

ランダムに生起するインパルス列の 位相特性に関する確率論的考察

盛川 仁¹・澤田純男²・土岐憲三³・金子康史⁴

¹ 正会員 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科 (〒680-8552 鳥取市湖山町南 4-101)

² 正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

³ フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木システム工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

⁴ 正会員 工修 住友信託銀行 事務推進部 (〒540-8639 大阪市中央区北浜 4-5-33)

地震動の観測記録がインパルス列によって駆動されるシステムの出力であるということを念頭におき、時間軸上でランダムに発生するインパルス列の位相特性の確率論的性質を明らかにする。問題の取り扱いを容易にするために位相スペクトルの傾きである群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ を導入する。インパルスの発生の分布形により位相の周波数特性が大きく異なるが、この特性を記述するために、低周波数帯、中間周波数帯、高周波数帯の3つの区間にわけて、各区分毎に確率密度関数のモーメントを中心に解析的、数値的な議論を展開する。その結果、 $t_{gr}(\omega)$ の全帯域にわたるおおまかな周波数特性はフーリエ振幅スペクトルの特性に大きく依存しており、各周波数帯毎にその特性を規定するパラメータがどのようなものであるかが明らかになった。

Key Words : group delay time, envelope function, phase angle, impulse train, probability density function

1. はじめに

地震動の観測記録がインパルス列によって駆動されるシステムの出力であると考え、震源に相当するインパルス列の性質を詳細に検討することは極めて重要である。本研究では、ある確率分布にしたがって発生するインパルス列からなる時刻歴波形の群遅延時間スペクトルに着目し、低周波数帯、中間周波数帯、高周波数帯の3つの区間に分けたうえで、各区分における群遅延時間スペクトルの確率論的特性を、モーメントを中心として解析的、数値的に調べる。また、フーリエ振幅スペクトルの高周波領域における確率論的特性についても併せて明らかにする。

2. これまでの研究

本研究では上に述べたとおり、時刻歴波形として、発生時刻がある確率密度関数 $f_T(t)$ に従うインパルス列を取り扱う。時刻歴波形 $x(t)$ を振幅の平均 $x_m(t)$ と平均からの変動成分 $x_s(t)$ の和、すなわち、

$$x(t) = x_m(t) + x_s(t) \quad (1)$$

と表せるものとする。 $x_m(t)$ と $x_s(t)$ のフーリエ振幅スペクトルをそれぞれ、 $A_m(\omega)$ 、 $A_s(\omega)$ とすると、 $x(t)$ のフーリエ振幅スペクトル $A(\omega)$ 及び群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ は、 $A_m(\omega)$ 、 $A_s(\omega)$ のうち、値の大きい

方によって規定されることになる。すなわち、 $A_m(\omega)$ 、 $A_s(\omega)$ の交点の ω 軸上の値を ω_c とすると、 $A(\omega)$ 及び $t_{gr}(\omega)$ は、

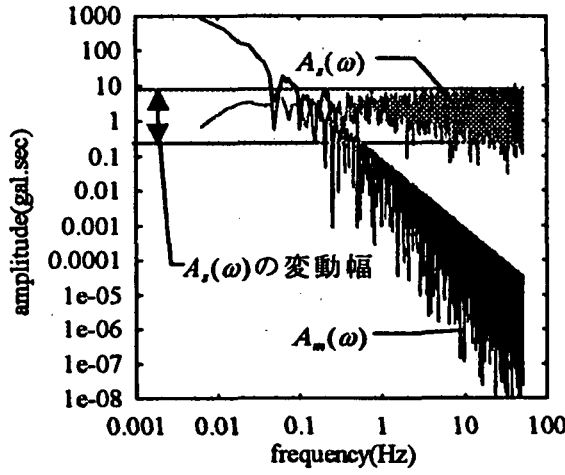
$$A(\omega) \cong \begin{cases} A_m(\omega) & (\omega < \omega_c) \\ A_s(\omega) & (\omega > \omega_c) \end{cases} \quad (2)$$

$$t_{gr}(\omega) \cong \begin{cases} t_{grm}(\omega) & (\omega < \omega_c) \\ t_{grs}(\omega) & (\omega > \omega_c) \end{cases} \quad (3)$$

