(69) アレー観測記録に基づく任意非観測点時系列の補間

武蔵工業大学　正会員　丸山　收

武蔵工業大学　正会員　星谷　勝

武蔵工業大学　学生員　安部明夫

1．はじめに

ここでは条件付き確率場の理論(1-4)により、非観測点における地震波動の補間を行うことを目的とした定式化を示している。条件付き確率場の補間理論では、対象とする物理現象の確率ﾓﾃﾞﾙへの設定法および満足すべき確率的条件に対する最適化をどの様に行うかということが肝要である。本研究では、波動伝播現象の確率ﾓﾃﾞﾙとして平均値および相互相関関数または相互ｽﾍﾟｸﾄﾙ密度関数を与え、任意点での観測値が得られた場合のｶﾞｳｽ確率場に対する補間問題について検討している。

以下では、観測情報が得られた場合の補間問題の設定を行い、確率場の条件を満足するための最適化問題において、文献調査結果(1,2)より最小誤差分散不偏推定法が、ｶﾞｳｽ確率場に対する最尤推定法と同一の結果を与えることを示している。また空間方向に非均一、時間方向になだらかに変動する非定常性の波動伝播現象における非観測点の補間を行うための定式化を示している。

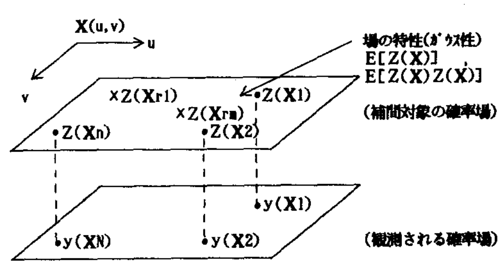
2．問題の設定と基本補間式

(1) 問題の設定

確率場; $Z(X)$において式(1)に示す様に$\mathbf{ZXr}$および$\mathbf{ZX}$を考える(図-1)。

$$ZXr=[Z(Xrm)\ Z(Xrm-1)\cdots Z(Xr1)] \quad (1.a)$$

$$ZX=[Z(Xn)\ Z(Xn-1)\cdots Z(X1)] \quad (1.b)$$



図－1．　確率場

ここで、$\mathbf{X}$は確率場の時間および空間の座標ﾍﾞｸﾄﾙを示している。また、確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙ; $[Xn\ Xn-1\ \cdots X1]$ において確率場; $Y(Xi),(i=1,2,\cdots,n)$が測定されているものとする。その際測定により得られる確率場 $\mathbf{Y}^T=[Y(Xn)\ Y(Xn-1)\ Y(X1)]$ は、確率場 $\mathbf{Z}^T=[\mathbf{ZX}^T\ \mathbf{ZXr}^T]$ に関する線形関係の式で与えられるものと仮定する。

$$\mathbf{Y}=\mathbf{g}\,\mathbf{Z}+\boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

ここで、$\mathbf{g}$は観測に伴う既知定数ﾏﾄﾘｯｸｽであり、$\mathbf{Y}$の物理量と$\mathbf{Z}$の物理量の関係を与えている。$\boldsymbol{\omega}^T=[\omega(Xn)\ \omega(Xn-1)\cdots\omega(X1)]^T$は平均値0のｶﾞｳｽ白色雑音であり、観測ﾉｲｽﾞに関する確率場である。ここで、式(1)および式(2)において、$Xri,(i=1,2,\cdots,m)$は非観測点の座標ﾍﾞｸﾄﾙを示し、$Xi',(i'=1,2,\cdots,n)$は観測点の座標ﾍﾞｸﾄﾙを示すものとする。

式(2)において特に$\boldsymbol{\omega}=0$の場合は、$\mathbf{g}$が既知定数ﾏﾄﾘｯｸｽで与えられることから、観測されたｻﾝﾌﾟﾙ実現値; $\underline{\mathbf{Y}}$は確定量となる。最も簡単な場合を式(3)に示す。式(3)では、観測される物理量と補間したい物理量が対応しており、この場合式(1)および式(2)は、Simple Krigingに対応した問題設定となっている。

$$
\mathbf{g}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ & \ddots\ 1 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} ZX \\ \cdots\cdots \\ ZXr \end{bmatrix} \tag{3}
$$

