

(2) 重力場における圧縮性流体層を含む成層弾性体の時間領域 Green 関数

東京理科大学 正会員 東平光生

1. はじめに

著者は一連の研究¹⁾⁻³⁾で薄層要素-離散化波数法を用いた成層弾性体の時間領域 Green 関数について論じてきた。特に、先の研究³⁾では成層弾性体に圧縮性流体層が含まれる場合の Green 関数を誘導し、固体-流体の相互作用による Rayleigh 波の到達の遅れなどについて論じた。

一方、圧縮性流体と固体の連成振動を考える場合には、重力の影響を考慮しなければならない場合も存在する。たとえば、軟弱地盤が強い地震によって液状化し、液状化地盤に重力波が伝播するケースなどでは、Chavez-Garcia と Bard⁴⁾の研究のように、固体-流体の連成振動を重力場で解析する必要がある。

本論文では、こうした背景のもとで、固体と流体の相互作用を重力場で把握するための Green 関数の定式化を述べるとともに、実際に数値解析を行った結果を述べることを目的とする。

2. 薄層要素-離散化波数法を用いた定式化

ここでは、重力場における固体と流体の連成振動解析を薄層要素-離散化波数法を用いて行う。定式化を明確にするためにまず基礎方程式を整理する。

流体は理想流体とし、微小振幅の運動を行うものとする。微小振幅の運動を仮定することで Euler 方程式の対流項を無視することができる。さらに流体の運動は非回転的であるとする。この条件の下で理想流体が一様重力場に置かれるとき、流体の変位ポテンシャルは次式を満足する⁵⁾。

$$\rho_0 \partial_t^2 \varphi(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}, t) - \rho_0 g \partial_z \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

ここに、 ρ_0 は流体の質量密度、 φ は変位ポテンシャル、 κ は体積弾性率、 g は重力加速度、 ∂ は偏微分の演算子で下付きの添字は偏微分のパラメータである。また、 t は時間、 $\mathbf{x}$ は空間上の点、 z は鉛直上向きの空間座標を示す。

流体の変位ポテンシャルと流体圧力の関係式は次式で与えられる。

$$p(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \partial_t^2 \varphi(\mathbf{x}, t) - \rho_0 g \partial_z \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

ここに、 p は流体圧力を示す。流体自由表面では、式(2)で与えられる流体圧力がゼロとなる。

固体の支配方程式には、次の弾性波動方程式を用いる。

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \rho \partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

ここに、 λ および μ は Lamé の定数、 $\mathbf{u}$ は変位場、 $\mathbf{f}$ は物体力場、 ρ は固体の質量密度を示す。

固体と流体の境界面では固体と流体が相互作用を行う。まず、流体圧力と固体表面力の釣り合いは次式で示される。

$$\boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -n p \quad (4)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は弾性変形に基づく表面力ベクトルを示す。式(4)の左辺第二項は表面力ベクトルの重力に基づく増加分を示す。また、 $\mathbf{n}$ は固体-流体境界面の法線ベクトルで固体外向きを正としている。式(4)は固体-流体の境界面が水平であるという条件で成立することに注意する。

固体-流体の境界面におけるもう一つの相互作用方程式は、固体-流体の境界面の固体と流体の変位の連続条件である。この連続条件は固体-流体の境界面の法線方向の変位成分についてのみ成立するので次式となる。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi \quad (5)$$

以上の基礎方程式に薄層要素-離散化波数法を適用し、固体-流体系波動場の解を Green 関数との合成積の形で表現する。限られた紙面の都合上、詳細な定式化は文献⁶⁾に譲り結果のみを記述すると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} u(r, \phi, t) \\ \varphi(r, \phi, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{k_n}^m(r, \phi)] \int_0^t [V_{k_n}^m] [\Lambda_{k_n}^m(t-\tau)] [V_{k_n}^m]^{-1} [M]^{-1} \begin{Bmatrix} F_{k_n}^m(\tau) \\ G_{k_n}^m(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \quad (6)$$

ここに、 (r, ϕ) は円筒座標系における水平成分、 m は ϕ 成分におけるFourier級数の次数、 k_n は r 方向の離散化波数、 $[C_{k_n}^m(r, \phi)]$ はsurface vector harmonics⁷⁾を成分とする波動の水平方向の伝播特性を特徴づけマトリックスである。また、 $[V_{k_n}^m]$ はモーダルマトリックス、 $[\Lambda_{k_n}^m(t-\tau)]$ は正規モードの時間変動を特徴付けるマトリックス、 $[M]$ は質量マトリックス、 $F_{k_n}^m$ は波数領域における物体力場、 $G_{k_n}^m$ は波数領域における変位ポテンシャルの勾配を示す。

