

# ランダムに生起するインパルス列のスペクトル特性について

盛川 仁<sup>1</sup>・澤田純男<sup>2</sup>・土岐憲三<sup>3</sup>・金子康史<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 京都大学助手 工学研究科土木システム工学専攻 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

<sup>2</sup>正会員 工博 京都大学助教授 防災研究所 (〒611 宇治市五ヶ庄)

<sup>3</sup>フェロー 工博 京都大学教授 工学研究科土木システム工学専攻 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

<sup>4</sup>学生会員 京都大学大学院 (〒606-01 京都市左京区吉田本町)

インパルス列によって駆動されるシステムの出力として得られる時系列波形からインパルス列とシステム応答関数を分離することを念頭におき、時間軸上でランダムに発生するインパルス列のフーリエ振幅スペクトルおよび群遅延時間スペクトルの確率論的性質を明らかにする。その結果、(1) フーリエ振幅スペクトルについては、振動数が大きい範囲でその平均と分散は振動数に依存せず、かつインパルスの大きさと本数のみの関数となること、(2) 群遅延時間スペクトルについては、その平均と分散が振動数に依存しないだけでなく、もとのインパルス列の発生時刻の確率分布と一致することが明らかとなった。これより、一つのサンプル時系列から、もとのインパルス列を規定する3つのパラメータ、すなわち、インパルスの発生時刻の確率分布、インパルスの個数、大きさの同定が可能となった。

**KeyWords** : Group delay time, Fourier spectrum, impulses train, Gaussian distribution, mean value, standard deviation, probability density function, log amplitude

## 1. はじめに

ある地点での地震動を評価しようとした場合、震源と伝播特性、あるいは散乱現象における散乱源とそこから観測点までのパスの影響といったインパルス列とインパルス応答関数の合積で表現される時系列波形を取り扱う必要がしばしば生ずる。その際、インパルス列とインパルス応答関数を分離することは、現象を理解する上でも非常に重要な課題である。この種の問題はこれまでも種々の手法が提案されてきており<sup>1),2)</sup>、理論的には可能であることが示されているが、実際の解析において合理的な結論に達するためには、解析者の主観によらざるを得ない場合が多かった。

本研究では、時間軸上でランダムに発生するインパルス列とインパルス応答関数の合積で表現される時系列波形から、インパルス列とインパルス応答関数を分離するための手法について確率論的考察を展開する。すなわち、時間軸上でランダムに発生するインパルス列のフーリエスペクトルの確率論的特性を明らかにし、インパルス列の特性を規定するパラメータの同定法を示す。特に、時系列波形の位相特性については、取り扱いが容易な群遅延時間<sup>3),4),5)</sup>を導入することで見通しのよい結論を誘導する。このことにより、これまで

の分離手法に見られた解析者に依存するある種の任意性を取り除き合理的な手法を導くことが可能となる。

## 2. インパルス列のフーリエスペクトル

時間軸上の任意の時刻  $t = t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) において、大きさ  $\alpha$  をもつインパルスが  $n$  個発生したとすると、時系列波形  $h(t)$  は、Dirac のデルタ関数を用いて  $h(t) = \sum_{k=1}^n \alpha \delta(t - t_k)$  と表される。 $\delta(t - t_k)$  のフーリエ変換が  $\exp[-i\omega t_k]$  であることに注意して、 $h(t)$  のフーリエ変換  $H(\omega)$  を求めると、

$$H(\omega) = \alpha \sum_{k=1}^n \exp[-i\omega t_k] \quad (1)$$

となる。 $H(\omega)$  を振幅  $A(\omega)$  と偏角  $\phi(\omega)$  を用いて、 $H(\omega) = A(\omega) \exp[-i\phi(\omega)]$  と書き改めると、

$$A(\omega) = \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \cos \omega(t_k - t_l)} \quad (2a)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\sum_{k=1}^n \sin \omega t_k}{\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k} \quad (2b)$$

である。このとき  $h(t)$  の群遅延時間スペクトル  $t_{gr}(\omega)$  は、以下のようになる。

$$t_{gr}(\omega) = \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_k \cos \omega(t_k - t_l)}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \cos \omega(t_k - t_l)} \quad (3)$$