さて、式(1)および式(2)の設定のもとで、Yのｻﾝﾌﾟﾙ実現値;Yが観測されているときに、確率場;Zを補間することを考える。具体的には、座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xri,(i=1,2,…,m)では、非観測点の確率場の推定または補間を行い、座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xi',(i'=1,2,…,n)では、観測点の確率場において観測ﾉｲｽﾞの除去(ｽﾑｰｼﾞﾝｸﾞ)を同時に行うこととなるが、以下の議論では、特に必要としない限り両者を補間と表現する。本研究では、観測により得られる確率場;Yが与えられた場合の、確率場;Zの補間問題を対象としている。その際式(1)および式(2)において、n=0とすれば観測がなされないことを表しており、確率場;Zは、Zに関する確率的な特性のみを満足することが必要となる。すなわち、無条件ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝと等価になる。また、m≠0およびn≠0の場合において、ω=0とすれば観測値は先に述べたように確定値となることから、観測点において補間値は既知観測値と一致することとなる。

(2) 基本補間式

本研究で用いる基本補間式を文献(3)から次式で与える。

$$
Z^*(X)=\hat{Z}(X)+[Z(X)-\hat{Z}(X)] \tag{4}
$$

ここで、$Z^*(X)$は座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xにおける確率場;$Z(X)$の推定値を示している。$\hat{Z}(X)$は、最尤法による推定値である。式(4)において、確率場;$Z(X)$の真の値は未知であるので、推定誤差;$Z(X)-\hat{Z}(X)$の値も未知量となる。しかしながら、推定誤差;$Z(X)-\hat{Z}(X)$の確率的な性質が既知となれば、確率的な条件を満足する推定誤差をｼﾐｭﾚｰﾄすることが可能である。式(4)によると、予め与えられた確率場;$Z(X)$に関する確率的な条件を満足するような$Z^*(X)$をｼﾐｭﾚｰﾄすることができる。本研究では、確率論にもとづく補間の理論を示している。例えば確定論的な補間では、最小二乗法等により確定的な意味での$\hat{Z}(X)$を求めることは可能であるが、$Z(X)$が未知量であることにより、推定誤差の評価が不可能となる。仮に推定誤差を0とするような補間式を求めることができれば$Z(X)=\hat{Z}(X)$となるが、現実には困難である。ここで確率論的または確定論的補間に依らずﾓﾃﾞﾙ化を行う際には推定誤差の値がなるべく小さくなるように定式化することが肝要となる。

さて対象となる確率場;$Z(X)$の期待値$E[Z(X)]=m(X)$は推定されているものとする。あるいは、先験的な知識により期待値は既知量として定めることができるものとする。そして非観測点における確率場;$Z(X)$を補間するための補間式を、式(4)を改めて次式で与える。

$$
\mathbf{Z}^*=\boldsymbol{\mu}\mathbf{Z}+\mathbf{WZ}^* \quad (5.a) \qquad \mathbf{WZ}^*=\hat{\mathbf{WZ}}+\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Z} \quad (5.b) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Z}=\mathbf{WZ}-\hat{\mathbf{WZ}} \quad (5.c)
$$

ここで、$\boldsymbol{\mu}\mathbf{Zx}=E[\mathbf{ZX}]$および$\boldsymbol{\mu}\mathbf{Zxr}=E[\mathbf{ZXr}]$であり、$\mathbf{WZ}=[\mathbf{WZx}\ \mathbf{WZxr}]$において、$E[\mathbf{WZ}]=\mathbf{0}$である。それぞれ要素で示すと次の様になる。

$$
\boldsymbol{\mu}\mathbf{Zx}^T=[m(Xn)\ m(Xn-1),\cdots,m(X1)] \qquad \boldsymbol{\mu}\mathbf{Zxr}^T=[m(Xrm)\ m(Xrm-1),\cdots,m(Xr1)]
$$

$$
\mathbf{WZx}^T=[W(Xn)\ W(Xn-1),\cdots,W(X1)] \qquad \mathbf{WZxr}^T=[W(Xrm)\ W(Xrm-1),\cdots,W(Xr1)]
$$

式(5)より確率場;Zに関する議論は、平均値;$E[Z(X)]$が与えられていることにより、確率場;WZに関する議論と等価である。

(3) 条件付き確率密度関数と最尤法

さて、対象とする確率場において座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xに関する順序、すなわち因果律が意味のないものとすれば、Yが生起した条件のもとでZが生起する条件付き確率密度関数;P(Z/Y)は、ﾍﾞｲｽﾞの定理より与えられる。

