

簡易な地盤振動モデルによる不整形な地盤の 増幅特性の分析

鈴木崇伸¹

¹ 正会員 工博 東洋大学助教授 工学部環境建設学科 (〒350-8585 川越市鯨井 2100)

不整形な地盤における揺れの増幅の問題ではいろいろな数値解析法による分析が一般的であるが、本研究では地盤震動の数値モデルを連結振り子で近似して解析を行った。単純化したモデルについて解析的に分析したところ、振り子の基本振動数によって決まる特定の周波数帯域で、指数関数波と三角関数波が混在する条件となり、三角関数波となる領域では束縛されたモード形での共振や、指数関数波領域からの波動の流れ込みが起こることが判明した。

Key Words : irregular layers, magnification of ground motion, connected mass-spring model, analytical calculation

1. はじめに

成層構造をなさない不整形な地盤では、地震の揺れが増幅されて大きくなることが多くの研究者によって指摘されている。揺れの増幅に関する研究では、差分法、有限要素法、境界要素法などの数値解析が一般的に用いられているが、設計実務に反映させるにはより簡略化したモデルで増幅のメカニズムに関する分析が必要と考えられる。本研究では小長井他によるバネマス置換モデルを発展させて、2次元SH波解析を1次元のモード解析に変換する方法を提案する。1次元の常微分方程式に置き換えることにより、解析解の基本的な特性の分析を行うことができ、増幅のメカニズムを説明できる。

2. 地盤の振動方程式の簡略化

2次元SH波の微分方程式を式(1)に示すが、地表付近に堆積層のある地盤構造を考えると水平方向 x の拡がりに比べて鉛直方向 z の厚さは小さく、鉛直方向での2次以上の固有振動は無視しうる。そこで鉛直方向の運動を角振動数 ω_0 の振動子で近似して、式(2)の形に変数分離する。式(2)を式(1)に代入して整理すると $X(x)$ に関する常微分方程式(3)が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$u(t, x, z) = X(x) \sin \left(\frac{\omega_0}{c} z \right) e^{i\omega t} \quad (2)$$

$$X'' + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} X = 0 \quad (3)$$

運動モデルのイメージを図-1に示すが、鉛直方向の運動は地盤の質量とばねによる振り子であらわれ、さらに水平方向にもばねでつながれた連結振り子のモデルとなる。適当な間隔で要素分割を行えば簡単に差分方程式に置き換えられるが、ここでは単純化した地盤モデルを前提として、解析的な分析を行う。

この方程式は角振動数によって基本解の形が変化し、角振動数が小さい $\omega < \omega_0$ の条件では指数関数、角振動数が大きい $\omega > \omega_0$ の条件では三角関数となる。指数関数の場合、発散しない条件の解が当てはまるが、単調に変化する関数形であり、周期運動が起こらず振り子に起こった運動を減衰させる。三角関数の場合、水平方向にも周期運動が起こることになり、周期外力に対して横方向にも運動を伝える。 ω_0 が空間的に変化する条件の場合には、ある周波数帯域で運動を減衰させる区間と横方向に運動を伝える区間が現れることになり、鉛直方向の運動を近似した振動子の共振以上の揺れが生じる可能性がある。

る。その様子を水平方向の振動モードを分析することにより定量化する。

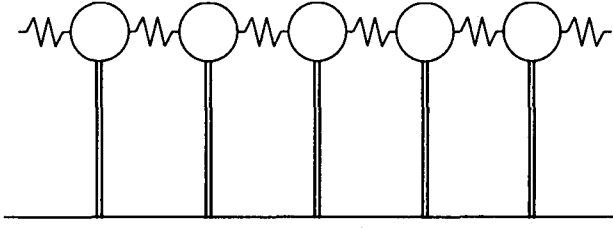


図-1 簡略化した地盤のモデル図

3. 硬軟地盤が接するケース

波動の位相速度が小さい軟弱な層と位相速度が大きい硬い層が接している地盤モデルを考える。軟弱な層の位相速度を c_1 、振動子の固有振動数を ω_1 、硬い層の位相速度を c_2 、振動子の固有振動数を ω_2 とする。上記の条件より $c_1 < c_2$ 、 $\omega_1 < \omega_2$ とする。それぞれの層での水平方向の振幅変化を X_1 、 X_2 であらわすと微分方程式は式(4)であらわされる。

$$\begin{cases} X_1'' + \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{c_1^2} X_1 = 0 & x < 0 \\ X_2'' + \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{c_2^2} X_2 = 0 & 0 < x \end{cases} \quad (4)$$