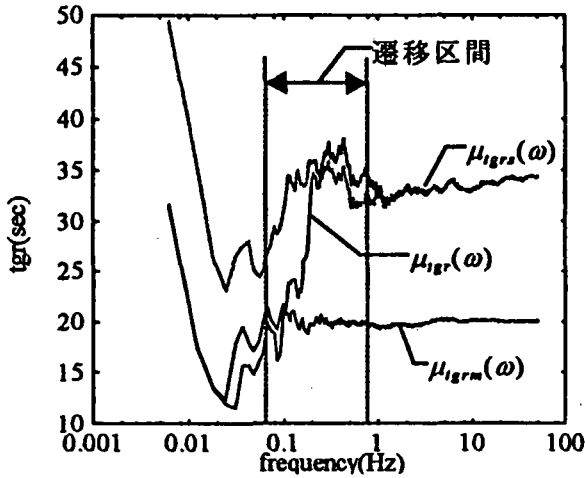
となる。ここで、 $t_{grm}(\omega)$ 、 $t_{grs}(\omega)$ はそれぞれ平均 $x_m(t)$ 、変動成分 $x_s(t)$ の群遅延時間スペクトルである。

しかし、 $t_{gr}(\omega)$ については式 (3) はあまりよい近似にはなっておらず、 ω_c の周辺で群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ が、 $t_{grm}(\omega)$ から $t_{grs}(\omega)$ へと徐々に遷移するあいまいな区間が存在する。これは ω_c の周辺で $A_s(\omega)$ の値がばらついているために $A_m(\omega)$ 、 $A_s(\omega)$ のうち、振幅の大きい方を一意に決めることが難しいためであると考えられる。 $x(t)$ 、 $x_m(t)$ 、 $x_s(t)$ の振幅および群遅延時間スペクトルの関係を図1に示す。澤田ら¹⁾ がシミュレーションによって予測したように、図1を見ると、遷移区間の振動数軸上での幅が $A_s(\omega)$ のばらつきに対応しているように見える。

以下では、最初に中間周波数帯における遷移区間の幅を $A_s(\omega)$ のばらつきから規定した後、残る周波数帯での群遅延時間スペクトルの性質を議論していく。



(a) $A_s(\omega)$ の変動幅



(b) 平滑化された $t_{gr}(\omega)$ の遷移区間

図-1 フーリエスペクトルの関係

3. 群遅延時間スペクトルの遷移区間

$t_{gr}(\omega)$ の遷移区間の幅に大きな影響をおよぼすと考えられる $A(\omega)$ の高周波数帯での平均値、分散を検討するために、まず、 $x(t)$ の変動成分の振幅スペクトル $A_s(\omega)$ の確率分布を求める。時間軸上の n 個の任意の時刻 $t = t_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) に発生したインパルス列は、

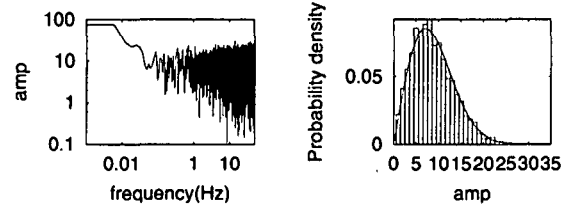
$$h(t) = \sum_{k=1}^n \delta(t - t_k) \quad (4)$$

と表すことができる。このとき、インパルス列のフーリエ振幅スペクトルは

$$A(\omega) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \cos \omega(t_k - t_l)} \quad (5)$$

となる。この式において t_k が確率変数であるとする、 n がある程度大きい値を持っていれば、 t_k の分布形によらず $A(\omega)$ の確率密度関数は、

$$f_A(x) = \frac{2x}{n} \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) \quad (6)$$



(a) フーリエ振幅

(b) 頻度分布と式 (2)

図-2 インパルス列のフーリエ振幅スペクトル

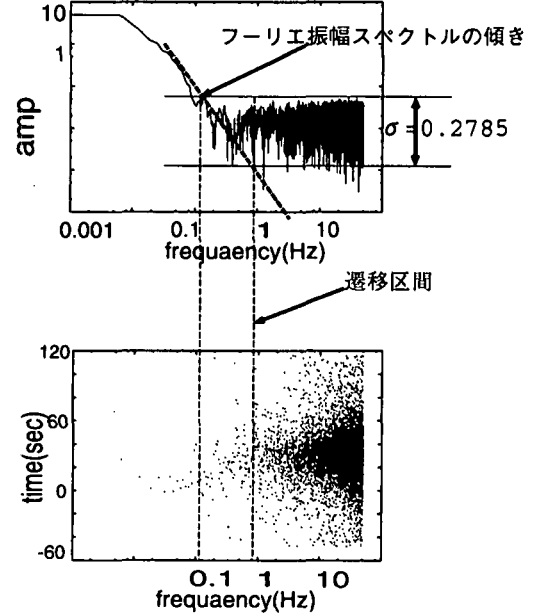


図-3 フーリエ振幅スペクトルからの遷移区間の決定

となる。計算機内で乱数を発生させて、 t_k を与えて作ったインパルス列の振幅スペクトル、その頻度分布と式 (6) を図 2 に示す。

式 (6) を常用対数を用いて $y = \log x$ なる変数変換をすると、その確率密度関数 $f_Y(y)$ 、その期待値 μ_y および標準偏差 σ_y は、

