

上部工の剛体回転を考えた高架橋の応答計算

鈴木崇伸¹・伯野元彦²

¹正会員 工博 東洋大学助教授 工学部環境建設学科 (〒350 川崎市鯨井 2100)

²フェロー 工博 東洋大学教授 工学部環境建設学科 (〒350 川崎市鯨井 2100)

1995年1月の兵庫県南部地震では神戸市を中心に多くの被害が出た。道路の被害の中でとりわけ高架橋は各所で被害を受けている。本研究では1本脚の高架橋の振動特性を明らかにすることを主眼に、橋桁部を剛体とした解析モデルを考える。簡単なモデル計算の結果、T型橋脚の場合には剛体回転により、端部において水平運動に匹敵する上下運動が発生する点や地際のモーメントが増大する点を確認された。また重心ずれがある場合には上下動によっても回転運動が起きることもわかった。さらに2層式の橋桁がある場合には、剛体回転の影響により柱上部の曲げモーメントが大きくなる点を確認した。ここまでの研究は弾性振動を扱っているが、橋桁部の剛体運動が橋脚に及ぼす影響を定量的に把握して、高架橋の設計の問題点について考察する。

Key Words : Sismic response, Single column bridge, Rotation of over-structure

1. 研究目的

1995年1月の兵庫県南部地震では神戸市を中心に多くの被害が出た。道路の被害の中でとりわけ高架橋は各所で被害を受けている。本研究では1本脚の高架橋の振動特性を明らかにすることを主眼に、橋桁部を剛体とした解析モデルを考える。橋桁部の剛体運動が橋脚に及ぼす影響を定量的に把握して、高架橋の設計の問題点について考察する。

2. 解析方法

(1) 構造モデル

図1に示すように橋桁部を長方形の剛体とし、橋脚部を片もちばりでモデル化する。一般に橋桁部の重量は橋脚の5～10倍程度と考えられ、片もちばりの分布質量を無視してばねとしてモデル化する。

はりの曲げ剛性をEI、軸剛性をEAとする。ここで剛体支持点にはたらく軸力をN、せん断力をQ、曲げモーメントをMとし、支持点の水平変位を x_0 、鉛直変位を z_0 、回転角を θ とすると次の関係式が成り立つ。

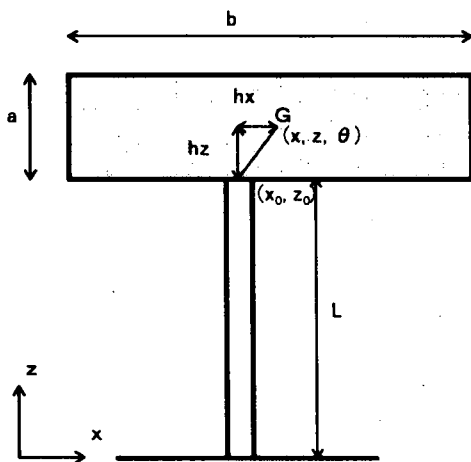


図-1 片もちばりで支持された剛体振り子モデル

$$\begin{pmatrix} M \\ Q \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 \\ -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & EA/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (1)$$

曲げモーメントとせん断力は相互に影響しあい、連成して振動するモデルとなる。また軸力は微小変形を考えているので影響されない。

(2) 運動方程式

剛体支点の座標を (x_0, z_0) 、剛体の回転角を θ 、剛体支点からみた剛体重心の内部の局所座標を (h_x, h_z) とする。剛体重心の座標を (x, z) とおけば、

$$\begin{cases} x = x_0 + h_z \sin \theta + h_x \cos \theta \\ z = z_0 + h_z \cos \theta - h_x \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

が成り立つ。両辺を時間 t で微分すれば、速度に関する拘束条件式が得られる

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\theta}(h_z \cos \theta - h_x \sin \theta) \\ \dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{\theta}(-h_z \sin \theta - h_x \cos \theta) \end{cases} \quad (3)$$

Lagrangeの運動方程式を用いて定式化する。運動エネルギー T を計算すれば

$$T = \frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \quad (4)$$

となる。ただしここでは3次以上の微小項は無視して計算する。また変形エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{6EI}{L^3} x_0^2 - \frac{6EI}{L^2} x_0 \theta + \frac{2EI}{L} \theta^2 + \frac{EA}{2L} z_0^2 \quad (5)$$