(1) $\omega < \omega_1$

この条件のときには軟弱な層、硬い層ともに指数関数が基本解となる。基盤加振によって振り子に生じた運動は横方向には伝わらず、それぞれの領域で同位相の振り子の運動が発生する。この振動数領域では地盤の 1 次元的な応答と差異はほとんどないことになる。

(2) $\omega_1 < \omega < \omega_2$

この条件のときには軟弱な層では三角関数、硬い層では指数関数が基本解となる。式(5)のように置き換えて微分方程式を解くと解は式(6)となる。

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}}{c_1}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{\omega_2^2 - \omega^2}}{c_2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} (-A \sin \lambda_1 x + \cos \lambda_1 x) \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} e^{-\lambda_2 x} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{ただし } A = \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_2}{\rho_1 c_1^2 \lambda_1}$$

軟弱な領域 1 の基本振動数で加振したときには $A = \infty$ となるが、これは運動の減衰を考慮していないためである。モード形は入力振動数 ω によって変化するが、一例を図-2 に示す。2 種類の媒質の境界 $x = 0$ において三角関数と指数関数が接合された形状となり、境界での値は入力振動数によって変化する。

この周波数帯域では、2 つの特徴的な運動が発生する。1 つは領域 1 で横方向に伝播する運動は「壁」のようにふるまう境界によって反射される点であり、これは位相速度が遅い媒体から速い媒体に入射する場合に反射係数で説明できる。あと一つは領域 2 の運動が領域 1 に向けて伝えられる点である。領域 1 の振り子の基本振動数 ω_1 から入力振動数を徐々に大きくしていくと、領域 1 では共振条件から離れていく条件となり、領域 2 では共振条件に近づく条件となる。領域 2 では運動が横方向には伝わらず、領域全体が同位相で運動する。このとき両者の境界では領域 2 の運動が強制外力として領域 1 に伝えられる。すなわち、領域 2 の共振の影響が領域 1 におよび、振幅を増大させることになる。 $\omega \rightarrow \omega_2$ の条件を考えると、 $A \rightarrow 0$ となり、境界の振幅が 1、領域 1 での振幅も 1 となるが、領域 2 の揺れがそのまま領域 1 にも伝わることになる。

実際には減衰の影響により、以上 2 点述べた影響が無限遠まで伝播されることはないが、境界から領域 1 側に数波長程度は減衰しながらも増幅されると考えられる。

(3) $\omega > \omega_2$

この条件のときには軟弱な層、硬い層ともに三角関数が基本解となる。軟弱な領域 1 の振り子の基本振動数から入力振動数が離れる条件であるために、領域 1 での振幅は小さくなる。領域 2 の揺れに連成する振動も起こるが、高振動数であり、減衰しやすいことを考えれば、前述の(2)の条件に比べると影響は小さいと考えられる。