さて、インパルスの発生時刻  $t_k$  が期待値  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  の正規乱数に従う場合を考える。このとき、 $A^2(\omega)$  及び  $t_{gr}(\omega)$  のアンサンプルの意味での期待値及び分散は、以下のように求められる。

$$E[A^2(\omega)] = \alpha^2 n + \alpha^2 (n^2 - n) \cdot \exp\left[-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right] \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \approx \alpha^2 n & (\text{if } \omega \gg 0) \\ = \alpha^2 n^2 & (\text{if } \omega = 0) \end{cases}$$

$$Var[A^2(\omega)] = \alpha^4 n(n-1) + \alpha^4 n(n-1) \cdot \exp[-\sigma^2 \omega^2] \{ \exp[-\sigma^2 \omega^2] - 2 \} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} \approx \alpha^4 n(n-1) & (\text{if } \omega \gg 0) \\ = 0 & (\text{if } \omega = 0) \end{cases} \quad (4c)$$

$$E[t_{gr}(\omega)] = E[t_k] = \mu \quad (4c)$$

$$Var[t_{gr}(\omega)] = Var[t_k] = \sigma^2 \quad (4d)$$

ここで  $E[\ ]$ ,  $Var[\ ]$  はそれぞれ期待値と分散を表す。式(4a), (4b)において、 $n$  があまり大きくない場合には  $\omega$  が大きいところで近似式が成立する。このことは、 $\omega$  が十分に大きい領域では  $A^2(\omega)$  の期待値及び分散が振動数に依存しないことを示しており、振動数軸方向に算術的に求められた平均・分散が、アンサンプルの意味での期待値・分散に一致する。従って、ある一つのサンプル時系列波形が与えられれば、そのフーリエ振幅スペクトルの振動数軸上で算術的に平均・分散を求めることにより、 $E[A^2(\omega)]$  及び  $Var[A^2(\omega)]$  を推定することができる。また、式(4a), (4b)において  $\omega = 0$  とすると  $A^2(\omega)$  は確定的に  $\alpha^2 n^2$  となることがわかる。

一方、式(4c), (4d)は、群遅延時間スペクトルの期待値と分散が振動数に依存しないだけでなく、もとのインパルス列におけるインパルスの発生時刻の期待値と分散を与えることを示している。このことは、サンプル時系列の群遅延時間スペクトルを振動数軸上で算術的に平均と分散を求めることにより、インパルスの発生時刻の期待値と分散を直接求めることができることを意味している。

以上の性質を簡単な数値計算によって確かめる。図-1に  $\mu = 30, \sigma = 5$  の正規乱数を用いて発生させたインパルス列のサンプルを示す。インパルス列の個数  $n = 10$ 、インパルスの大きさ  $\alpha = 1.0$  とした。このサンプル時系列のインパルス発生時刻の標本平均及び標本標準偏差