となる。運動エネルギー T と変形エネルギー U からLagrange関数を計算して運動方程式を求めると

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_{y0} + mh_x^2 + mh_z^2 & mh_z & -mh_x \\ mh_z & m & 0 \\ -mh_x & 0 & m \end{pmatrix} \quad (6)$$

が得られる。質量マトリクスは対角マトリクスには

ならないが、対称となっている。

(3) 自由振動解析

支点の上下動を無視した 2 自由度系の自由振動を考える。振動数を ω として

$$\begin{cases} \theta = Ae^{i\omega t} \\ u = Be^{i\omega t} \end{cases} \quad (7)$$

とにおいて運動方程式に代入すると、振動数方程式は

$$\det[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] = 0 \quad (8)$$

で与えられる。式の展開をして整理すると、

$$\omega^4 - \left\{ \omega_\theta^2 + \omega_x^2 \left(1 + \frac{h_z(h_z + L)}{I_{y0}/m + h_x^2} \right) \right\} + \frac{1}{4} \omega_\theta^2 \omega_x^2 = 0 \quad (9)$$

ただし

$$\omega_\theta^2 = \frac{4EI}{L(I_{y0} + mh_x^2)}, \quad \omega_x^2 = \frac{12EI}{mL^3} \quad (10)$$

この ω^2 に関する 2 次方程式は 2 つの実根をもち、小さい方が 1 次モードの固有振動数、大きい方が 2 次モードの固有振動数となる。これを ω_1^2, ω_2^2 とおく。

次に固有モードの計算をすると、

$$[\phi] = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_n = \frac{1 - \omega_n^2 / \omega_x^2}{L/2 + h_z \omega_n^2 / \omega_x^2} \quad (n=1,2) \quad (11)$$

が固有モードのマトリクス表示となる。

(4) モード解析

片持ち梁支点が水平加速度 $a_x(t)$ で運動する問題を考える。相対変位を $u(t)$ 、相対加速度を $\ddot{u}(t)$ とすれば強制振動の運動方程式は

$$\begin{pmatrix} I_{y0} + mh_x^2 + mh_z^2 & mh_z \\ mh_z & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mh_z \\ -m \end{pmatrix} a_x(t) \quad (12)$$

となる。鉛直方向の重心のずれ量だけ回転力が作用することになる。固有振動数と固有モードは既知であるので、モード解析の手法により、一般化質量 M_n 、一般化外力 P_n を計算する。

$$M_n = (I_{y0} + mh_x^2 + mh_z^2) A_n^2 + 2mh_z A_n + m \quad (13)$$

$$P_n = -m(h_z A_n + 1) \quad (14)$$

ここで、基準座標の運動方程式に減衰項を見込めば

$$\ddot{q}_n + 2h\omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n}{M_n} a(t) = \beta_n a_x(t) \quad (15)$$

となる。ただし β_n は n 次モードの刺激係数である。基準座標 q_n に関する微分方程式を解くことにより、 (θ, u) は

$$\begin{pmatrix} \theta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

から計算できる。また剛体支持点の n 次モードの曲

げモーメントは

$$M_{in} = \frac{4EI}{L} \left(A_n - \frac{3}{2L} \right) q_n \quad (17)$$

から計算でき、剛体の回転運動によるモーメントが付加されることになる。またはり支持点の n 次モードのモーメントは

$$M_{0n} = \frac{2EI}{L} \left(A_n - \frac{3}{L} \right) q_n \quad (18)$$

から計算でき、モード形と振幅から計算できる。なお片もちり内において慣性力を無視しているためせん断力は一定となり、次式となる。

$$Q_m = \frac{6EI}{L^3} (2 - LA_n) q_n \quad (19)$$

(5) 上下動入力

次に片持ち梁支点が上下加速度 $a_z(t)$ で運動する問題を考える。はりの軸振動の影響を無視すれば、強制振動の運動方程式は

$$\begin{pmatrix} I_{y0} + mh_x^2 + mh_z^2 & mh_z \\ mh_z & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4EI/L & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 12EI/L^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mh_x \\ 0 \end{pmatrix} a_z(t) \quad (20)$$

