

1. はじめに

マイクロゾーニングなど広範囲の地盤特性の分布を推定するために、常時微動を用いた簡便な推定方法が広く行われている。この目的には、常時微動の堆積層上/露頭岩盤上のスペクトル比と水平動/上下動のスペクトル比(QTスペクトル)の2つがよく用いられる。

ところで、常時微動のような定常確率過程のスペクトル推定値は確率変数であることから、確率分布に基づく誤差理論が展開されており(e.g. 日野 1977)、スペクトル比においても同様な検討が必要である。このことから本研究では、スペクトル比をとる2つの常時微動が互いに独立な定常確率ガウス過程であることを仮定し、パワースペクトル比、フーリエスペクトル比の確率分布について解析的に検討を加えた。

2. パワースペクトル推定値の確率分布

常時微動は定常確率ガウス過程として理想化することができる(星谷 1977)。このとき、常時微動の時刻歴波形 $a(t)$ は次のように表される。

$$a(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) \quad (1)$$

ここで、 ω_j は第 j 番目の角振動数、 A_j 、 B_j は互いに独立で、分散が等しく、期待値が0の正規確率変数である。このとき、式(1)で表される時刻歴波形の片側パワースペクトルの第 j 振動数成分 s_j は

$$E \left[\frac{A_j^2 + B_j^2}{2} \right] = s_j \Delta \omega \quad (2)$$

で表される。上式で、 E はアンサンブル平均をとることを意味する。

式(2)に示されるように、生スペクトル(一つのサンプルから求めたスペクトル)は二つの独立な正規確率変数の2乗和であることから、自由度 $n=2$ の χ^2 分布に従う確率変数である。また、 k 個のサンプルの平均をとったときには自由度 $n=2k$ の χ^2 分布に従い、この場合のパワースペクトル推定値 X の確率密度関数は次式で表される。

$$f_X(x) = \frac{k^k}{\mu^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp(-kx/\mu) \quad (3)$$

ここで、 μ はパワースペクトルの真値である。また、式(3)の分散 σ^2 は次式で与えられ、サンプル数 k を増やすことで推定値の分散を低減することができる。

$$\sigma^2 = \mu^2/k \quad (4)$$

3. 等価サンプル数

スペクトルの推定に際して、複数サンプル間の単純平均(アンサンブル平均)だけでなく、同一サンプル内の近い周波数成分間で加重平均をとるのが一般的である。この場合もパワースペクトル推定値の分散は低減されるが、その確率密度関数は式(3)のようにサンプル数 k を含んだ形で表すことができないため、前節のような確率密度関数に基づく議論はできない。

しかし、独立な確率変数の和の期待値、分散はそれぞれ、各確率変数の期待値、分散の和であるから、 I 個のパワースペクトル値 X_i を重み係数 w_i ($\sum_{i=1}^I w_i = 1$) で加重平均したときのパワースペクトル推定値 Z の期待値 μ_Z と分散 σ_Z^2 は、

$$\mu_Z = E \left(\sum_{i=1}^I w_i X_i \right) = \mu_X \sum_{i=1}^I w_i = \mu_X \quad (5)$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^I \sigma^2(w_i X_i) = \sigma_X^2 \sum_{i=1}^I w_i^2 \quad (6)$$

で表される。ここで、 $\sigma^2(\cdot)$ は分散をとる演算を意味する。また上式では、スペクトルの真値は滑らかであること、つまり、平均される各確率変数(生スペクトルの各周波数成分)の期待値と分散はそれぞれ、すべて等しく μ_X 、 σ_X^2 であることを仮定している。

ここで、生スペクトルのサンプル数は $k=1$ であるから、式(4)より $\mu_X^2/\sigma_X^2 = 1$ である。また、加重平均の場合の期待値と分散が式(4)の関係を満たすように等価サンプル数 k_e を定義すれば次式を得る。(e.g. 日野 1977)。

$$k_e = \frac{\mu_Z^2}{\sigma_Z^2} = \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2 \sum w_i^2} = \frac{1}{\sum w_i^2} \quad (7)$$

4. パワースペクトル比の推定値の確率分布

χ^2 分布に従う、2つの独立な確率変数 X 、 Y の比、 $U=Y/X$ の確率密度関数は次式で表される(依田 1966)。

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_X\left(\frac{\xi}{u}\right) f_Y(\xi) \frac{\xi}{u^2} d\xi \quad (8)$$

