

適応型カルマンフィルターを用いた 非線形構造系の動特性の同定

佐藤忠信¹・竹井賢二²

¹正会員 工博 京都大学防災研究所 教授 (〒611 京都府宇治市五ヶ庄)

²正会員 工修 阪神高速道路公団大阪管理部 (〒552 大阪市港区石田 3-1-25)

地震荷重下にある構造物の動的特性は、時間に依存して変動していると考えられる。このため、地震時の構造物の応答は非線形性を示す。構造物の動特性を拡張カルマンフィルターにより同定する手法の研究が盛んに行われているが、こうした非線形性の取扱の問題は依然重要な課題として残っている。本研究では、拡張カルマンフィルターに過去の観測値の記憶を減退させることのできる機能を付加した適応型カルマンフィルターを構築し、構造物の動特性の変動に追従して逐次同定を進める手法を考案した。開発した手法を用いて非線形動特性を有する多自由度系の同定を行ない、その有用性を検証した。

Key Words : System Identification, Adaptive Kalman filter, Nonlinear characteristics

1. 概要

地震荷重を受けた構造物では、局所的な破損等による劣化に伴い、減衰性の増加や剛性の低下が見られる。このために、地震時の構造物の応答は複雑な非線形性を示す。このような動特性の変動を逐次診断して適切な応答予測を行うことは、地震時の構造物の倒壊を防ぐのみならずその機能を保持するための対策を施す上で有効であると言える。

地震時の構造物の応答から、拡張カルマンフィルターを用いて構造物の動特性を同定する手法に関しては、従来より盛んに研究が行われている¹⁾。この手法は一般には対象とする構造物のモデルを与えてやり、そのモデルパラメータを同定するものである。つまり、自らの主観によって予めモデルを決定する必要がある。このときのモデル化の誤差に言及している研究²⁾も一部見られるが、上述したような非線形性の取扱に関する問題は、依然として重要な課題であると言える。

そこで本論文では、拡張カルマンフィルターに過去の観測値の記憶を忘却することのできる機能を加えた適応型カルマンフィルターの概念を構築し、構造物の動特性の変動に追従して同定を進める手法を提案した。また、非線形2自由度構造系を対象に簡単な数値解析を行い、非線形性の強弱とモデルの関

係について考察を加えた。

2. 適応型カルマンフィルターの概念

時系列データを用いて構造物の動特性を同定する場合、非定常性を考慮するための最も有効かつ単純な方法は過去の情報(観測値)の重みを縮小することである。しかし、カルマンフィルターのアルゴリズムでは各時刻の観測値を等価に扱うために、非定常性を考慮することはできない。そこで、カルマンフィルターの観測更新がベイズ推定に基づく点に着目し、事前情報の重みが小さくなるようにアルゴリズムを修正することを考える。つまり、以下の様な拡張ベイズ推定を考える。

$$J_t = \frac{1}{2} (y_t - H_t x_t)^T R_t^{-1} (y_t - H_t x_t) + \frac{1}{2} \lambda_t (x_t - \bar{x}_t)^T M_t^{-1} (x_t - \bar{x}_t) \quad (1)$$

ただし y_t および x_t はそれぞれ観測量と状態量であり、 R_t は観測誤差共分散、 H_t は既知の観測行列である。また $\bar{x}_t$ は状態量の事前推定値、 M_t はその推定誤差共分散であり、以下の時間更新式により算出される。

$$\bar{x}_t = \Phi_{t-1} \hat{x}_{t-1} \quad (2)$$

$$M_t = \Phi_{t-1} P_{t-1} \Phi_{t-1}^T \quad (3)$$

ただし、 g は運動方程式等により導出される系の支

配方程式を表す関数、 Φ_{t-1} は状態遷移行列である。また、評価関数中の λ_t は事前情報の重みである。

具体的に式(1)を最小化する状態量は次式で与えられる。

$$\hat{x}_t = \bar{x}_t + P_t H_t^T R_t^{-1} (y_t - H_t \bar{x}_t) \quad (4)$$

$$P_t = (\lambda_t M_t^{-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t)^{-1} \quad (5)$$

ここで、 $\lambda_t = 1.0$ とした場合が、通常のカルマンフィルタに相当する。式(4)(5)より明らかに λ_t の存在により状態量の修正量が多くなっていることが分かる。