1例として式(6)を示す。

$$P(Z/Y)=P(Z(Xrm)/Z(Xrm-1),\cdots,Z(Xr1),ZX,Y)\times P(Z(Xrm-1)/Z(Xrm-2),\cdots,Z(Xr1),ZX,Y)$$
$$\cdots\times P(Z(Xn)/Z(Xn-1),\cdots,Z(X1),Y)\times\cdots\times P(Z(X2)/Z(X1),Y)\times P(Z(X1)/Y) \quad (6)$$

式(6)において、座標ﾍﾞｸﾄﾙに関する因果律は意味のないものとしているので、右辺の展開については複数考えられる。すなわち確率場の座標ﾍﾞｸﾄﾙ;Xri'およびXiにおけるi'およびiの順序は対象とする確率場の物理現象の生起に影響を与えないことを仮定している。

次に、確率場;Yが与えられた条件のもとで、条件付き確率密度関数P(Z/Y)を最大とするようなZを求めることを考える。P (Z/Y) を最大とすることは、測定により得られた確率場;Yに対して、最も尤度の高い確率場;Zを求めることになる。

$P(Z/Y)_{max}$とするためには複数のｱﾌﾞﾛｰﾁが考えられる。直接$P(Z/Y)_{max}$とすることを考えれば、Zを同時にｼﾐｭﾚｰﾄする定式化が得られる。また式(6)の右辺によれば$P(Z(X1)/Y)_{max}$、$P(Z(X2)/Z(X1),Y)_{max}$として順次ｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場を取り込みながら未知確率場を推定する定式化が得られる。星谷は最小誤差分散不偏推定法により、直接$P(Z/Y)_{max}$を求める定式化として誤差共分散を用いる方式を示し、式(6)の右辺に対応して誤差共分散を用いる漸次拡張方式の定式化を行っている。

実際の物理現象では、その現象固有の因果律が存在するが、ｼﾐｭﾚｰﾄされる確率場は、対象とする現象の因果律を満足していれば、ｼﾐｭﾚｰﾄする順序に依存しないことがわかる。以上では、条件付き確率密度関数の最大化操作により、確率場;Zを補間する基本的な考え方について示した。また$P(Z/Y)_{max}$は、具体的に確率密度関数が与えられることにより解くことができる。

(4) 相互相関関数により規定されるｶﾞｳｽ確率場の最尤推定

確率場の特性が具体的にｶﾞｳｽ確率場として与えられる場合に、最尤法により$P(Z/Y)_{max}$を計算し、観測値が与えられたもとでのZを求めることを考える。

確率場;Z(X)が、ｶﾞｳｽ分布に従う場合に、確率場;Yが与えられた条件のもとでの確率場;Zの条件付き確率密度関数;P(Z/Y)を求めると、その指数部は次式となる[2]。

$$J_1=-(1/2)\,[(Z-\mu Z)C^{-1}(Z-\mu Z)^T+(Y-\mu Y)(gC^{-1}g^T+R)^{-1}(Y-\mu Y)^T$$
$$-(Y-gZ)R^{-1}(Y-gZ)^T] \quad (7)$$

ここで、$E\,[(Z-\mu Z)(Z-\mu Z)^T]=C$、$E\,[\omega\omega^T]=R$である。

式(7)において条件付き確率密度関数;P(Z/Y)を最大とすることは、$J_2=-J_1$とおいて、J_2を最小とすれば良い。その際、$J_2\to$min.となるZを$\hat{Z}$として表せば、$\partial J_2/\partial Z=0$となるので次式が得られる。

$$(\hat{Z}-\mu Z)C^{-1}-(Y-g\hat{Z})R^{-1}g^T=0$$
$$(C^{-1}+gR^{-1}g^T)\hat{Z}=C^{-1}\mu Z+YR^{-1}g^T$$
$$=(C^{-1}+gR^{-1}g^T)\mu Z+g^TR^{-1}(Y-g\mu Z)$$

したがって、

$$\hat{Z}=\mu Z+(gR^{-1}g^T+C^{-1})g^TR^{-1}(Y-g\mu Z)^T \quad (8)$$

式(8)によれば、$\hat{Z}$(または$\hat{WZ}$)は、観測値に対する線形補間式として表現されることが分かる。さらに式(7)はｶﾞｳｽ確率密度関数に対する最尤推定法法から誘導された結果であるが、その評価関数は2次形式として与えられている。また最小誤差分散推定法では、予め2次形式の評価関数を設定している。したがって、ｶﾞｳｽ確率密度関数で規定される確率場に対しては、最尤推定法と最小誤差分散推定法は同一の結果を与えている