式(8)に式(3)を代入し積分を実行すれば、F分布と呼ばれる、パワースペクトル比の確率密度関数、

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(k_X + k_Y) k_X^{k_X} k_Y^{k_Y} \mu_X^{k_X} \mu_Y^{k_Y}}{\Gamma(k_X) \Gamma(k_Y) u^{k_Y-1} (k_X \mu_Y + k_Y \mu_X u)^{k_X+k_Y}} \quad (9)$$

表 1. パワースペクトル比 ($U = Y/X$) の期待値, 分散, %位値 ($\mu_X = \mu_Y = 1, k_X = k_Y$)

サンプル数 $k_X = k_Y$	期待値 μ_U	分散 σ_U^2	%位値						
			5%	10%	20%	50%	80%	90%	95%
2	2.000000	∞	0.156538	0.243472	0.402801	1.000000	2.482613	4.107250	6.388233
3	1.500000	3.750000	0.233434	0.327380	0.484997	1.000000	2.061869	3.054551	4.283866
4	1.333333	1.555556	0.290858	0.386197	0.538683	1.000000	1.856379	2.589349	3.438101
5	1.250000	0.937500	0.335769	0.430551	0.577502	1.000000	1.731595	2.322604	2.978237
6	1.200000	0.660000	0.372213	0.465671	0.607368	1.000000	1.646447	2.147437	2.686637
7	1.166667	0.505556	0.402621	0.494454	0.631328	1.000000	1.583963	2.022434	2.483726
8	1.142857	0.408163	0.428544	0.518651	0.651137	1.000000	1.535775	1.928079	2.333484
9	1.125000	0.341518	0.451020	0.539397	0.667892	1.000000	1.497247	1.853923	2.217197
10	1.111111	0.293210	0.470775	0.557462	0.682320	1.000000	1.465588	1.793843	2.124155
12	1.090909	0.228099	0.504093	0.587594	0.706063	1.000000	1.416303	1.701854	1.983760

を得る。ここで、サンプル数 k , 平均値 (真値) μ の添字 X, Y はそれぞれ、分母 X , 分子 Y に関する値であることを意味する。図 1 は $k_X = k_Y = 1, 2, 3, 5, 10$ として、確率密度関数 (式 (9)) をプロットしたものである。

この確率変数 U の期待値 μ_U , μ_U 廻りの分散 σ_U^2 , 真値 μ_Y/μ_X 廻りの分散 $\sigma_{Y/X}^2$, 確率分布関数 $F_U(u)$ はそれぞれ、次のように表される。

$$\mu_U = \frac{\mu_Y}{\mu_X} \cdot \frac{k_X}{k_X - 1} \quad (10)$$

$$\sigma_U^2 = \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2} \cdot \frac{k_X^2(k_X + k_Y - 1)}{k_Y(k_X - 1)^2(k_X - 2)} \quad (11)$$

$$\sigma_{Y/X}^2 = \frac{\mu_Y^2}{\mu_X^2} \cdot \frac{k_X^2 + k_X k_Y + 2k_Y}{k_Y(k_X - 1)(k_X - 2)} \quad (12)$$

$$F_U(u) = \frac{\Gamma(k_X + k_Y)}{\Gamma(k_X)\Gamma(k_Y)} \cdot \sum_{r=0}^{k_Y-1} (-1)^r \frac{k_Y-1}{k_X+r} \cdot \left\{ 1 - \left(1 + \frac{k_Y \mu_X}{k_X \mu_Y} u \right)^{-k_X-r} \right\} \quad (13)$$

表 1 は、式 (10)~式 (13) を用いて、 $k_X = k_Y$ の場合について期待値, 分散, %位値を計算したものである。

これらの結果から、次のことが指摘できる。

(1) 期待値 μ_U は、真値 μ_Y/μ_X よりも常に大きい、分母スペクトルのサンプル数 k_X を増やすと、期待値は真値に漸近する。

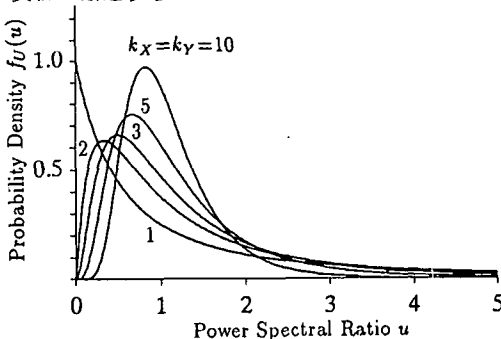


図 1. パワースペクトル比の確率密度関数 ($\mu_X = \mu_Y = 1, k_X = k_Y = 1, 2, 3, 5, 10$)