3. 忘却係数の位置づけ

ここでは事前情報と観測情報の相対的な重みである λ_t が、過去の観測値の重みを縮小することを示す。拡張ベイズ法に基づいて構成された適応型カルマンフィルタは、式(2)～(5)で表される。ここで、式(2)を式(4)に代入し整理すると次式を得る。

$$\hat{x}_t = (I - K_t H_t) \Phi_{t-1} \hat{x}_{t-1} + K_t y_t \quad (6)$$

ただし K_t はカルマンゲインであり、次式で表される。

$$K_t = P_t H_t^T R_t^{-1} \quad (7)$$

ここで、式(6)に現れる $I - K_t H_t$ は、式(5)と(7)を用いて、次式のように変形できる。

$$I - K_t H_t = P_t (P_t^{-1} - H_t^T R_t^{-1} H_t) = \lambda_t P_t M_t^{-1} \quad (8)$$

式(8)を式(6)に代入すると次式を得る。

$$\hat{x}_t = \lambda_t P_t M_t^{-1} \Phi_{t-1} \hat{x}_{t-1} + K_t y_t \quad (9)$$

これを展開して整理すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{x}_t = & \beta_{t:0} P_t M_t^{-1} \Phi_{t-1} \cdots P_1 M_1^{-1} \Phi_0 \hat{x}_0 \\ & + \beta_{t:1} P_t M_t^{-1} \Phi_{t-1} \cdots P_2 M_2^{-1} \Phi_1 K_1 y_1 \\ & + \cdots \\ & + \beta_{t:t-1} P_t M_t^{-1} \Phi_{t-1} K_{t-1} y_{t-1} \\ & + K_t y_t \end{aligned} \quad (10)$$

ただし各時刻の観測値および初期値に関する項にかかる係数 β は各項の重みであり、次式で与えられる。

$$\beta_{t:i} = \prod_{j=i+1}^t \lambda_j, \quad \beta_{t:i} = \lambda_t \beta_{t-1:i}, \quad \beta_{t:t} = 1.0 \quad (11)$$

したがって、 $\lambda_j < 1.0$ と置くことで過去の情報に関する項の影響を減ずることができる。この意味で、 λ は忘却係数と呼ぶことができる。このように、拡張ベイズ法に基づいてカルマンフィルタのアルゴリズムを展開することで、状態量の非定常性に追従できる同定手法が開発できた。

図-1は λ_t を一定値とした場合の5.0秒時点での過去の観測値の重み縮小の度合いを示す。 λ_t を1.0より小さくすることで過去の観測値の重みが指数関数

的に減少していることが分かる。

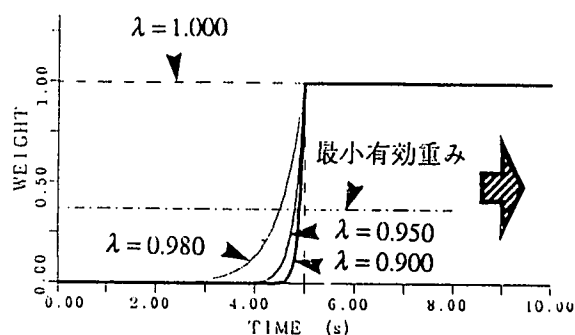


図-1 過去の観測値の記憶

4. 数値解析

以上の理論の適用性を調べるために、図-2に示す様な非線形2自由度構造系を対象にして、簡単な数値解析を行った。一般に、非線形構造系の運動方程式は以下の様に書ける。

$$M\ddot{\eta} + C(t)\dot{\eta} + z = -M\ddot{x}_g \quad (12)$$

ここに、 M 、 $C(t)$ はそれぞれ質量行列および粘性減衰行列、 η は構造物の地盤に対する相対変位、 $\ddot{x}_g$ は地震による地動加速度を示している。また、 z は非線形復元力で、各要素は各質点の上下の非線形復元力の和となっている。非線形復元力モデルとしては、以下に示すVersatile型復元力モデルを仮定する³⁾。

$$\dot{z}_i = k_i \dot{u}_i - \alpha_i |\dot{u}_i|^{n_i-1} z_i - \beta_i \dot{u}_i |z_i|^{n_i} \quad (13)$$