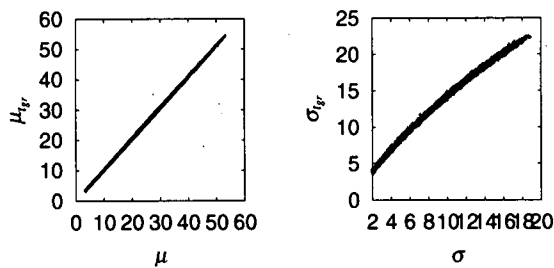
$$f_Y(y) = \frac{2 \ln 10 \cdot 10^{2y}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{10^{2y}}{n}\right) \quad (7)$$

$$\mu_y = -\frac{1}{2 \ln 10} \left(C + \ln \frac{1}{n}\right) \quad (8)$$

$$\sigma_y = \ln 10 \sqrt{\frac{\pi}{24}} = 0.2785 \quad (9)$$

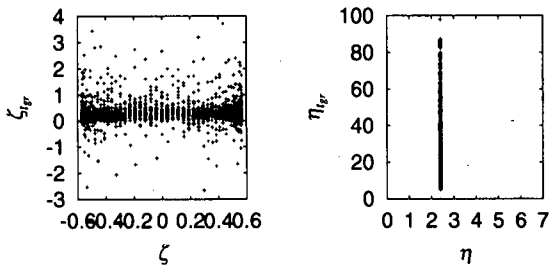
となる。ここで、 C はオイラー一定数である。式 (9) より振幅スペクトルの対数 $\log A(\omega)$ の標準偏差が常に一定値をとることがわかる。これを利用して振幅スペクトルから群遅延時間スペクトルの遷移区間の幅を決定する例を図 3 に示す。

以上のことより、高周波数帯での振幅スペクトルの標準偏差は常に一定であるので、群遅延時間スペクトルの遷移区間の幅は低周波数帯における $A(\omega)$ 、すなわち $A_m(\omega)$ の傾きのみに依存していることが分かる。



(a) 平均値の相関関係

(b) 標準偏差の相関関係



(c) 歪み度の相関関係

(d) 尖り度の相関関係

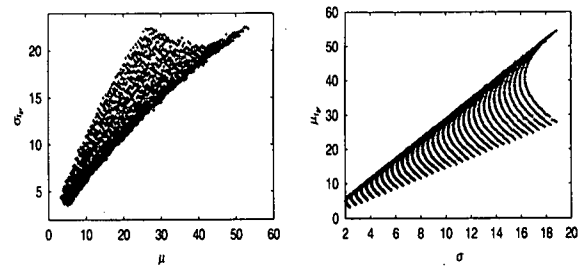
図-4 三角形分布と群遅延時間のモーメントの相関関係

4. 高周波数帯の群遅延時間スペクトル

群遅延時間スペクトルと時刻歴波形の包絡形の関係が和泉ら²⁾によって指摘されて以来、さまざまな研究がなされてきた。本節では、高周波数帯における包絡線形状を規定するインパルスの発生時刻の確率密度関数 $f_T(t)$ と、この分布に従って発生したインパルス列の $t_{gr}(\omega)$ の分布性状の関係について調べる。

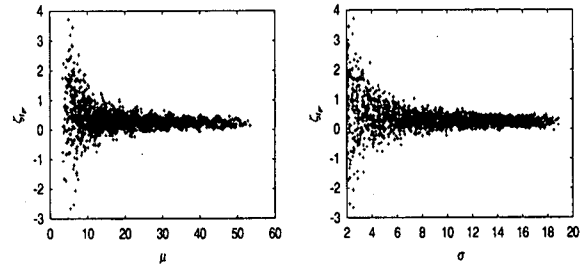
以下の解析では、 $f_T(t)$ として、確率分布の特性を簡単に操作できるという観点から三角形分布を用いる。三角形分布を規定するパラメータは始点 a 、終点 b 、頂点 c の3点であるが地震動においては実際に波動が発生した時刻を0として差し支えないので、 $a=0$ とする。確率密度関数を直接扱うことは難しいので、分布の4次までのモーメントに着目して議論を進める。