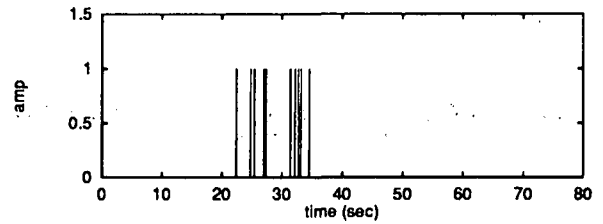


図-1 インパルス列のサンプル

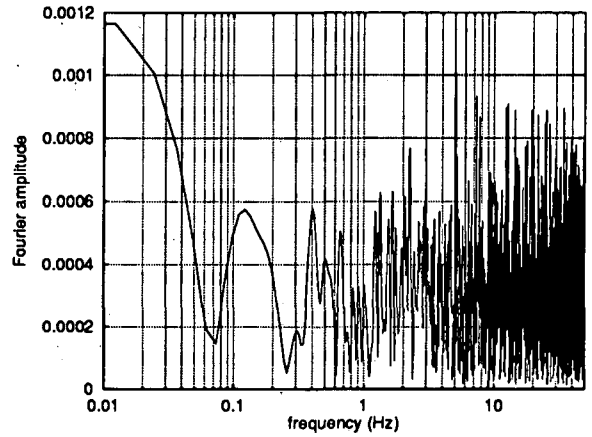


図-2 インパルス列のフーリエ振幅

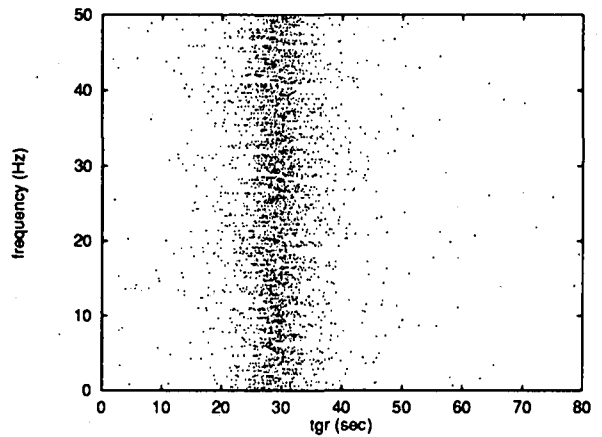


図-3 インパルス列の群遅延時間

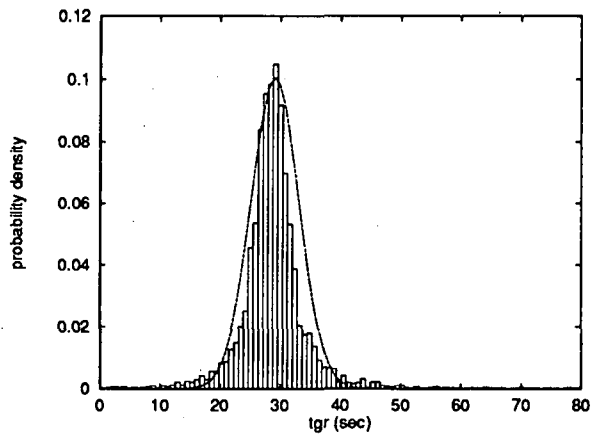


図-4 群遅延時間の頻度分布とインパルス列の発生時刻の確率密度関数(破線)

表-1 理論解析から得られる平均・分散と標本平均・分散の比較

	Analytical	Sample
Target of $\mu$	30	29.12
Target of $\sigma$	5	3.972
$A^2(0)$	$1.490 \times 10^{-6}$	$1.490 \times 10^{-6}$
$E[A^2(\omega)]$ ( $\omega \geq 10\text{Hz}$ )	$1.490 \times 10^{-7}$	$1.492 \times 10^{-7}$
$\text{Var}[A^2(\omega)]$ ( $\omega \geq 10\text{Hz}$ )	$1.998 \times 10^{-14}$	$1.917 \times 10^{-14}$
$E[t_{gr}(\omega)]$	29.12	29.15
$\text{Var}[t_{gr}(\omega)]$	3.972	7.674

はそれぞれ 29.127, 3.9724 である。図-2 および 3 は高速フーリエ変換 (FFT) を用いて計算したサンプル列のフーリエ振幅と群遅延時間である。表-1 に式 (4) を使って求められたフーリエ振幅と群遅延時間の平均及び分散とサンプル列から求められた標本平均・分散を列挙した。フーリエ振幅の標本平均・分散は式 (4a), (4b) の近似が成立するよう、10Hz 以上のフーリエ振幅のみを用いている。これより、標本平均および分散がターゲットを良く再現していることがわかる。群遅延時間の分散がターゲットに比べてやや大きい値を示しているが、これは群遅延時間が有界ではなく、ごく希に非常に極端な値をとる場合があるためそれに引きずられる形で分散が大きくなっているものと考えられる。図-4 に図-3 に示した群遅延時間から求めた頻度分布と、サンプル時系列のインパルスの発生時刻の標本平均・分散を有するガウス関数を重ねて表示した。この図より、群遅延時間の頻度分布の方がターゲットのガウス関数に比べてやや裾が重い傾向は見られるものの、おおむね良い一致を示していることがわかる。