ただし、 z_i および u_i はそれぞれ $i-1$ 番目の層と i 番目の層の間の層間復元力および層間変位である。また、 k_i は初期剛性を示す線形パラメータ、 α_i 、 β_i および n_i は非線形パラメータである。

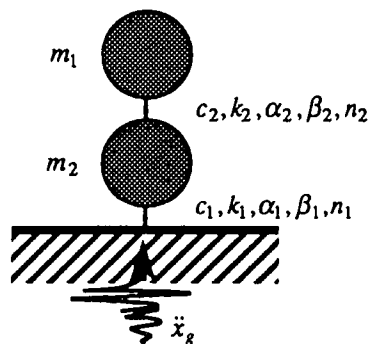


図-2 2自由度構造モデル

表-1は各パラメータの諸元値を表している。以上に示したモデルに、El Centro加速度観測記録を最大加速度25galに調整したものを入力し、Runge-Kutta法を用いて応答計算を行った。そして、各応

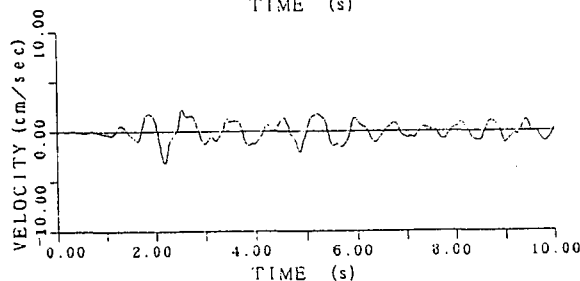
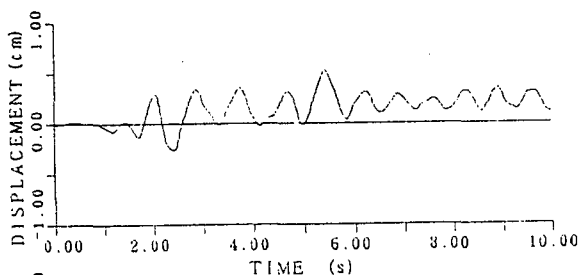
答値に観測雑音を付加したものを観測波とした。ただし、観測雑音量は応答値と観測雑音の標準偏差の比を用いて次式で定義する。

$$v = \frac{\sigma_{noise}}{\sigma_{resp.}} \times 100 \quad (\%) \quad (14)$$

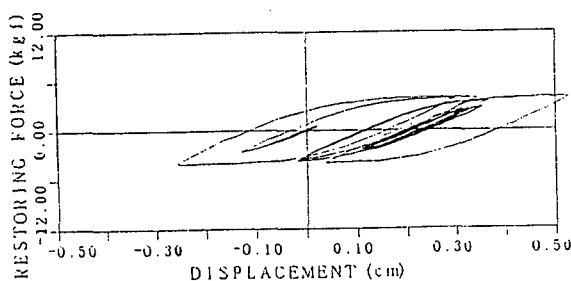
ここに、 $\sigma_{resp.}$ は雑音を含まない真の応答値の標準偏差、 σ_{noise} は観測雑音として応答値に付加した白色雑音の標準偏差である。図-3に観測波である応答変位および応答速度（一部）と真の履歴曲線を示す。図によれば、特に応答変位に残留変位があり、強い非線形性を示していることが分かる。

表-1 構造物の諸元値

	1 階	2 階
質量 (kg)	0.12553	0.12553
初期剛性 (kg/sec ²)	24.5	24.5
減衰定数	0.02	0.02
パラメータ α_i	1.0	1.0
パラメータ β_i	0.5	0.5
パラメータ n_i	2	2



(a) 観測波



(b) 履歴曲線

図-3 非線形2自由度系の応答計算値
(1階; 観測雑音量=1%)

上で作成した観測波を基に、構造系の動特性の同定を行った。同定時に仮定するモデルとして式(13)で $z = K(t)\eta$ とおいた線形構造系および式(13)の非線形構造系の2種類を採用する。また、本解析では質量 M は既知であると仮定する。粘性減衰係数および初期剛性を直接同定する代わりに、次式で与えられる各階の減衰定数 $h_i(t)$ と固有円振動数 $\omega_i(t)$ を考えるものとする。

$$h_i(t) = \frac{c_i(t)}{2\sqrt{m_i k_i(t)}}, \omega_i(t) = \sqrt{\frac{k_i(t)}{m_i}} \quad (15)$$