様々な形状の三角形分布 $f_T(t)$ を設定し、各分布ごとに乱数を用いて多数のインパルス列を発生させ、得られた群遅延時間の分布のヒストグラムの1次から4次までのモーメントを求めた。このとき、シミュレーションによって得られたモーメントを縦軸に、三角形分布 $f_T(t)$ のモーメントを横軸にとってそれらの対応関係を示したものが図4である。図4(a)より、確率密度関数 $f_T(t)$ の平均値 μ と群遅延時間スペクトルの平均値 $\mu_{t_{gr}}$ が線形関係にあり、かつ $\mu \cong \mu_{t_{gr}}$ であることが分かる。また、図4(b)には $f_T(t)$ の標準偏差 σ と群遅延時間スペクトルの標準偏差 $\sigma_{t_{gr}}$ が線形に近い1対1の対応関係がみられる。図4(c)は相関無く分布しているように見えるが、 $\zeta_{t_{gr}}$ は0~0.6の間の狭い範囲に多く分布し



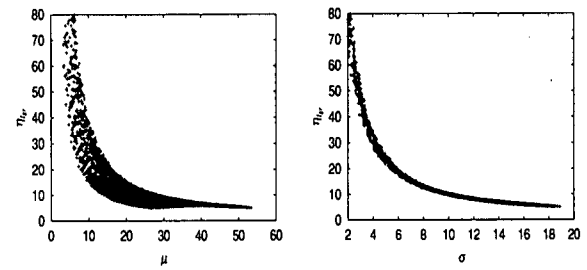
(a) 平均値と標準偏差

(b) 標準偏差と平均値



(c) 平均値と歪み度

(d) 標準偏差と歪み度



(e) 平均値と尖り度

(f) 標準偏差と尖り度

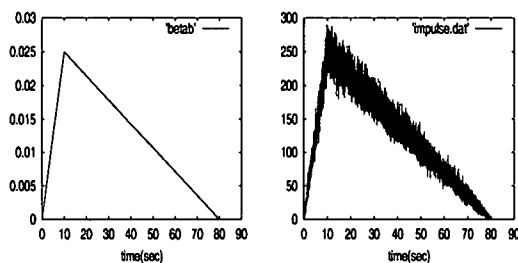
図-5 群遅延時間スペクトルのモーメントの相関関係

ているので、 $\zeta_{t_{gr}}$ は $f_T(t)$ の歪み度 ζ に依らずほぼ一定値であるといえる。

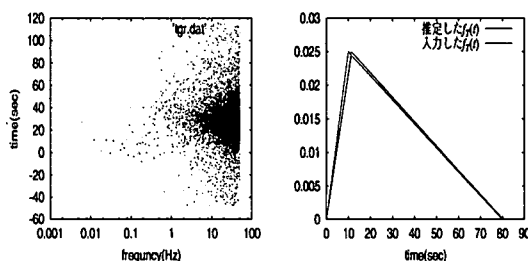
さらにモーメントの次数の組合せを変えたものを図5に示す。図5では上述の歪み度に関する考察を裏付ける結果となっている。すなわち、 $f_T(t)$ の平均値 μ 、標準偏差 σ の値が大きくなるにつれて群遅延時間スペクトルの歪み度 $\zeta_{t_{gr}}$ が一定値に収束していることが分かる。

尖り度 $\eta_{t_{gr}}$ については三角形分布の場合 η が定数であるため図4(d)からは意味のある関係を得られなかったが、図5(e)(f)を見ると、確率密度関数 $f_T(t)$ の平均値 μ 、標準偏差 σ の値が大きくなるにつれて群遅延時間スペクトルの尖り度 $\eta_{t_{gr}}$ が一定値に収束していることが分かる。特に図5(f)では、 σ と $\eta_{t_{gr}}$ が1対1の対応関係を示しておりこの特性が明瞭にわかる。

上記の性質が、 $f_T(t)$ に依存した特性であるかどうかを確かめるために、同様の解析をベータ分布に対しても行なってみると、平均値、標準偏差に関しては図4(a)(b)と全く同じ結果となった。また、より高次のモーメントについても三角形分布の場合と同様の特性を見出すことができた。このことは群遅延時間スペクトルの分