3. 数値計算例

ここでは、半無限弾性体上に分布する比較的薄い流体層を伝播する重力波について検討する。解析モデルをFig. 1に示す。Fig. 1では流体層の厚さは30 m、流体の質量密度は $\rho_f = 1.2 \text{ g/cm}^3$ 、音速は $\alpha_f = 1.5 \text{ km/s}$ である。また、半無限弾性体の質量密度は $\rho_s = 2.0 \text{ g/cm}^3$ 、S波の伝播速度は $\alpha_s = 0.5 \text{ km/s}$ 、P波の伝播速度は $\beta_s = 1.5 \text{ km/s}$ とする。ここでは、固体表面から深さ1.0 kmの位置に鉛直上向きに作用する階段関数で表される時間関数を持つ点振源を与えることにする。

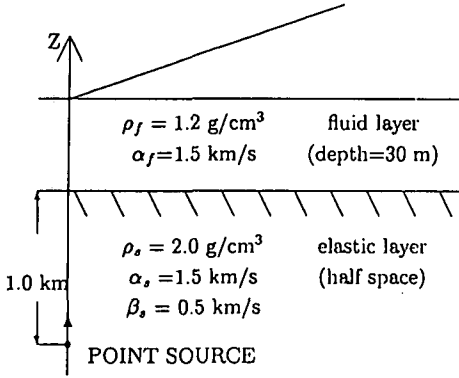


Fig. 1. Layered solid-fluid model.

Table 1. Thickness of the thin-layered elements in the solid.

depth (km)	thickness of the elements (km)
0.0-0.1	0.01
0.1-0.2	0.02
0.2-0.4	0.05
0.4-1.0	0.1
1.0-2.0	0.2
2.0-5.0	0.25
5.0-10.0	1.0
10.0-20.0	2.5
20.0-40.0	5.0
40.0-60.0	10.0

薄層要素の層厚の設定に関しては、流体層では1mとする。また、固体部分の薄層要素の分割をTable 1に設定する。ここでは、正規モードを求めるための仮想の剛基盤を固体表面から深さ60 kmに設定する。これによって仮想の剛基盤からの反射P波が固体表面に到達しないTime windowを約80 sec.と設定できる。

Fig. 2に固有値解析から得られた正規モードの分散曲線を示す。分散曲線は振動数と位相速度の関係を与え、正規モードの位相速度については、固体S波の伝播速度で除して無次元化している。

Fig. 2より明らかなように正規モードの大部分はS波とP波の位相速度のところで折れ曲がり一本の直線を形成している。これは分散性の正規モードの重ね合わせによって非分散性の実体波が合成されるメカニズムを表すとともに、大部分の正規モードが実体波の合成に関与することを示し

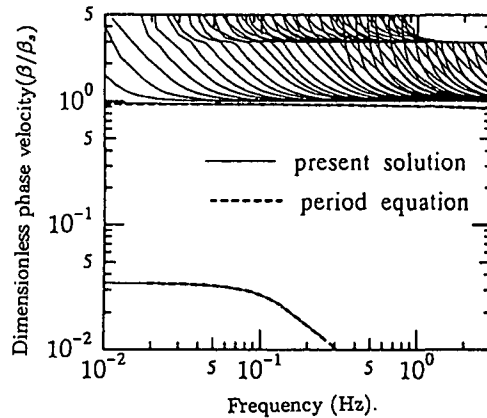


Fig. 2. Dispersion curves of the normal modes for the structure shown in Fig. 1.