ただし、 $i=1,2$ である（以下同じ）。ここで、状態量とのパラメータを直列に並べた状態ベクトルを考える。線形構造系を仮定する場合は次式のようになる。

$$x = \{\dots \eta_i \dot{\eta}_i h_i \omega_i \dots\}^T \quad (16)$$

一方、非線形構造系を仮定する場合には次式となる。

$$x = \{\dots \eta_i \dot{\eta}_i z h_i \omega_i \alpha_i \beta_i \dots\}^T \quad (17)$$

このとき、運動方程式等を用いて、 x に関する状態空間方程式が以下のように得られる。

$$\dot{x} = g(x) \quad (18)$$

上式は x に関する非線形関数であるが、近似的に上述の理論に適用できる⁴⁾。ただし、時間更新の式は式(18)を直接数値積分した次式を用いる。

$$\bar{x}_i = \hat{x}_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^t g(\hat{x}_{i-1}) dt \quad (19)$$

同定の初期値は真値の50%とし、推定誤差共分散の初期値および観測誤差共分散は次式で与えた。

$$P_0 = \text{diag}\{\dots p x_{0,i}^2 \dots\}, i=1 \dots n \quad (20)$$

$$R = rI \quad (21)$$

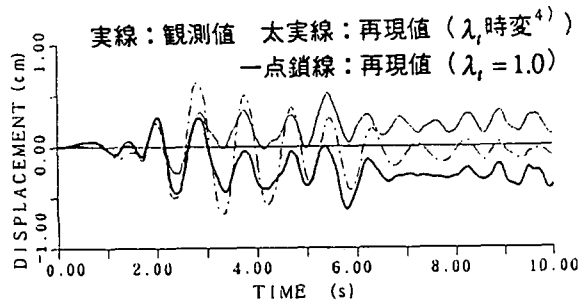
ただし、 $x_{0,i}$ は初期値 $\hat{x}_0$ の第 i 要素を示す。本解析では、 $p=r=0.01$ とした。解析に際して、以下の3ケースを考える。

ケース1：線形構造系を仮定して同定を行う場合

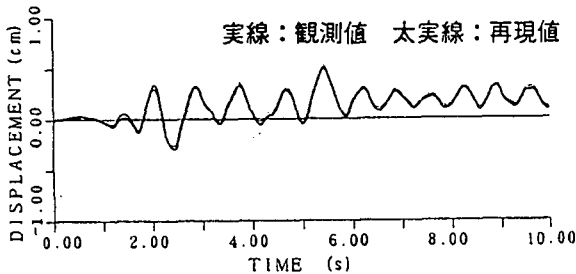
ケース2：非線形構造系で $n_i=2$ が既知であると仮定した場合

ケース3：非線形構造系で $n_i=1$ と仮定した場合

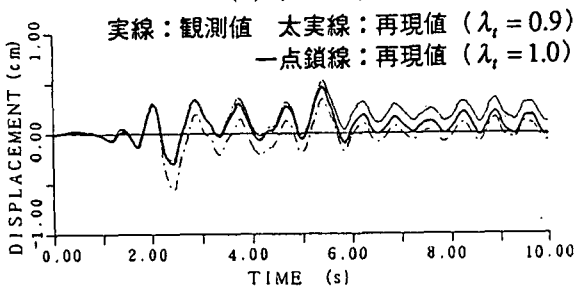
図-4は各ケースについて、得られた同定値を用いて再度応答計算を行った場合の応答変位の再現性を比較したものである。また、ケース1およびケース3では、適応型カルマンフィルターを用いた場合と通常のカルマンフィルターを用いた場合の比較を行っている。モデル化が最も正確なケース2の場合がよい再現性を示している。また、ケース3で適応型カルマンフィルターを用いた場合に、比較的よい再現性を示している。しかし、モデル化誤差の大きいケース1については、適応型カルマンフィルターを用いた場合でも、残留変位の傾向を追うことはできていない。