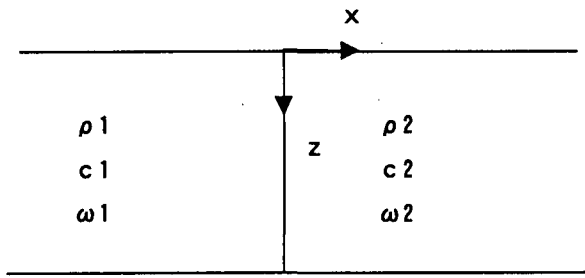


図-2 硬軟地盤が接するケースのモデル

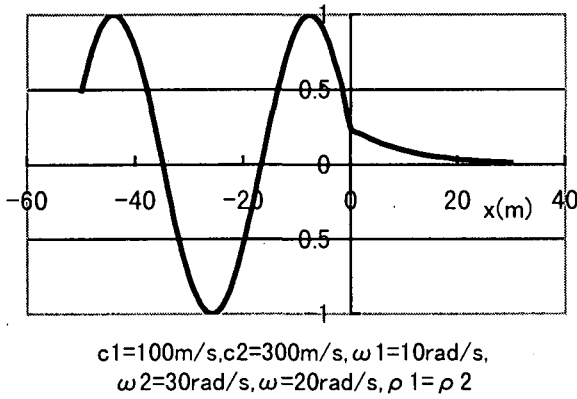


図-3 硬軟地盤が接するケースの振幅分布の例

4. 硬い層に両側を囲まれた軟弱層

次に波動の位相速度が小さい軟弱な層が両側で硬い層に囲まれている地盤モデルを考える。図-4 に計算モデルを示しているが、前章と同様に軟弱な層の位相速度を c_1 、振動子の固有振動数を ω_1 、硬い層の位相速度を c_2 、振動子の固有振動数を ω_2 とする。それぞれの層での振幅変化を X_L 、 X_C 、 X_R であらわすと $\omega_1 < \omega < \omega_2$ のときの微分方程式は式(7)であらわされる。

$$\begin{cases} X_C'' + \lambda_1^2 X_C = 0 \\ X_L'' - \lambda_2^2 X_L = 0 \\ X_R'' - \lambda_2^2 X_R = 0 \end{cases} \quad (7)$$

ただし、 λ_1, λ_2 は式(5)と同じである。この問題の場合は固有振動数が求まり、振動数方程式は式(8)となる。方程式の左の項は原点 $x=0$ に対して点対称なモードの振動数に対応し、右の項は $x=0$ に対して線対象なモードの振動数に対応する。

$$\left(\tan \lambda_1 L + \frac{\rho_1 c_1^2 \lambda_1}{\rho_2 c_2^2 \lambda_2} \right) \left(\tan \lambda_1 L - \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_2}{\rho_1 c_1^2 \lambda_1} \right) = 0 \quad (8)$$

固有振動数にもとづいてモード関数を求めると、式(9)と式(10)となる。

$$\begin{cases} X_C = \cos \lambda_1 x \\ X_L = e^{\lambda_2(x+L)} \cos \lambda_1 L \\ X_R = e^{-\lambda_2(x-L)} \cos \lambda_1 L \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} X_C = \sin \lambda_1 x \\ X_L = -e^{\lambda_2(x+L)} \sin \lambda_1 L \\ X_R = e^{-\lambda_2(x-L)} \sin \lambda_1 L \end{cases} \quad (10)$$

次に具体的に上記の式の計算例を示す。計算条件は以下に示す条件とする。

(計算条件)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_2 \\ c_1 &= 100(m/s), c_2 = 200(m/s) \\ \omega_1 &= 2\pi(rad/s), \omega_2 = 4\pi(rad/s) \\ 2l &= 200(m) \end{aligned}$$

この条件で $\omega_1 < \omega < \omega_2$ の条件で固有振動数を求めると、7個の振動数が求まる。その結果を表-1に示すが、偶関数モードが4つ、奇関数モードが3つ定められる。表中に軟弱地盤中の山の数と波長を示しているが、軟弱地盤の両側の境界はおよそ固定端としてふるまっている。図(a)、(b)に $-L < x < L$ の区間の振動モード形を示しているが、両端固定の弦の振動とよく似たモード形となる。ただし高振動数になるにつれて固定条件は鈍くなり、相対的に境界点の運動が大きくなるのがわかる。

山の数か1個あるいは2個の振動モードは軟弱層の振動子の共振周波数に近く、硬い層に両側を囲まれた軟弱層では鉛直方向の共振に加えて両側が束縛された振動モードも加わることになり、大きな揺れが起こりやすいと考えられる。

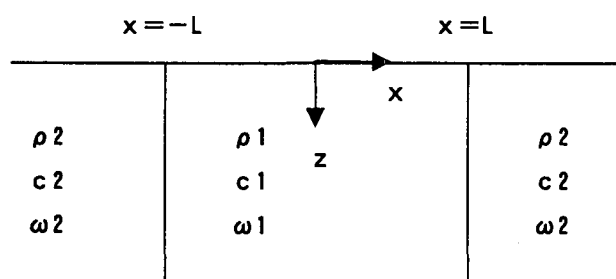


図-4 両側を硬い地盤で囲まれた軟弱層のモデル

表-1 振動数方程式の計算結果

分類	角振動数(rad/s)	山の数	波長(m)
偶関数	6.46	1	419
	7.72	3	140
	9.72	5	85
	11.9	7	62
奇関数	6.96	2	210
	8.66	4	105
	10.8	6	71

