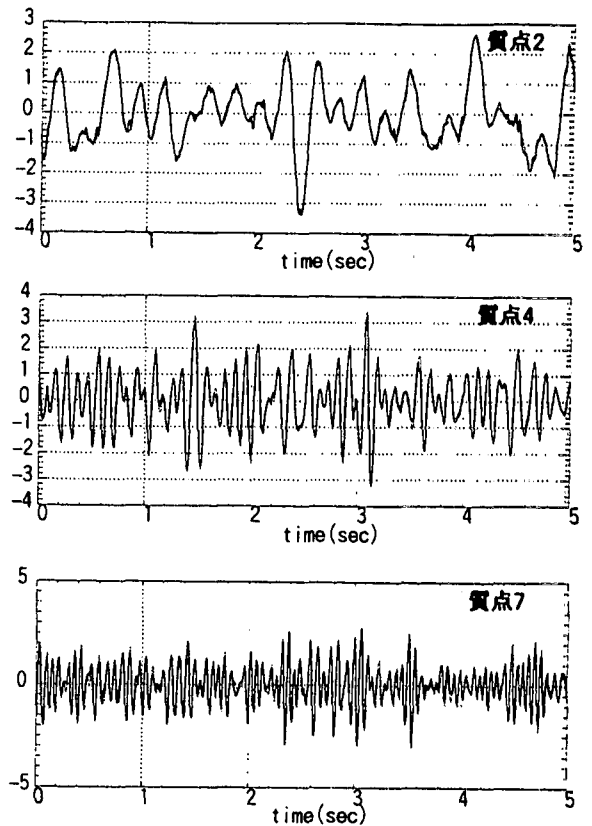


図2 最小二乗法による同定波形と入力波形の比較

定する手法であり、観測される混合信号だけから元の独立な元信号を同定できるという特徴がある。

今、 $n$  個の情報源があるものとし、それぞれが時刻  $t$  に  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)$  の信号を発信するものとする。ただし、時刻  $t$  は離散であり、 $t = 1, 2, \dots$  とし、各  $s_i(t) \{i = 1, 2, \dots, n\}$  は定常で時間的に独立であるとする。 $s_i(t)$  をベクトル表示して、

$$\mathbf{s}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\} \quad (11)$$

ここで時間的に独立な場合、ベクトル信号  $\mathbf{s}(t)$  の確率密度関数  $p(\mathbf{s})$  は次式で表される。

$$p(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n p_i(s_i(t)) \quad (12)$$

ただし、 $p_i(s_i(t))$  は  $i$  番目の信号  $s_i(t)$  の確率密度関数である。また  $s_i(t)$  の平均は0と仮定する。時刻  $t$  に観測される信号は、式(11)で表される信号が混ざり合ったものとし、 $m$  個 ( $m \geq n$ ) の観測点における信号  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  として観測されたとすると、

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n A_{ij} s_j(t) \quad (13)$$

と表現できる。ここで行列を用いて書きなおすと、

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad (14)$$

ただし、 $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_m(t)\}^T$  ( $m \times 1$ ) であり、 $\mathbf{A}$  は ( $m \times n$ ) の混合係数行列であり、時間的に不変であるとする。

この時、独立な元信号ベクトル  $\mathbf{s}(t)$  と混合係数行列  $\mathbf{A}$  が未知で、観測信号  $\mathbf{x}(t)$  だけが得られたとして、元の独立な信号  $\mathbf{s}(t)$  を推定するために簡単な線形システムを考える。

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t) \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}^T$  は  $\mathbf{s}(t)$  の推定値であり、出力ベクトルとする。 $\mathbf{W}$  ( $n \times m$ ) は分離行列である。この信号  $\mathbf{y}(t)$  の各成分が互いに独立となるように行列  $\mathbf{W}$  を学習的に更新していく。その際、以下の学習アルゴリズム<sup>4)5)6)</sup>を用いる。

$$\mathbf{W}(t+1) = \mathbf{W}(t) + \eta(t) \{ \mathbf{I} - \phi(\mathbf{y}(t))\mathbf{y}(t)^T \} \mathbf{W}(t) \quad (16)$$