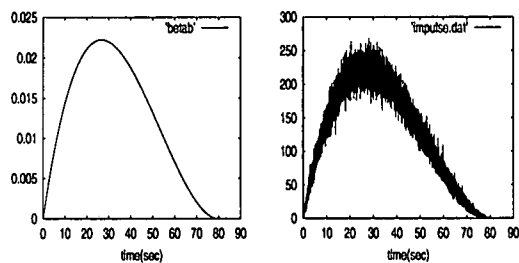


(a) 確率密度関数 $f_T(t)$ (b) $f_T(t)$ によって発生したインパルス列

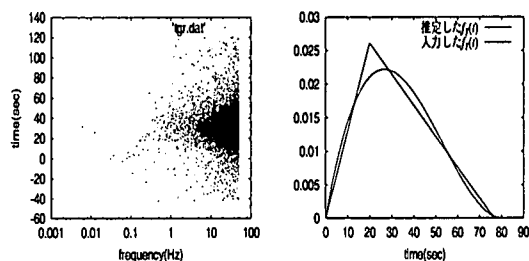


(c) インパルス列の群遅延時間 (d) 推定した確率密度関数

図-6 $f_T(t)$ の推定



(a) 確率密度関数 $f_T(t)$ (b) $f_T(t)$ によって発生したインパルス列



(c) インパルス列の群遅延時間 (d) 推定した確率密度関数

図-7 $f_T(t)$ の推定

布性状は、確率密度関数 $f_T(t)$ の 2 次のモーメントまでですべて規定されているということを意味している。

5. 長周期成分の概形の推定

以上の結果に基づいて時系列波形 $x(t)$ のインパルス発生時刻の確率密度関数 $f_T(t)$ の概形を推定をする。 $f_T(t)$ は $x(t)$ の長周期成分、すなわち $x_m(t)$ と相似形であるだけでなく、短周期成分 $x_s(t)$ の包絡線形状とも密接な関係を有しており¹⁾、時系列波形の非定常特性を把握するためには重要な情報となる。

前節より、インパルス列の群遅延時間の高周波数帯から $f_T(t)$ の平均値 μ 、標準偏差 σ が決定できるので、それを利用して確率密度関数 $f_T(t)$ の概形を求める。以下に確率密度関数 $f_T(t)$ が三角形分布であると仮定して、パラメータ b 、 c を求める手順を示す。

1. インパルス列の群遅延時間スペクトルからその平均値 $\mu_{t_{gr}}$ と標準偏差 $\sigma_{t_{gr}}$ を算出する。
2. 図 4(a)(b) から $\mu_{t_{gr}}$ 、 $\sigma_{t_{gr}}$ に対応する $f_T(t)$ の平均値 μ 、標準偏差 σ を読みとる。
3. 三角形分布のモーメントを求める式に μ 、 σ を代入し、連立方程式を解くことによって $f_T(t)$ のパラメータ b 、 c を算出し概形を求める。

一例として、確率密度関数 $f_T(t)$ として $b=80$ 、 $c=10$ の三角形分布を与えた場合の推定結果を図 6 に示す。

次に、 $f_T(t)$ として $q=2$ 、 $r=3$ のベータ分布を与えた場合を考える。ベータ分布ではパラメータが 3 個

あるので $f_T(t)$ の平均値 μ 、標準偏差 σ だけから分布形を一意に決めることができない。しかし、群遅延時間スペクトルの平均値 $\mu_{t_{gr}}$ 、 $\sigma_{t_{gr}}$ は $f_T(t)$ の形には依存しないことを利用して、長周期成分の推定においては、 $f_T(t)$ はパラメータ数が少ない三角形分布であるものと仮定して推定を試みる。その結果を図 7 に示す。これよりたとえ確率密度関数 $f_T(t)$ が三角形分布でなくても、三角形分布の式を用いることにより $f_T(t)$ の概形を推定できる可能性のあることがわかる。

6. 結論

以下に本研究の成果をまとめる。

1. 振幅スペクトルの高周波数帯におけるばらつきの幅が一定であることを利用して、群遅延時間スペクトルの遷移区間を決定できた。
2. 確率密度関数 $f_T(t)$ が 2 次のモーメントまでで決定される場合には、それに従って発生するインパルス列の群遅延時間を用いて $f_T(t)$ 、すなわち波形の長周期成分を逆推定できる。しかし、 $f_T(t)$ が 2 次のモーメントまでで決定しない場合には、群遅延時間の 3 次以上のモーメントを調べても $f_T(t)$ の正確な推定は難しく、概形のみ推定可能である。

参考文献

- 1) 澤田ほか：震源インパルス列モデルの位相特性，第 3 回都市直下地震災害シンポジウム，pp.79-80，1998。
- 2) 和泉・勝倉：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会論文報告集，第 327 号，pp20-27，1983。