となり、水平動の場合と比べて、外力項だけが変化し、回転力だけが加わる形となる。

この場合モード解析において一般化外力だけが変化して

$$P_n = mh_x A_n \quad (21)$$

となり、他の計算は水平動の場合と同様である。

3. 剛体慣性の影響の感度分析

次に 2 章で求めた運動方程式を用いて上部工の剛体慣性がばね支持された物体の運動にどう影響するかを調べてみる。集中質量でモデル化したときの固有振動数 ω_0 で無次元化をして考察を進める。剛体の重心まわりの慣性モーメントを慣性半径 k を用いて $I_{y0} = mk^2$ とおくと振動数方程式は以下となる。

$$r = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \omega_0^2 = \frac{3EI}{mL^3}$$

$$r^2 - 4r \left(1 + \frac{h_z^2 + h_z L + L^2/3}{k^2 + h_x^2} \right) + \frac{4L^2}{3(k^2 + h_x^2)} = 0 \quad (22)$$

k, h_z, h_x を変化させたときに振動性状がどのように変化するかを以下に分析する。

(1) 固有振動数

式(22)の方程式の係数から重心の水平ずれ h_x は慣性モーメントの増大と同等の影響をもつため、 k, h_z を変化させてみる。図 2 (a)、(b) はそれぞれ 1 次、2 次の固有振動数の変化をグラフ化したものである。1 次固有振動数は慣性半径の増加にともなって徐々に小さくなる傾向がある。また 2 次固有振

動数は慣性半径の増加に伴って急速に減少し、 $r=3$ 程度に収束していく。また鉛直方向の重心ずれに伴い、1 次固有振動数は小さく、2 次固有振動数は大きくなるが、グラフの形状はよく似た形状となる。

(2) 水平方向の振動

モードマトリクスの形から水平運動の大小はモードごとの刺激係数の変化から知ることができる。図 3 は水平動入力の際のモードごとの刺激係数の変化をグラフにしたものである。四角あるいは三角のマークで表された 2 つの系列が対応しており、白抜きが 2 次モードを表している。1 次モードによる水平振動は慣性半径の増大にともない急速に小さくなり、2 次モードによる振動が大きくなっている。重心の鉛直ずれが大きい場合には、慣性半径の変化に対してゆるやかに増減し、2 次モードがより卓越してくる。重心の水平ずれが加われば 2 次モードが卓越する傾向はさらに顕著になる。剛体の慣性抵抗が大きい場合には、水平動入力に関して 2 次モードの影響は無視し得なくなると考えられる。

一方、鉛直動入力の場合には、慣性半径に関わりなく 2 次モードが水平振動成分の中で卓越する。図 4 に $h_x/L=0.2$ 、 $h_z/L=0.1$ の場合の刺激係数の変化を示す。慣性半径が大きくなると同程度になるものの、全体にわたり 2 次の成分が大きくなっている。

(3) 剛体の回転運動

剛体の回転自由度をモデル化しているため、水平振動と連成して回転運動が発生する。グラフは省略するが、回転角は慣性モーメントが大きくなるにつれて徐々に小さくなるが概ね一定の傾向を有している。また剛体の回転運動にともなって鉛直方向の振動も発生する。鉛直方向の振動は慣性モーメントが

大きくなるほど振幅が大きくなり、また重心から図

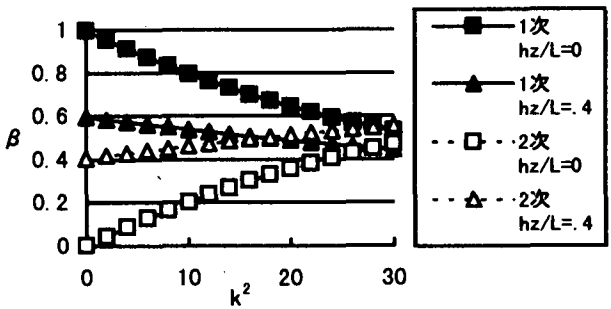


図-3 慣性モーメントと水平振幅の関係
(水平動入力の場合)

