

(10) 地震動の実時間条件付き逐次型シミュレーション手法の開発

京都大学防災研究所

(正会員) 佐藤 忠信

戸田建設(株)

(正会員) 今林 浩史

1. はじめに

都市域における地震動モニタリングシステムを構築しようとするとき、限られた観測点における記録から任意地点での地震動を推定する必要がある。その際、観測点においてはシミュレーション波形と得られる観測波形とが一致することが条件となる。また、地震動モニタリングシステムの構築を考えた場合その対象となるのは現在おこっている、あるいは直前におこった地震である。

本研究では推定しようとする複数の地点における地震動を多次元自己回帰過程で、また時空間場を離散化された状態遷移方程式で表現することによって、観測点では観測波形に一致し、未観測点の地震波形をリアルタイムに推定する実時間条件付き逐次型シミュレーション手法を開発、提案する。

2. 地震動の条件付き逐次型シミュレーション

時空間場における地震動の時間方向の定常性を仮定し、確率場の特性を規定する相互相関関数は既知であるとする。時刻 t における観測点、未観測点あわせて n 個の点での地震動からなるベクトルを $\mathbf{z}_t$ とすると

$$\mathbf{z}_t = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}^T \quad (1)$$

ここに $g_i(t)$ は時刻 t における地震動である。さらに $\mathbf{z}_t$ が次の多次元自己回帰過程で表せるとする。

$$\mathbf{z}_t = -\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_{t-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{z}_{t-2} - \dots - \mathbf{A}_q \mathbf{z}_{t-q} + \Gamma \mathbf{w}_t \quad (2)$$

上式において $\mathbf{A}_k = [a_{ij}]$ ($i, j = 1 \dots n$)は場の特性を示す自己回帰過程の係数行列であり、場を規定する相互相関関数によって次の連立方程式で決定した。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(q) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \dots & \mathbf{R}(1-q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}(q-1) & \dots & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_q^T \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに $\mathbf{R}(k) = [\rho_{ij}(k)]$ であり、 $\rho_{ij}(k)$ は地点 i と j 、時間差 $k\Delta t$ の相互相関関数を表す。(2)式を離散系のシステム方程式の形に書き改めると次式を得る。

$$\mathbf{z}_t = -\Phi \mathbf{Z}_{t-1} + \Gamma \mathbf{w}_t \quad (4)$$

ここで対象とする n 個の地点のうち m 個の地点において観測が行われている場合を考える。観測量のベクトルを $\mathbf{y}_t$ とすれば状態量 $\mathbf{z}_t$ を用いて次のような観測方程式を得る。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_{t,m} \\ \mathbf{z}_{t,n-m} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{y}_t = \{g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)\}^T \quad (5)$$

ここに $\mathbf{I}$ は $m \times m$ の単位行列であり、 $\mathbf{z}_{t,m}$ は観測点において与えられる物理量であり、 $\mathbf{z}_{t,n-m}$ は未観測点における観測量である。また観測ノイズはないものとし $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ と仮定している。既観測点及び未観測点を合わせた n 個の点における、物理量の共分散行列を観測点と未観測点に分離し次のように表現する。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{m,m} & \mathbf{M}_{m,n-m} \\ \mathbf{M}_{n-m,m} & \mathbf{M}_{n-m,n-m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに $\mathbf{M}_{m,m}$ は観測点どうしの共分散行列、 $\mathbf{M}_{m,n-m}$ 、 $\mathbf{M}_{n-m,m}$ は観測点と未観測点の共分散行列、 $\mathbf{M}_{n-m,n-m}$ は未観測点どうしの共分散行列である。

ここでカルマンフィルタ¹⁾のアルゴリズムを用いて未観測点の最尤推定値を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_t &= \bar{\mathbf{z}}_t + \mathbf{K}(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\bar{\mathbf{z}}_t) \\ &= \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{t,m} \\ \hat{\mathbf{z}}_{t,n-m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \bar{\mathbf{z}}_{t,n-m} + \mathbf{M}_{n-m,m} \mathbf{M}_{m,m}^{-1} (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{z}}_{t,m}) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_{n-m,m} \mathbf{M}_{m,m}^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(7)より明らかなように観測が行われると、その地点の最尤推定値は観測値そのものになり、未観測点の物理量は観測値の重みつき平均値で求められることになる。

式(7)、(8)によりシミュレートされた波形(実線)を図1に示す。ターゲットとする波形は川上の手法²⁾により波速を $c=0.8\text{km/s}$ 、変形定数を $\alpha=0.05 \times 2\pi$ としシミュレートした(破線)。またこの図においては、観測点数を1~3点と変化させて、観測点においてはターゲットとする波形が実現値として観測されるものとする。太線は観測地点(●)における推定波形を示している。観測点における推定波形は観測波形に一致していることが分かる。また観測地点数が増えることによって推定精度が向上していることがわかる。