### 3. インパルス列を規定するパラメータの同定

インパルス列はインパルスの発生時刻  $t_k$ , 個数  $n$ , 大きさ  $\alpha$  という 3 つのパラメータによって規定される。インパルス列とインパルス応答関数の合積によって得られる時系列波形  $x(t)$  からこれらのパラメータを推定することにより、インパルス列を分離することが可能となる。

インパルス応答関数の群遅延時間スペクトル  $t_{gr}(\omega)$  は一般には微小なものとなるので、 $x(t)$  の  $t_{gr}(\omega)$  はすべてインパルス列によって生じているとみなすことができる。従って、前節での議論より、サンプル時系列  $x(t)$  の  $t_{gr}(\omega)$  の振動数軸上での標本平均・分散を求めることにより、インパルスの発生時刻の期待値と分散を推定することができる。

次に、 $\alpha$  と  $n$  の決定法について議論する。フーリエ振

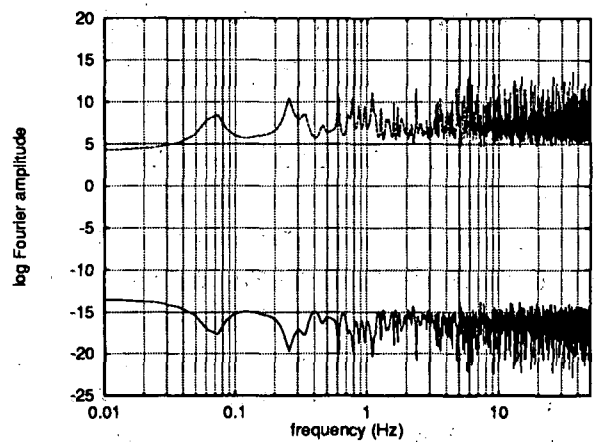


図-5 サンプル時系列の対数振幅スペクトル (実線:  $\alpha = 1$ , 破線:  $\alpha = 100$ )

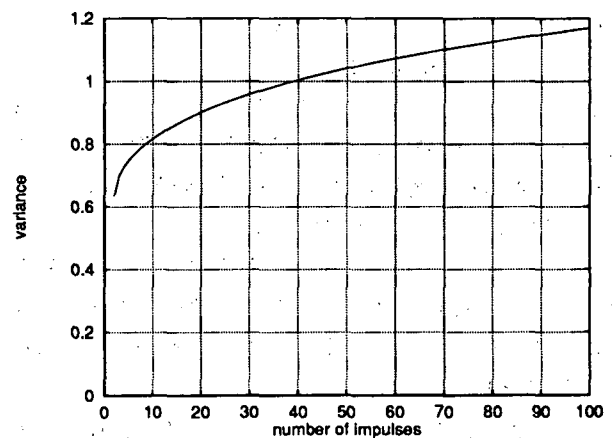


図-6 インパルス列の個数  $n$  と対数フーリエ振幅の分散

幅スペクトル  $A(\omega)$  の確率論的性質は、式 (4a), (4b) に見られるとおり、 $\alpha$  と  $n$  によって規定される。また、式 (2a) をみると  $A(\omega)$  は、中心極限定理により正規確率変数とみなせることがわかる。ある振動数  $\omega$  におけるフーリエ振幅スペクトルを平均  $\mu_2$ , 標準偏差  $\sigma_2$  の正規確率変数  $X$  を用いて  $\alpha X$  とおくと、その対数  $Y \equiv \ln(\alpha X)$  の確率密度関数は、

$$f_Y(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi\alpha\sigma_2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{e^y - \alpha\mu_2}{\alpha\sigma_2} \right)^2 \right] \quad (5)$$

となる。このとき  $Y$  の一次及び二次のモーメントは、 $\alpha = 1$  の場合のモーメント  $E[Y|_{\alpha=1}]$ ,  $E[Y^2|_{\alpha=1}]$  を用いて、

$$E[Y] = \ln \alpha + E[Y|_{\alpha=1}] \quad (6a)$$

$$E[Y^2] = (\ln \alpha)^2 + 2E[Y|_{\alpha=1}] \cdot \ln \alpha + E[Y^2|_{\alpha=1}] \quad (6b)$$