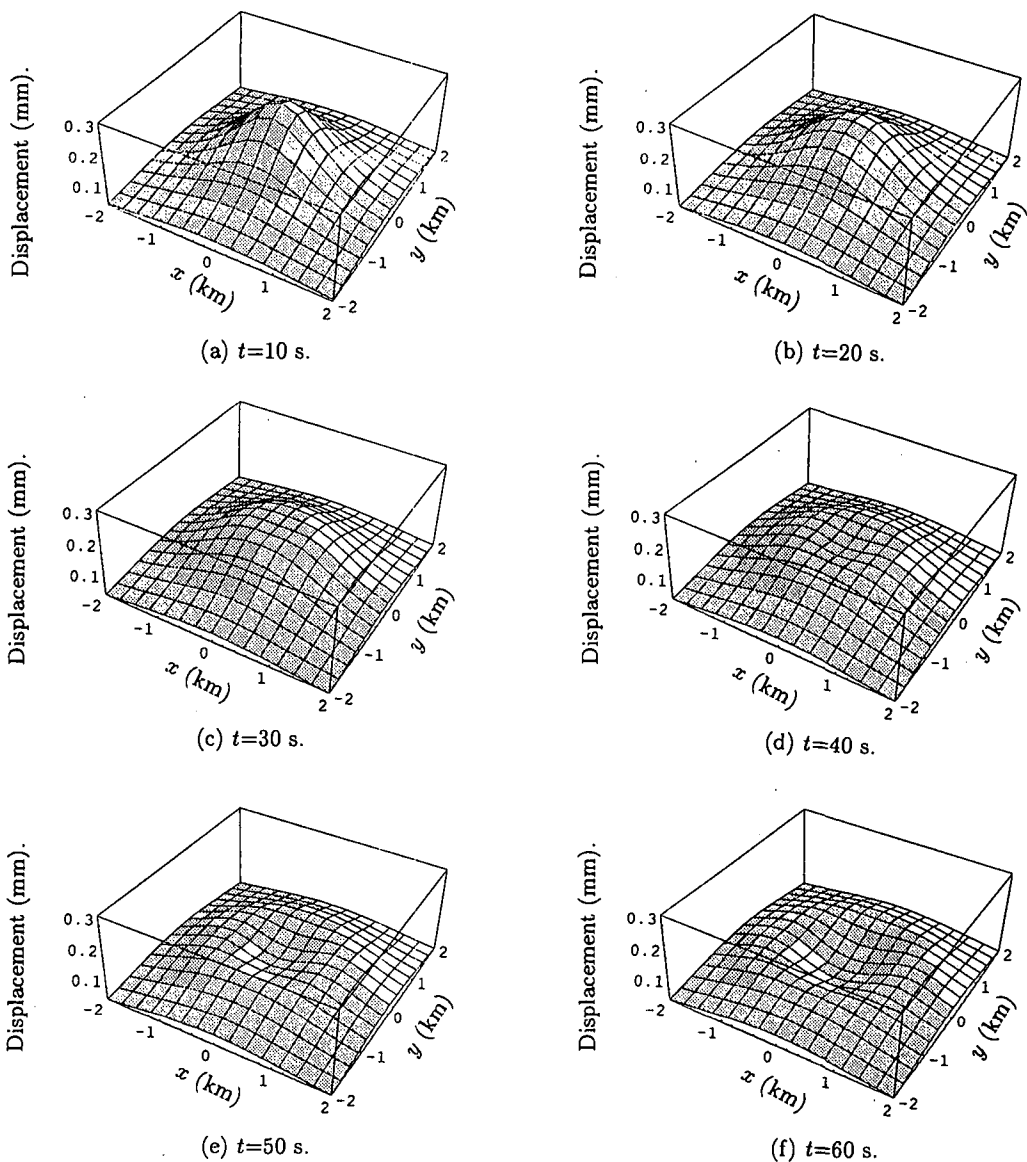


Fig. 3. Displacement snapshots for the fluid surface.

ている。これらの正規モードの中で2つのモードだけがS波の位相速度より小さくなっている。このうち、1つのモードは非常に低い振動数と低い位相速度の領域に存在している。このモードはEwingのテキスト⁵⁾で示された特性方程式の解と照合することで重力波のモードであることが確かめられる。また、S波の位相速度よりわずかに位相速度の小さいモードはRayleigh波のモードである。重力波とRayleigh波のモードには特性方程式から得られる位相速度と周波数の関係を合わせてプロットしている。本解析結果と特性方程式からの結果は良好に一致し固有値解析結果は妥当なものである。

次に流体自由表面の変位分布の時間変動を観察する。Fig. 3に10 sec. から60 sec. までの時刻の流体自由表面の変位分布を示す。流体自由表面の変位の単位はmmとする。また、振源で与えた荷重の大きさは 1.0×10^6 kNである。流体自由表面の変位分布の特性を理解するために、固体-流体境界面の変位分布をFig. 4に示してい