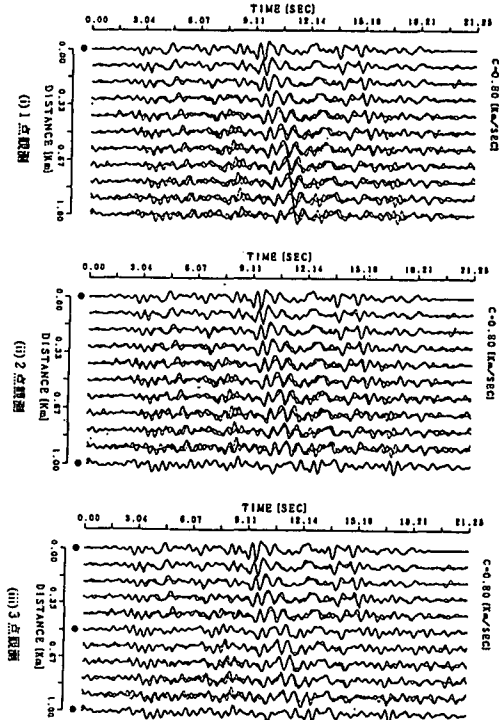


図1 シミュレーション波形 ($c=0.8\text{km/s}$ 、 $\alpha=0.05 \times 2\pi$)

3.自己回帰係数の同定

2.において展開したシミュレーション手法の理論では、地震動を推定しようとする時空間場を規定する相互相関関数が先見的に与えられるものとし、この相互相関関数 $\mathbf{R}(k)$ は見かけの地震波速度 c と波形の変形定数 α によって決まるものとしている。この二つのパラメータについてはアレー観測記録などを用いていくつかの値が提示されているが、地盤条件、伝播条件などによってどのように変化するかが現在のところ判明していない³⁾。そこで、ここでは地震動の線形定常性は2.と

同じく仮定するが、観測点において観測される波形以外に時空間場を規定する確率特性に関する情報が与えられない場合を想定して、未観測点の地震動を推定する手法を開発する。

2.で提案したシミュレーション手法を用いるためには式(4)の状態方程式において、自己回帰係数からなる行列 Φ を求める必要がある。この場合には、場の相互相関関数 $R(k)$ が未知であるため式(3)の方程式を解くことはできない。そこで観測点部分の自己回帰係数については、カルマンフィルタのアルゴリズムを用いて観測された地震波形により自己回帰係数を修正しながら同定する。未観測点部分に関する自己回帰係数については、まず観測波形から見かけの地震波速度 c と波形の変形定数 a を同定し、時空間場を規定する相互相関関数 $R(k)$ を求める。この $R(k)$ とカルマンフィルタによって同定された観測点部分の係数を用いて、式(3)における未決定部分の自己回帰係数を最小自乗法を用いて求めることができる。これらの同定された自己回帰係数を用いて、状態方程式を得ることができ、未観測点における地震動を推定できることになる。

図2は自己回帰係数の真値(x座標)と、この手法によって同定された自己回帰係数(y座標)との比較である。自己回帰係数は $y=x$ のほぼ一直線上に分布しており、同定された自己回帰係数の精度が高いことがわかる。また、同定された自己回帰係数と2.において展開した手法を用いてシミュレートした波形を図3に示す。ここでは3点でターゲットとする波形が実現値として観測されるものとし、太線は観測地点(●)における推定波形を示している。この図から観測波形以外の先見的な情報がなくてもここで展開したアルゴリズムにより、確率場の相互相関関数があらかじめ与えられているときと同じ程度の精度で未観測点における地震波形をシミュレートすることができたといえる。