ことが分かる[1]。

4．地震波動伝播現象の補間

ここまでは、与えられた確率場の特性を満足するための最適化問題について概説した。ここでは、波動伝播現象に対する具体的な補間式を示す。

さて時空間ｶﾞｳｽ確率場；$Z(\mathbf{X},t)$において、確率場の特性を規定する相互相関関数は推定されており既知とする。

$$C(\mathbf{X},\mathbf{X}',t,s)=E\left[(Z(\mathbf{X},t)-\mu Z(\mathbf{X},t))\ (Z(\mathbf{X}',s)-\mu Z(\mathbf{X}',s)\right] \tag{9.a}$$

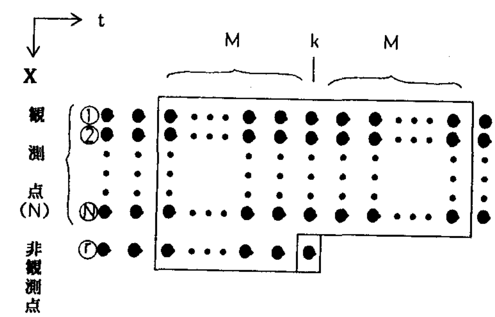
$$=E\left[W(\mathbf{X},t)W(\mathbf{X}',s)\right] \tag{9.b}$$

$\mathbf{X}$および$\mathbf{X}'$は任意空間座標であり、tおよびsは任意時間座標である。

参考文献(4)をもとに、離散化した確率場；$W(\mathbf{X}r,k)$が時間方向に対して現時刻；kを中心として$\pm M\Delta$の範囲内の観測値により表現されるものとすれば次式を得る。ここで、確率場；$Z(\mathbf{X}r,k)$の平均値は、既知であるので、$Z(\mathbf{X}r,k)$を補間することは、$W(\mathbf{X}r,k)$を求めることと等価である。

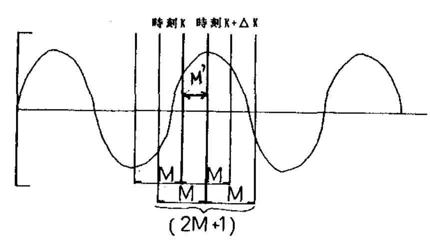
$$W^*(\mathbf{X}r,k)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=-M}^{M}\lambda'ij(\mathbf{X}r)Y(\mathbf{X}i,k+j)+\sum_{\iota=-M}^{-1}\lambda'r\iota(\mathbf{X}r)W(\mathbf{X}r,k+\iota)+\delta(\mathbf{X}r,k) \tag{10}$$

式(10)は非観測点の確率場$W^*(\mathbf{X}r,k+\iota)$をとり込んだ形式となっているが、ｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*(\mathbf{X}r,k+\iota)$は、時間方向の逐次ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝにより推定されるので既知の値として扱うことができる。次に$\underline{W}(\mathbf{X}r,k)$が得られた後に、時刻$k$を$k+1$として、同様に$\underline{W}(\mathbf{X}r,k+1)$をｼﾐｭﾚｰﾄする（図-2）。また、$\delta(\mathbf{X}r,k)$の性質およびｼﾐｭﾚｰﾄの方法については、文献(4)に委ねることとする。



図－２．　データの処理

ここで、式(9)が与えられれば未知係数$\lambda'ij(\mathbf{X}r)$および$\lambda'r\iota(\mathbf{X}r)$は、式(7)をもとに決定することができる。さて、上記の定式化は時間方向に定常とした定式化に対するものである。非定常過程に対しては、図-3に示すように区間定常性を仮定することにより、補間が可能となる（図-3）。



図－３．　区間定常性

具体的な、相互相関関数の与え方および実観測記録の解析例に付いては講演時に示す。

参考文献

(1).有本；ｶﾙﾏﾝﾌｨﾙﾀ,産業図書
(2).加藤；最適制御入門、東京大学出版会
(3)星谷勝：条件付き確率場のｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ理論,土木学会論文集,No.458/I-22, pp.113-118, 1993.
(4)M.Hoshiya and O. Maruyama: Stochastic Interpolation of Earthquake Wave Propagation, Submitted for abstract in the ICOSSAR'93, 6th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, Innsbruck, Austria, 1993.