る。ここでは、固体-流体境界面の変位分布は時刻 10 sec. と 60 sec. のものについて示した。

Fig. 3およびFig. 4より明らかなように時刻 10 sec. においては流体自由表面と固体-流体境界面の変位形状はほとんど同じである。このことは、流体自由表面の変形は初期の時刻においては固体-流体境界面の動きに従うことを示している⁶⁾。また、固体-流体境界面の変位は時刻 10 sec. と 60 sec. では変化がないことから変位分布を図化した領域では、時刻 10 sec. において、既に永久変位に到達しているものと言える。

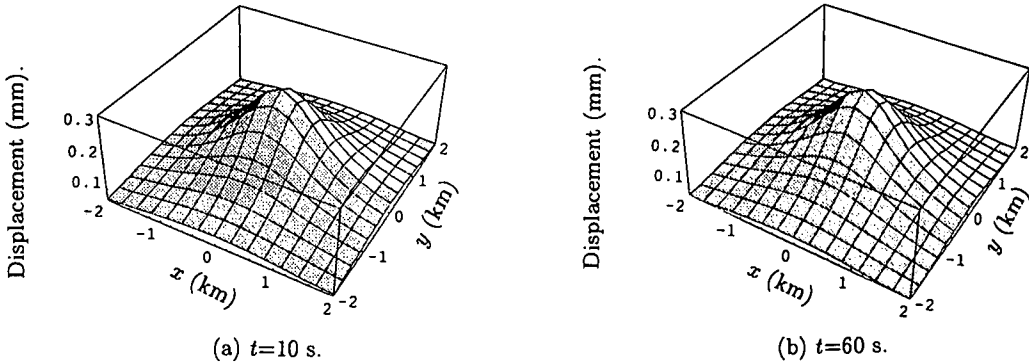


Fig. 4. Displacement snapshots for the solid-fluid interface.

流体自由表面の変位分布を詳しく見ると、中央部の大きな変位の部分が時間の経過とともにまず大きく減少を始めている。これは、中央部の変位の大きな部分が最も重力の影響を受けやすいことを示す。また、時刻が 40 sec. を過ぎるようになると、中央部の変位の減少の影響が波動となって、周囲に伝播を始めることが分かる。そして、時刻が 60 sec. になると、この波動が周囲に伝播する様子がさらにはっきりとしてくる。この波動は重力の影響で生じておりいわゆる重力波である。

こうした観察から、重力波は初期の時刻においての変位形状が、重力の影響で崩壊し、その影響が周囲に伝播してゆく波動であることが理解できる。また、重力波の伝播は Rayleigh 波とは異なり Rayleigh 波よりもはるかにゆっくりと伝播する。重力波のこうした性質は分散曲線にも見られたように、重力波が非常に低い振動数と低い位相速度を持つことに帰着できる。

4. 結論

本論文では重力場における固体-流体の相互作用を計算するための時間領域の Green 関数を示した。Green 関数は正規モードの重ね合わせで表現されるが、正規モードからも Rayleigh 波と重力波のモードの相違が明らかとなった。重力波の計算を実際に行ったところ、重力波は Rayleigh 波通過後、ゆっくりと生成され伝播する様子をつかむことができた。

参考文献

- 1) Touhei, T: A discrete wavenumber and normal mode superposition method for Synthetic Seismograms, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 84, pp. 1473-1483, 1994.
- 2) Touhei, T: Propagation of normal modes due to impulsive loading to 3-D medium on a rigid basement, *Earthq. Engn. Struct. Dyn.*, Vol. 24, 1995. (in press)
- 3) 東平光生: 薄層要素-離散化波数法による圧縮性流体層を含む成層弾性体の動的解析手法の展開, 土木学会論文集, No. 507/1-30, pp. 149-158, 1995.
- 4) Chavez-Garcia, F., J. and P. Bard: Gravity waves in Mexico City? -II. Gravity perturbed waves in an elastic solid, *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 83, pp.1656-1676, 1993.
- 5) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F.: *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, 1957.
- 6) 東平光生: 薄層要素-離散化波数法を用いた重力場における弾性固体と圧縮性流体層との連成解析, 土木学会論文集, 投稿中
- 7) Olson, A. H., Orcutt, J. A. and G. A. Frizer: The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, Vol. 77, pp. 421-460, 1984.