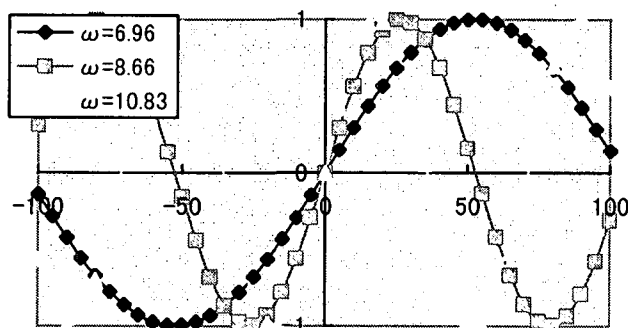
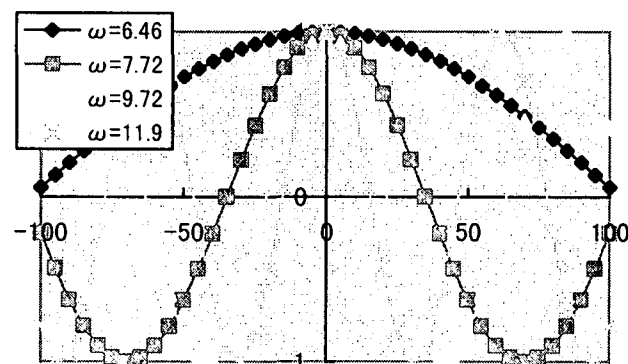


図-5 軟弱部における振動モード

5. 基盤傾斜がある場合

以上説明した硬軟地盤が接するケースや硬い層に両側を囲まれた軟弱層のようなケースは実際の地盤

ではまずありえない。図-6 に示すように、軟弱な地盤の層厚が徐々に変化するケースについて定性的な考察を行ってみる。傾斜面上の A 点で起きる共振は振動子がゆっくり振動する軟弱層が厚い方に伝播される。軟弱層が薄い方は指数関数となるために波動は伝わらない。横方向に伝わるこの波動と B 点の共振が重なれば大きな揺れが発生することになる。入力特性によって傾斜した面上から平坦になった区間のいずれでもこの重なりは発生しうる。

また軟弱層の厚い方から薄い方に向かう波動に対しては、ある周波数帯域で傾斜区間は固定端に似たふるまいをすることになる。固定端が複数存在する場合には束縛モードの振動が起ることになり、水平面内の共振が発生する。このことも揺れを大きくする一因となる。

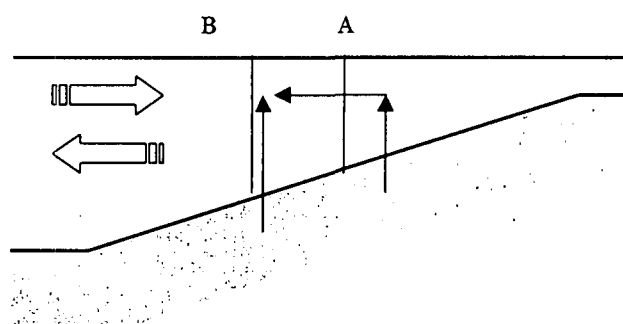


図-6 厚さの変化する軟弱層のモデル

6. まとめ

本稿では連結振り子モデルを用いて地盤振動を簡略化して解析的に計算する方法を示した。簡単な微分方程式の基本解から増幅メカニズムの特徴を明らかにできた。基本振動数が異なる振り子が連結された付近では、両側からの連成効果により波動を反射させる壁のような効果と、壁の運動が振動の遅いほうに伝わる効果があることが判明した。今後、増幅度合いの定量化に向けて研究を進める予定でいる。

参考文献

- 1)小長井、不整形地盤の解析法ーバネ-マス置換法、平成 10 年度ローカルサイトエフェクトシンポジウム論文集、pp.39-43、1998