表 2. 加重平均によるパワースペクトル比のシミュレーション結果

Case	Hanning Window		μ_U	σ_U^2	k_e	
	X(times)	Y(times)			X	Y
A	1	1	1.543	3.678	2.667	2.667
B	2	2	1.346	1.498	3.657	3.657
C	3	3	1.334	1.353	4.433	4.433
D	5	5	1.203	0.648	5.675	5.675
E	7	7	1.176	0.502	6.691	6.691
F	9	1	1.158	0.780	7.572	2.667

(2) 期待値が分母スペクトルのサンプル数のみに影響されるのに対して、分散は分母, 分子両スペクトルのサンプル数に影響される。

(3) 期待値 μ_U は分母スペクトルのサンプル数が $k_X = 1$ のときに、分散は $k_X = 1, 2$ のときに発散する。

(4) 期待値がサンプル数によって変化するのに対して、50%位値 (中央値) は一定でかつ真値 μ_Y/μ_X に等しい (ただし、後に図 2 に示すように、 $k_X = k_Y$ の時)。

(5) 変動係数 $\sigma_U = \sigma_U/\mu_U$ は、

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{k_X + k_Y - 1}{k_Y(k_X - 2)}} \quad (14)$$

であるから、パワースペクトルの変動係数 $\sqrt{1/k_X}$, $\sqrt{1/k_Y}$ よりも常に大きく、パワースペクトルの推定時に誤差範囲に対して注意が必要である。

5. 加重平均によって求めたパワースペクトルの比の推定値の確率分布

加重平均を用いて推定したパワースペクトルの確率密度関数が複雑であるため、その比の確率密度関数や期待値, 分散などを解析的に求めることは難しい。このため、モンテカルロ・シミュレーションを用いて検討した。

モンテカルロ・シミュレーションでは、発生させた 2 つの疑似正規乱数の 2 乗和が 1 つの生スペクトル値に相当する。連続的に作成したこの値を、重み係数を用いて平均した後に比を求め、1 回の試行が完了する。各ケースでこの試行を 10,000 回ずつ行い、期待値, 分散, 10%, 50%, 90% 位値を求めた。表 2 に加重平均

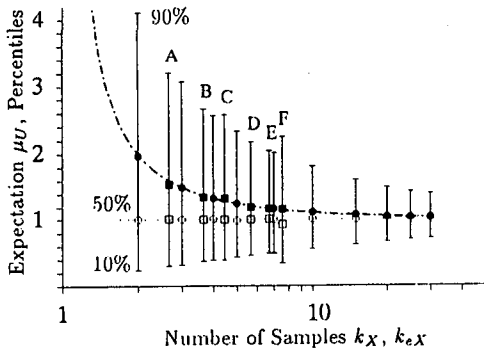


図 2. パワースペクトル比の期待値 (解析解) と 10%, 50%, 90% 位値 (シミュレーション)

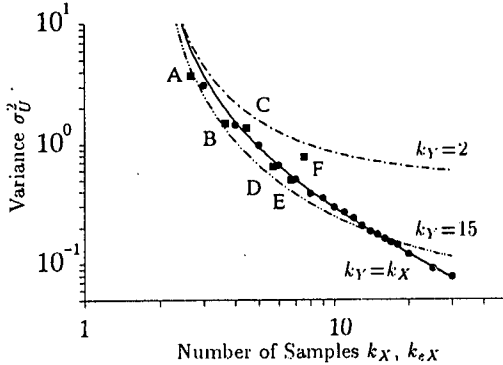


図 3. 加重平均によるパワースペクトル比の分散 (解析解とシミュレーション)

の場合のシミュレーションの条件と得られた期待値、分散を示す。

図 2 は、シミュレーションによって得られた期待値、10%、50%、90% 位値の結果を、分母スペクトルの (等価) サンプル数に対してプロットしたものである。図中、黒四角形、白四角形がそれぞれ加重平均の場合の期待値と 50% 位値 (中央値)、丸が単純平均の場合のシミュレート結果であり、さらに実線で 10%、90% 位値を示している。また、一点鎖線は単純平均の場合の解析解、式 (10) を示したものである。図 3 は分散の解析解 (実線 $k_Y = k_X$ 、一点鎖線 $k_Y = 2$ 、二点鎖線 $k_Y = 15$) とシミュレート結果を、図 2 と同様に k_X の関数として示したものである。