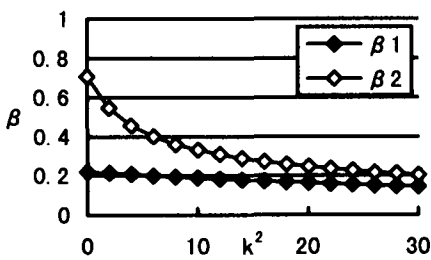


図-4 慣性モーメントと水平振幅の関係
(鉛直動入力の場合)

った水平距離が大きいほど鉛直振幅も大きい。

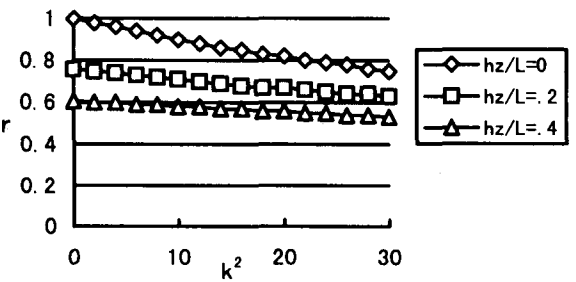
また剛体の回転運動にともなって剛体支点部に曲げモーメントが発生する。曲げモーメントはモード形と基準振幅によって増減するが、水平動入力の場合には 1 次モードの影響が大きい。また鉛直動入力では 2 次モードが卓越する。

4. 高架橋の振動特性

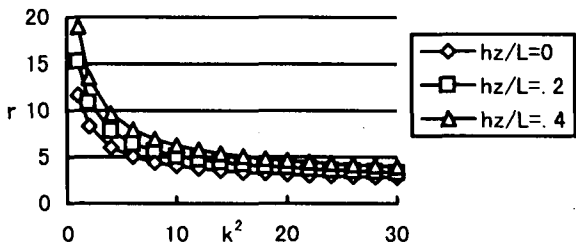
次に単柱形式の高架橋の軸直角方向の振動性状をモデル計算してみる。ここでは T 型と 2 層式の 2 種類のモデルを考える。また入力弾性範囲の計算であるが、固有周期に関係なく 0.5G の水平加速度を与えてみる。

(1) T 型高架橋

図 5 に T 型高架橋のモデルを示す。剛体回転を考慮した 2 自由度系モデルを用いてモード解析した結果を表 1 に示している。表中に対比のため橋桁重心位置に質量を集中した 1 自由度モデルの計算結果も示している。感度分析の結果と同様に周期は 2 割程度長くなっており、また 2 次モードの刺激係数の方が大きくなっている。剛体回転角を端部の上下動に換算すると水平動の 2 倍程度となる。柱に発生するせん断力は 1 自由度モデルに比べると小さくなっているが、曲げモーメントは柱上方で増大し、下方で減少している。図 6 に曲げモーメント分布図を示しているが、1 自由度モデルに比べて柱上部では 2 倍程度、下部で同程度となっている。また曲げモーメントはおよそ 1 次のモードの変形で決定されている。



(a) 1 次の固有振動数



(b) 2 次の固有振動数

図-2 慣性モーメントと固有振動数の関係

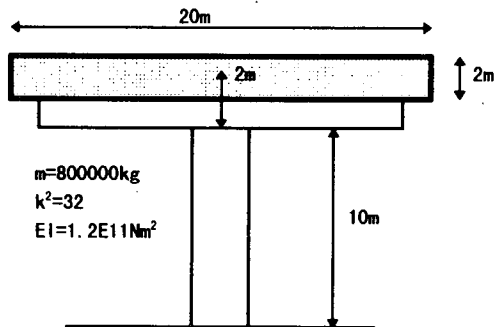


図-5 T型高架橋の計算モデル

表-1 T型高架橋のモード解析結果

項目	2DOF			1DOF
	1次モード	2次モード	合成値	
T (sec)	0.48	0.09		0.39
β	0.484	0.516		-
q (m)	0.0139	0.0005		0.0189
θ (1/m)	0.00237	9.00E-05	0.00237	-
u (m)	0.0139	0.0005	0.0139	0.0189
M1 (Nm)	1.57E+07	7.83E+06	1.75E+07	7.87E+06
M0 (Nm)	4.12E+07	5.79E+06	4.16E+07	4.72E+07
Q (N)	2.56E+06	1.36E+06	2.90E+06	3.94E+06