ここで、 $\eta(t)$ ,  $\phi(\mathbf{y})$  はそれぞれ学習率、評価関数である。ただし、 $n$  個の混合信号  $\mathbf{x}(t)$  から  $n$  個の独立な信号  $\mathbf{y}(t)$  が抽出できたとしても、その順列、および大きさに関する不確定性は残る。

## (2) 独立成分解析の適用

独立成分解析への適用であるが、ここでは最小二乗法のとときと同様に、運動方程式から得られる状態方程式と観測方程式より得られる式(8)を用いる。

$$\{\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}(t)\} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\{\mathbf{f}(t)\} \quad (17)$$

ここで、式(17)の左辺を観測信号  $\mathbf{x}(t)$ 、右辺の  $\mathbf{C}\mathbf{Q}$  を混合係数行列  $\mathbf{A}$ 、入力ベクトル  $\mathbf{f}(t)$  を独立な信号  $\mathbf{s}(t)$  と見ることにより、独立成分解析を適用する。

## (3) 解析結果および考察

### a) 入力数が既知の場合

解析モデル、条件については、最小二乗法を用いた入力波形の同定のとときと同じものとする。本章で用いるモデルの場合、8 自由度に対して 3 点入力なので、観測量ベクトル  $\mathbf{y}(t)$  の成分を 3 つ選ぶ必要がある。そこで、観測量として入力位置である質点 2、4、7 の速度応答を選んだ場合と、観測量を質点 1、5、8 の速度応答とした場合について解析を行う。ここで、前者はあらかじめ入力位置が分かっている場合を想定しており、それに対して後者は、入力位置が未知の場合に観測位置をランダムに選択した場合を想定している。解析結果はそれぞれ図 3、図 4 であり、それぞれ入力のある質点 2、4、7 における