図 2、3 では期待値 μ_U 、分散 σ_U^2 の単純平均の場合の解析解と加重平均による結果がよく一致している。このことから、等価サンプル数 k_e を用いることで、加重平均の場合の期待値と分散の評価に際して、単純平均の場合の式が適用できることがわかる。

6. フーリエスペクトルの推定方法

式 (3) のパワースペクトルの確率密度関数において、サンプル数 $k=1$ を代入し、変数変換 $X=Q^2$ を施すと、

生フーリエスペクトルの確率密度関数として次式のレーリー分布が得られる。

$$f_Q(q) = \frac{2q}{\mu} \exp(-q^2/\mu) \quad (15)$$

ここで、 μ はパワースペクトルの推定値 X の平均値である。この分布の期待値は $\mu_Q = \sqrt{\pi\mu}/2$ で与えられる。すなわち、1 サンプルから求められるフーリエスペクトルの期待値は、パワースペクトルの期待値 (真値) の平方根 $\sqrt{\mu}$ と一致しない。

推定精度を上げるために、フーリエスペクトルを各サンプルごとに求めてから平均をとっても期待値は $\sqrt{\pi\mu}/2$ のまま変わらず、パワースペクトルの真値とフーリエスペクトルの推定値の対応が悪い。また、フィルター操作 (加重平均) はパワースペクトルに行うのが一般的である。このような理由からここでは、単純、加重平均どちらもパワースペクトルに対して行い、フーリエスペクトルは、推定されたパワースペクトルから求めるものと定義した。

上記のようにフーリエスペクトルを求める場合、期待値、分散はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \mu_Q &= \frac{2k^k}{\mu^k \Gamma(k)} \int_0^\infty q^{2k} \exp(-kq^2/\mu) dq \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k \Gamma(k)} \sqrt{\frac{\pi\mu}{k}} \rightarrow \sqrt{\mu} \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Q^2 &= \frac{2k^k}{\mu^k \Gamma(k)} \int_0^\infty q^{2k+1} \exp(-kq^2/\mu) dq - \mu_Q^2 \\ &= \mu - \mu_Q^2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) に示されるように、フーリエスペクトルの期待値はパワースペクトルの真値 (期待値) の平方根に一致するわけではないが、サンプル数 k を増加させることで、パワースペクトルの真値の平方根に収束する。

7. フーリエスペクトル比の推定値の確率分布

式 (9) のパワースペクトル比の確率密度関数に、変数変換 $V = \sqrt{U}$ ($= \sqrt{Y/X}$) を施すと、次式のフーリエスペクトル比の確率密度関数が得られる。

$$f_V(v) = \frac{\Gamma(k_X + k_Y) k_X^{k_X} k_Y^{k_Y} \mu_X^{k_X} \mu_Y^{k_Y}}{\Gamma(k_X) \Gamma(k_Y) 2v^{2k_Y-1} (k_X \mu_Y + k_Y \mu_X v^2)^{k_X+k_Y}} \quad (18)$$

図 4 は $k_X = k_Y = 1, 2, 3, 5, 10$ の場合の確率密度関数をプロットしたものである。

この分布の期待値 μ_V 、 μ_V 廻りの分散 σ_V^2 は、それぞ

表 3. フーリエスペクトル比 ($V=\sqrt{Y/X}$) の期待値、分散、%位値 ($\mu_X=\mu_Y=1, k_X=k_Y$)

サンプル数 $k_X=k_Y$	期待値 μ_V	分散 σ_V^2	%位値						
			5%	10%	20%	50%	80%	90%	95%
1	1.570796	∞	0.229	0.333	0.499	0.997	1.987	2.963	4.256
2	1.178097	0.612087E-0	0.396	0.493	0.633	0.998	1.568	2.007	2.482
3	1.104466	0.280154E-0	0.483	0.572	0.695	0.998	1.429	1.732	2.036
4	1.073787	0.180316E-0	0.539	0.621	0.733	0.998	1.356	1.596	1.826
5	1.057009	0.132733E-0	0.579	0.656	0.759	0.998	1.310	1.512	1.700
6	1.046439	1.049664E-1	0.610	0.682	0.778	0.998	1.278	1.454	1.615
7	1.039172	8.678902E-2	0.635	0.703	0.793	0.998	1.253	1.411	1.553
8	1.033870	7.397055E-2	0.655	0.720	0.806	0.998	1.234	1.378	1.506
9	1.029831	6.444777E-2	0.672	0.734	0.816	0.998	1.219	1.351	1.468
10	1.026653	5.709540E-2	0.686	0.746	0.825	0.998	1.206	1.329	1.437
12	1.021970	4.648608E-2	0.710	0.766	0.839	0.998	1.185	1.295	1.389