(a) ケース 1



(b) ケース 2



(c) ケース 3

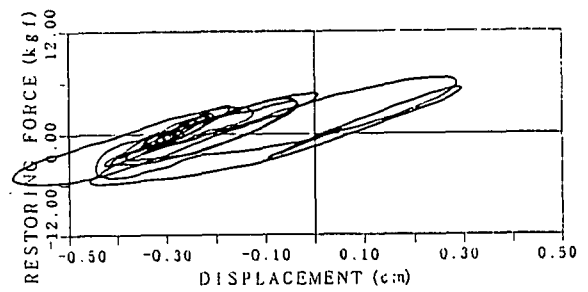
図-4 同定値を用いた再現波形 (1 階)

次に各ケースについて再現された履歴曲線を図-5に示す。明らかにケース2の再現性がよいが、ケース3で適応型カルマンフィルターを用いた場合にもよい再現性を示していることが分かる。一方、ケース1については、上で見たように、残留変位の傾向をとらえられないために、履歴曲線の再現は十分とは言えない。以上より、非線形性の強い構造系を線形構造系で同定するのは困難であると言える。しかし、非線形構造系を仮定した場合には、モデル化に若干誤差がある場合も、適応型カルマンフィルターを用いることで精度よい同定が行えると言える。

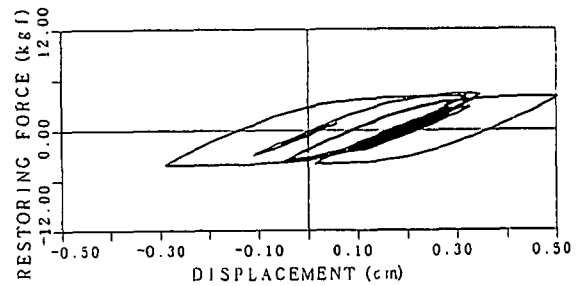
5. まとめ

本研究では、地震荷重化で非線形応答を示す構造系の動特性を、適応型カルマンフィルターを用いて同定する手法を提案し、同定時のモデル化誤差の視点からその適用性について考察を加えた。以下は本報文の結論である。

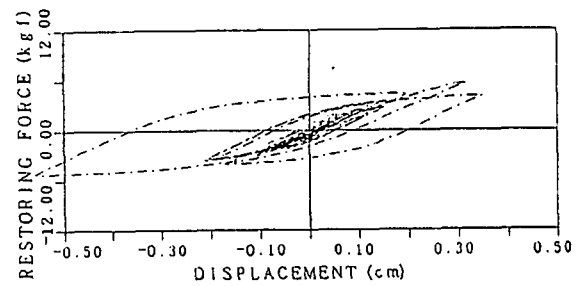
非線形性の強い構造系を対象としてその動特性の同定を行う場合には、非線形構造モデルを用いる必要がある。ただし、同定時に想定するモデルを非線



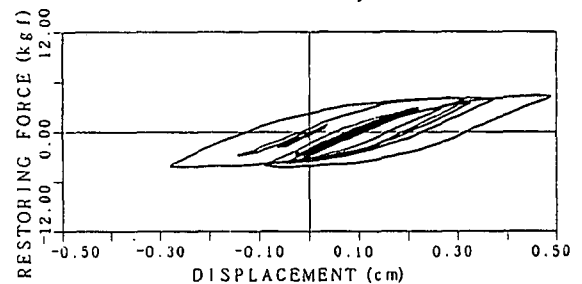
(a) ケース 1 (λ_t 時変⁴)



(b) ケース 2



(c) ケース 3 ($\lambda_t = 1.0$)



(d) ケース 3 ($\lambda_t = 0.9$)

図-5 再現された履歴曲線 (1 階)

形かつ非定常な構造系とすることで、モデル化に誤差を含む場合にも対処することができた。

参考文献

- 1) 星谷勝・斉藤悦郎：データ解析と応用 鹿島出版会、1991.
- 2) 吉田郁政・星谷勝：既知条件の不確定性を考慮した逆解析、土木学会論文集、第501号/I-29, pp.213-216.1994.
- 3) Y.-K. Wen: Method for random vibration of hysteretic systems, J. Engrg. Mech, ASCE, Vol.102, No.EM2, pp.249-263.1976.
- 4) 佐藤忠信・竹井賢二：適応型カルマンフィルターの構築とその応用、土木学会論文集投稿中