となり、 $Y$  の分散は、

$$\text{Var}[Y] = \text{Var}[Y|_{\alpha=1}] \quad (7)$$

が成立する。従って、フーリエ振幅スペクトルの対数の分散は、 $\alpha$  に依存せず、インパルスの個数  $n$  のみの関

表-2 対数フーリエ振幅の標本平均と分散

	$\alpha = 1$	$\alpha = 100$
$E[\ln A^2(\omega)]$	-16.25	7.041
$Var[\ln A^2(\omega)]$	1.519	1.519

数となる。このことより、対数振幅スペクトルの高振動数領域で、振動数軸上で算術的に分散を計算することにより、 $n$  を決定できることがわかる。

図-1のサンプル時系列の大きさを $\alpha = 1$ および $\alpha = 100$ としたときの対数フーリエ振幅を図-5に示す。実線が $\alpha = 1$ 、破線が $\alpha = 100$ で、対数をとったときの符号の関係で鏡像となっているが、 $\alpha$ の違いは縦軸の位置の違いとしてのみ現れている。表-2に $\alpha = 1$ と $\alpha = 100$ の場合の標本平均・分散を示す。これより、対数フーリエ振幅の標本分散は $\alpha$ の値によらず完全に一致していることがわかる。よって、図-6に示すインパルスの個数 $n$ と式(5)から得られる分散の関係を用いて、対数フーリエ振幅の高振動数領域での標本分散を求めれば、 $n$ を一意に決定することができる。

また、式(4a)、(4b)に見られるとおり、 $\omega = 0$ におけるフーリエ振幅スペクトルの値が確定的に $\alpha^2 n^2$ となることを利用して、上で得られた $n$ を使って $\alpha$ も求めることができる。

以上のようにして、インパルス列を規定する3つのパラメータを同定することができるため、インパルス列とインパルス応答関数の合積として表現される時系列関数をそれぞれに分離することが可能となった。ところが、インパルス列のパラメータの同定にあたって、以下のような問題が存在することが明らかとなった。ひとつは、表-1に見られるとおり、サンプル時系列のインパルス発生時刻の分散の評価において、群遅延時間の標本分散をもってしても必ずしも高い精度で求められるとは限らないということである。もうひとつは、インパルスの個数 $n$ と対数フーリエ振幅の分散の関係を見るとわかるように(図-6)、 $n$ に対する分散の変化量が非常に小さいため標本分散のわずかな違いが $n$ の推定結果に大きな影響を及ぼすことである。特に、イン

パルス列とインパルス応答関数の分離を行うにあたって、 $n$ の推定精度が全体の精度を規定するため、後者の問題は極めて重要である。よって、フーリエ振幅の標本分散をいかに精度良く決定するか、について今後議論を進めて行く必要があると考えている。

#### 4. まとめ

時間軸上でランダムに発生するインパルス列によって駆動されるシステムの出力として観測される時系列波形から、もとのインパルス列のパラメータ、すなわち、インパルスの発生時刻、個数、大きさの3つを推定する手法を確立した。これにより、あるひとつのサンプル時系列から、もとのインパルス列の確率的性質が推定されるため、システムを表すインパルス応答関数を観測された時系列波形から分離することが可能となる。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、早稲田大学の曾田五月也教授には多くの議論をしていただいた。記して感謝の意を表する次第である。

#### 参考文献

- 1) 城戸健一：デジタル信号処理入門，丸善，pp.152-169，1985.
- 2) 佐藤忠信，土岐憲三，石塚 憲：ホモロフィックフィルタを用いた地震動位相特性の抽出，京都大学防災研究所年報，第31号B2，pp.39-66，1988.
- 3) 大崎順彦，岩崎良二，大川 出，政尾 亨：地震波の位相特性とその応用に関する研究，第5回日本地震工学シンポジウム講演集，pp.201-207，1978.
- 4) 和泉正哲，勝倉 裕：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会論文報告集，第327号，pp.20-27，1983.
- 5) 曾田五月也：非定常ランダム振動解析に対する位相傾斜の確率特性の応用に関する基礎的研究，日本建築学会構造系論文報告集，第365号，pp.48-57，1986.