れ、次式で表される。

$$\mu_V = \frac{\Gamma(k_X - \frac{1}{2})\Gamma(k_Y + \frac{1}{2})}{\Gamma(k_X)\Gamma(k_Y)} \cdot \sqrt{\frac{k_X\mu_Y}{k_Y\mu_X}} \quad (19)$$

$$\sigma_V^2 = \frac{k_X}{k_X - 1} \cdot \frac{\mu_Y}{\mu_X} - \mu_V^2 \quad (20)$$

フーリエスペクトル比では、期待値、分散ともに分母、分子両スペクトルのサンプル数の影響を受けること、分母スペクトルのサンプル数が $k_X=1$ であっても期待値 μ_V は有限値であること、分散は $k_X=1$ のときだけ発散することなどの点がパワースペクトル比の場合

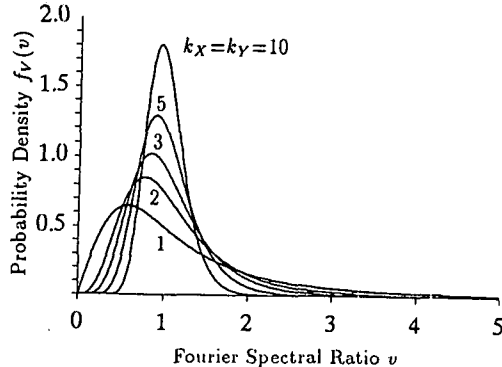


図 4. フーリエスペクトル比の確率密度関数 ($\mu_X=\mu_Y=1, k_X=k_Y=1, 2, 3, 5, 10$)

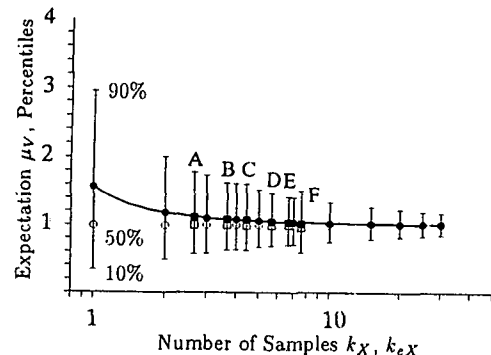


図 5. フーリエスペクトル比の期待値 (解析解) と 10%, 50%, 90% 位値 (シミュレーション)

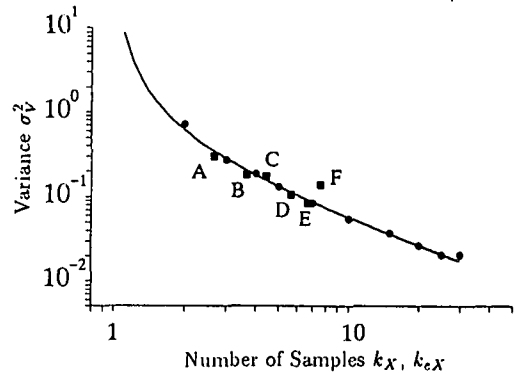


図 6. フーリエスペクトル比の分散 (解析解とシミュレーション)

合と異なっている。

式 (18)~式 (20) から期待値、分散、%位値を求めると表 3 のようになる。ただし、%位値は式 (18) を数値積分して求めた値である。

図 5, 6 は Case A~F (表 2) についてモンテカルロ・シミュレーションで求めたフーリエスペクトル比の期待値、分散と、 $k_X=k_Y$ の場合の解析解を比較したものである。この図から等価サンプル数 k_e はパワースペクトル比だけでなく、フーリエスペクトル比に対しても有効であることがわかる。

8. まとめ

- (1) パワースペクトル比とフーリエスペクトル比の確率密度関数、期待値、分散の解析解を示し、確率的な性質を指摘した。
- (2) 加重平均に際して定義される等価サンプル数 (等価自由度) が、パワースペクトル比、フーリエスペクトル比の推定精度の評価にもそのまま適用できることを、モンテカルロ・シミュレーションによって示した。

参考文献

- 日野 (1977), スペクトル解析, 朝倉書店.
 星谷 (1974), 確率論手法による振動解析, 鹿島出版会.
 依田 (1966), 技術者の統計学, 宝文館.
 大野・他 (1990), 新編数値計算ハンドブック, オーム社.