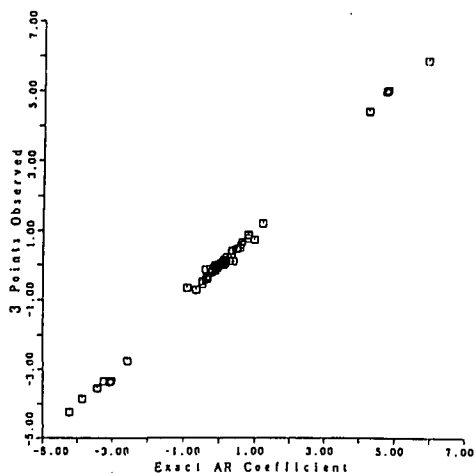


図2 自己回帰係数の比較

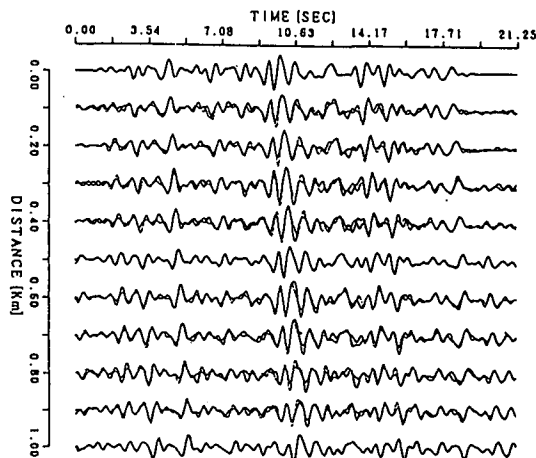


図3 シミュレーション波形

4. 実時間条件付き逐次型シミュレーション

これまで提案された地震波形のシミュレーション手法^{2)~5)}、および本研究2、3のシミュレーションでは、全時間にわたる観測記録が与えられ、かつその観測時間にわたって定常性を仮定した手法であった。つまり、これらの手法による地震波形シミュレーションは過去、あるいは直前におこった地震を対象にしたシミュレーションといえる。しかし本研究2.で展開した逐次型シミュレーション手法では、現時刻における地震動を $t-1$ 以前の過去のいくつかの時刻歴の線形和で表すという自己回帰過程を用いているため、この条件付き逐次型シミュレーション手法を拡張することに

より未観測点における地震動を実時間で推定することが可能と考える。

ここでは、2.で展開した手法と、3.において提案した自己回帰係数の同定手法を組み合わせることにより、非観測点での地震動を実時間でシミュレートする。本来、地震動は非定常性を有するものであるが、その非定常特性を前もって知ることはできないので、ここでは現時刻以前の数秒間の区間定常性を仮定することにする。また、地震動を推定しようとする時空間確率場についての事前情報（相互相関関数）を与えるものとする。

実時間シミュレーションにおいては、この事前情報を観測点において時々刻々と得られる記録によって修正していくので、自己回帰係数行列 Φ_t 、場を規定する相分散関数 M_t 、カルマンゲイン K_t は時間に依存することになる。図4はこの実時間条件付き逐次型シミュレーション手法のフローチャートであり、時刻 $t-1$ から時刻 t 、時刻 $t+1$ への状態の遷移を示している。

このフローチャートにしたがってシミュレートした波形(実線)を図5に示す。時刻2.5秒までは事前情報による推定値、時刻5秒までは観測値のデータ数が少ないときの推定値で、その精度は余りよくない。しかし時刻5秒を過ぎた後、推定値の精度は向上している。

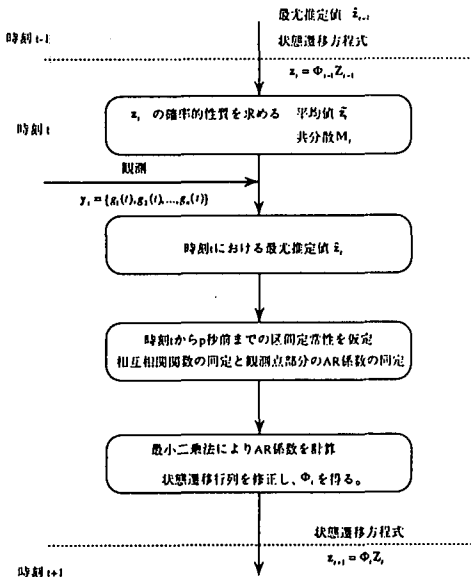


図4 実時間推定の流れ

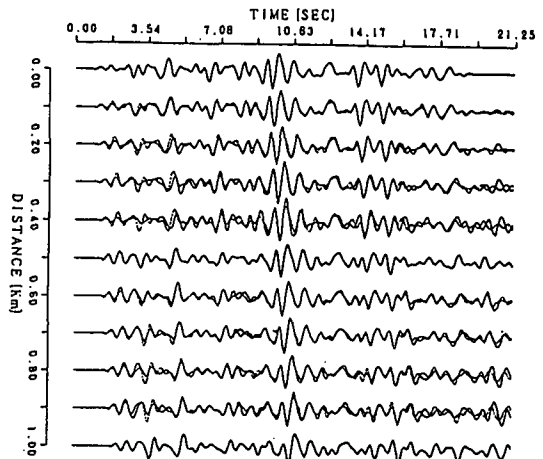


図5 実時間シミュレーション波形

参考文献

- 1) 加藤寛一郎：最適制御入門、pp.126-137
- 2) 川上、小野：一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション、土木学会論文集 No.441/I-18、pp167-175
- 3) 川上、小野：多入力線形システム理論に基づく観測記録を含む時空間地震波形、土木学会論文集 No.489/I-27、pp187-196
- 4) 丸山、星谷、山口：定常・均一ガウス確率場の条件付き地震動シミュレーション、土木学会論文集 No.489/I-27、pp177-185
- 5) 盛川、亀田：既知波形を含む条件付き確率場のシミュレーション理論、都市耐震センター研究報告別冊 8 号