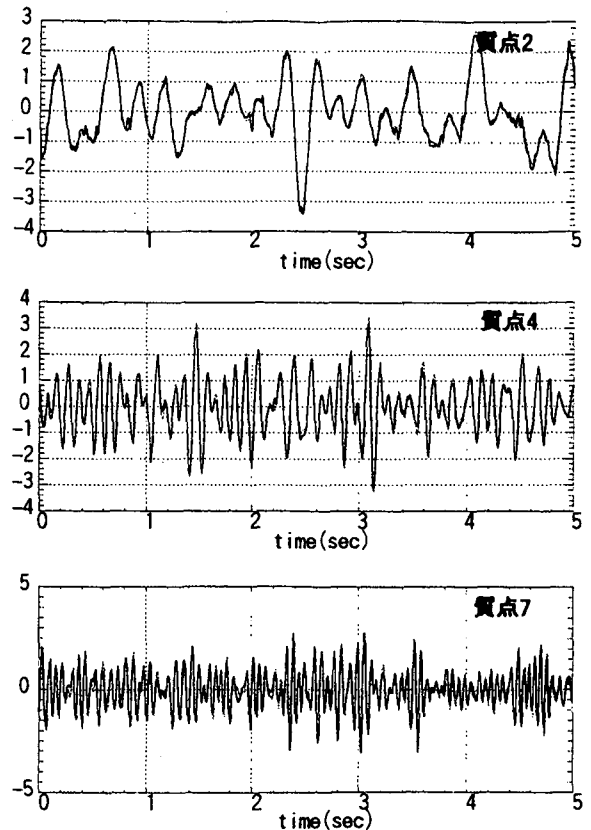


図3 ICAによる同定波形と入力波形の比較 (正規化したもの) <観測位置 質点2、4、7>

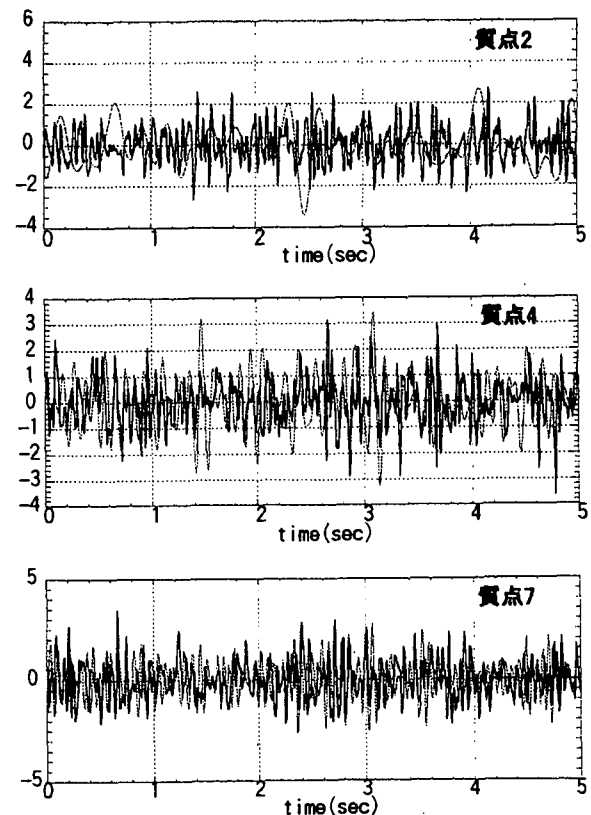


図4 ICAによる同定波形と入力波形の比較 (正規化したもの) <観測位置 質点1、5、8>

—— 既の入力波形  
—— 同定波形

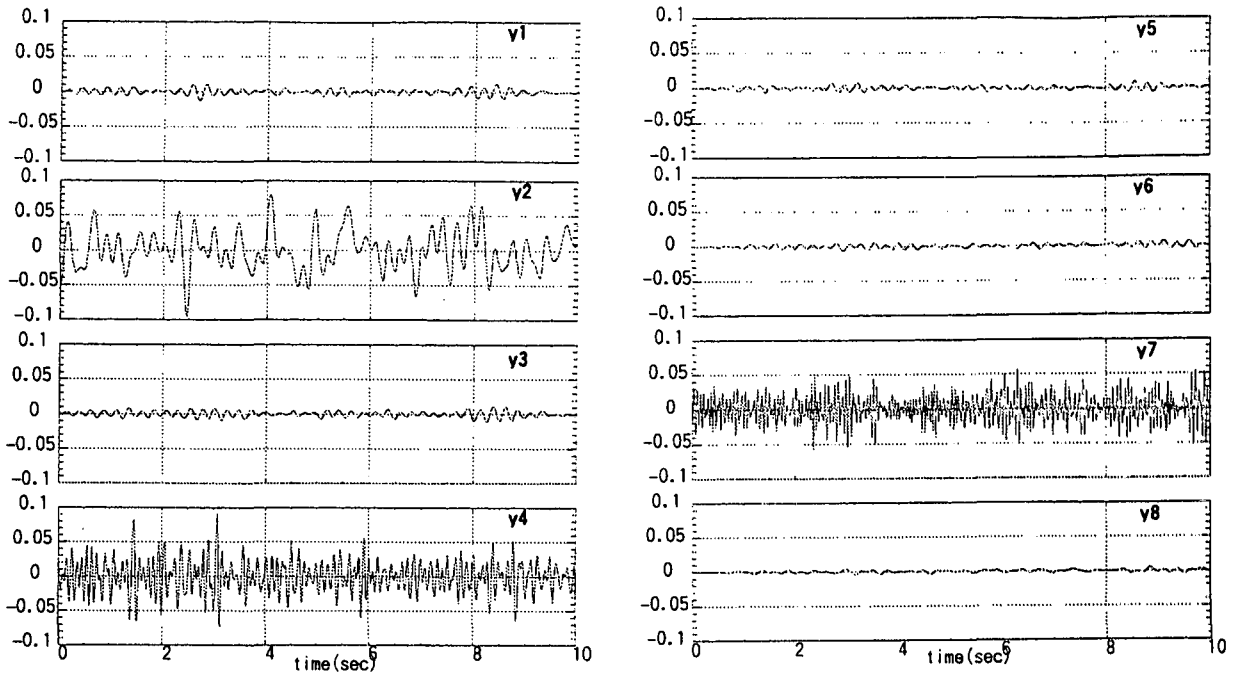


図5 入力数が未知の場合の各成分の同定波形

同定された入力波形と真の入力波形をそれぞれ標準偏差が1となるように正規化した波形の比較である。ここで、細線が各質点での真の入力波形、太線が同定波形を示している。図3より、入力位置が既知の場合は、入力波形が精度よく同定されることがわかる。しかし、図4より入力位置が未知の場合は、同定されないことが分かる。これについては、観測量にノイズが含まれない場合も同様の結果が得られており、ノイズの影響よりも3点の選び方が同定に大きく影響することが分かった。

#### b) 入力数が未知の場合

a)と同様のモデルを考えると、入力数が未知の場合、入力数は最大8個なので入力ベクトル $\mathbf{f}(t)$ を $\{8 \times 1\}$ とする。そして、観測量ベクトル $\mathbf{y}(t)$ の成分として全質点の速度応答を取り、観測量にノイズが含まれない場合とノイズ(1%)が含まれる場合の2種類について解析を行う。結果はノイズが含まれない場合についてのみ図5に示す。図5は $\{8 \times 1\}$ の出力ベクトル $\mathbf{y}(t)$ の各成分であり、入力ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に対する同定波形となっている。これを見ると、実際に入力のあった位置に卓越した波形が得られており、真の入力波形と比較した結果再現ができていることが分かった。しかし、観測量にノイズが含まれる場合は全く同定されないという結果が得られた。この結果、観測値にノイズが含まれない場合には、入力数が未知の場合でも、その数、位置および波形の同定が可能であることが分かった。