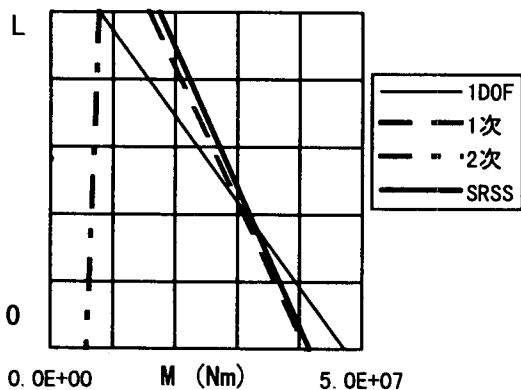


図-6 T型高架橋の柱部のモーメント分布

(2) 2層式高架橋

次に2層式の高架橋のモデルを図7に示す。桁質量はT型と同じであるが2層に分かれたモデルである。剛体部がより広がるために慣性半径は大きくなり、重心のずれ量も増している。表2にモード解析結果を示す。2次モードの刺激係数はT型のケースよりさらに大きくなっているが、2次の固有周期が小さくなっているために、2次モードの影響は相対的に小さくなっている。モーメント分布図を図8に示すが、1自由度モデルの重心位置が高くなるために剛体慣性を考えたモデルのモーメント分布とよく似た分布となるが、T型と同様に剛体慣性を考えた場合には柱上部で大きく、柱下部で小さくなっており、その比率はおおよそ1:2となっている。なおせん断力が1自由度モデルに比べて小さいのはT型と同様である。

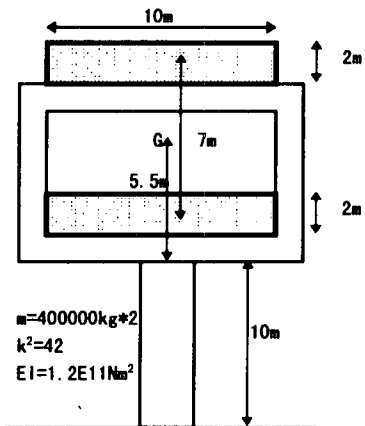


図-7 2層式高架橋の解析モデル

表-2 2層式高架橋のモード解析結果

項目	2DOF			1DOF
	1次モード	2次モード	合成値	
T (sec)	0.65	0.076		0.57
β	0.375	0.625		-
q (m)	0.0194	0.0005		0.0404
θ (1/m)	0.00348	5.00E-05	0.0035	-
u (m)	0.0194	0.0005	0.0194	0.0404
M1 (Nm)	2.71E+07	5.58E+06	2.77E+07	2.15E+07
M0 (Nm)	5.63E+07	4.41E+06	5.65E+07	6.05E+07
Q (N)	2.92E+06	9.99E+05	3.09E+06	3.90E+06

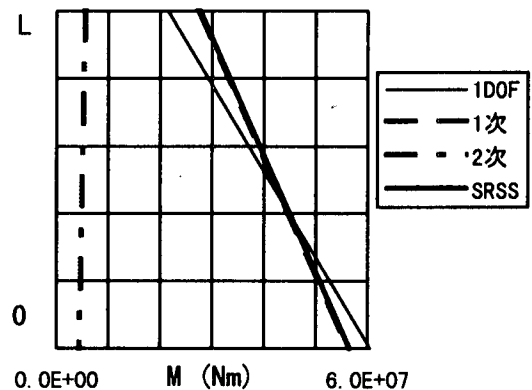


図-8 2層式高架橋の柱部のモーメント分布

5. 考察とまとめ

単柱形式の高架橋の横断面方向の振動に関して、上部工の剛体回転を考慮したモデルで振動性状の分析を試みた。その結果、上部工の剛体慣性が大きくなると振動の様子が大きく変化する点、1次モードの剛体回転によって柱上部に作用するモーメントの影響が大きい点が判明した。今後、時系列解析、弾塑性解析などを実施して詳細な分析を行う予定である。

(参考文献)

- 1) 小坪清真：土木振動学
- 2) 土木学会他：阪神・淡路大震災照査報告（橋梁）