#### 4. 結論

最小二乗法を用いた外力波形の同定の場合、減衰定数、および固有円振動数に10%程度の誤差があり、観測値にノイズ(1%)が含まれている場合でも、外力波形の同定が

できた。また、独立成分解析を用いた場合は、同様の条件で入力位置が既知の場合に外力波形の同定ができた。そして、入力数、位置が未知の場合でも、観測値にノイズが含まれない場合は同定が可能であった。また、この結果からはノイズが含まれる場合の独立成分解析による手法については、よい結果が得られなかったが、式(16)における評価関数、学習率についてより考察することにより、ノイズが含まれる場合でも、同定ができる手法を考えることが今後の課題である。

#### 参考文献

- 1) 柴田明徳：最新耐震構造解析，森北出版，1981
- 2) 金原昭臣，黒須茂：ディジタル制御入門，日刊工業新聞社，1990
- 3) 甘利俊一：聖徳太子かカクテルパーティーか，科学，岩波書店，Vol. 67, No. 9, pp. 648-652, Sep, 1997
- 4) S. Amari, A. Cichocki and H. Yang : A new learning algorithm for blind signal separation, Advances in Neural Information Processing Systems, 8, pp 757-763, 1995.
- 5) S. Amari, T. P. Chen and A. Cichocki : Stability analysis of adaptive blind source separation , Neural Networks , 1997.
- 6) H. Yang, S. Amari : Adaptive online learning for blind separation: maximam entropy and minimum mutual information, Neural Computation, 9, pp.1457-1482, 1997.
- 7) S. Amari, A. Cichocki : Adaptive blind signal processing- Neural network approaches , Proceeding of the IEEE , Vol. 86, No. 10, pp. 2026-2048, OCTOBER 1998.