

(57) 減衰を有する一層系地盤のインパルス応答について

ハザマ技術研究所 松原勝己

1. まえがき 現在、自由地盤を対象とした震動解析には、一次元波動理論に基づいて振動数領域での解を求めFFT等を用いて時刻歴応答を計算する方法と、直列質点系モデルに基づく時間領域での運動方程式を直接に解く方法とがある。前者は、SHAKE等のプログラムに代表されるように、減衰モデルとして複素減衰タイプが多用されているのに対して、後者では時間領域解析という制約からフォークト型減衰（比例減衰）が用いられることが多い。筆者は、フォークト型および複素減衰を有する一自由度系を対象として、減衰タイプの特徴を検討し伝達関数の性質の違いがインパルス応答特性に関連していることを示した¹⁾。本報では、一層系均質地盤を対象として、一次元波動理論から導かれる地盤の伝達関数を求め、そのフーリエ逆変換を解析的に評価することによってインパルス応答を計算し、減衰タイプの違いによる影響を検討したものである。

2. 減衰を有する一層系地盤の伝達関数 図-1に示すような線形の一層系均質地盤を考える。地盤の絶対変位 $\xi(z, t)$ に関する運動方程式は次式で表される²⁾。

$$\rho \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial t \partial z} - G \frac{\partial^2 \xi(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

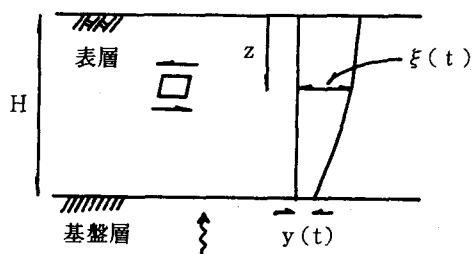


図-1 一層系地盤

ここに、 ρ : 地盤の密度 η : 地盤の減衰係数 G : 地盤のせん断弾性係数 である。

式(1)を振動数領域で書くために、 $\xi(z, t) = u(z, \omega) e^{i\omega t}$ とおき、複素減衰タイプでの減衰定数

h を導入して、 $\eta = 2hG/\omega$ と置けば、次式をうる。

$$\frac{d^2 u(z, \omega)}{dz^2} + p^2 u(z, \omega) = 0 \quad \text{ここに、} p^2 = \frac{\rho \omega^2}{G(1+2ih)} \quad (2)$$

式(2)の解は、 $u(z, \omega) = A e^{ipz} + B e^{-ipz}$ (A, B は z に依らない定数) と書け、地表面でのせん断応力ゼロの条件より、 $A=B$ となるので地表面の加速度の伝達関数 $H_c(\omega)$ は、

$$H_c(\omega) = \frac{-\omega^2 u(0, \omega)}{-\omega^2 u(H, \omega)} = \frac{2}{e^{ipH} + e^{-ipH}} = \frac{1}{\cos pH} = \frac{1}{\cos \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{\omega H}{\sqrt{1+2ih}} \right\}} \quad (3)$$

ここに、 $H_c(\omega)$ は複素減衰タイプの場合の地表面加速度の伝達関数である。式(3)は、応答が実関数となるための条件 $H_c(-\omega) = \overline{H_c(\omega)}$ を満足していないので、 $\omega > 0$ および $\omega < 0$ に対して、次式のように定義する。

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H_1(\omega) = \frac{1}{\cos \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{\omega H}{\sqrt{1+2ih}} \right\}} & (\omega > 0) \\ H_2(\omega) = \overline{H_1(\omega)} = \frac{1}{\cos \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{\omega H}{\sqrt{1-2ih}} \right\}} & (\omega < 0) \end{cases} \quad (4)$$

次に、フォークトタイプの場合の地表面加速度の伝達関数 $H_V(\omega)$ は、式(3)において、 $h=\omega\eta/2G$ とおけばよいから、

$$H_V(\omega) = \frac{1}{\cos \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{\omega H}{\sqrt{1+i\frac{\eta\omega}{G}}} \right\}} \quad (5)$$

3. 複素減衰を有する場合のインパルス応答

(1) 伝達関数の特異点 いま、円振動数 ω を複素数 z として、 $H_c(z)$ の分母は式(3)より

$$\cos \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{zH}{\sqrt{1+2ih}} \right\} = \cos(ax+by) \cosh(ay-bx) - i \sin(ax+by) \sinh(ay-bx) \quad (6)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho}{G}} H \sqrt{\frac{\sqrt{1+4h^2}+1}{1+4h^2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho}{G}} H \sqrt{\frac{\sqrt{1+4h^2}-1}{1+4h^2}} \quad (7)$$

したがって、伝達関数 $H_c(z)$ の特異点 (x_j, y_j) は、

$$y_j = \frac{b}{a} x_j = h x_j \quad x_j = -\frac{a}{a^2+b^2} \frac{\pi}{2} (\pm 2j-1) = (\pm 2j-1) \omega_1 \quad (j=1, 2, \dots, \omega_1 = \pi V_s/2H) \quad (8)$$

となり、図-2に示すように上半平面と下半平面に位置することになる。

(2) インパルス応答の計算 インパルス応答 $h_c(t)$ は、伝達関数 $H_c(t)$ のフーリエ逆変換で表されるから、式(4)より、

$$h_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 H_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

$t > 0$ のとき式(12)を評価するために、 ω を複素数 $z(z=x+iy)$ とし、 $\omega > 0$ および $\omega < 0$ に対してそれぞれ図-3(a)の第1象限および図-3(b)の第2象限に示すような積分路に沿う複素積分を考える。留数定理より、

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} H_1(z) e^{izt} dz \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{iR}^0 H(z) e^{izt} dz \\ & = \frac{i}{2} \sum_{z=z_j} \text{Res} [H_1(z) e^{izt}] \quad (\omega > 0) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 H_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_3} H_2(z) e^{izt} dz \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{iR} H_2(z) e^{izt} dz \\ & = \frac{i}{2} \sum_{z=z_j} \text{Res} [H_2(z) e^{izt}] \quad (\omega < 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\text{Res}_{z=z_j}$ は、 $z=z_j$ の留数である。

式(13)において、 Γ_1 および Γ_3 に沿う積分は $R \rightarrow \infty$ でゼロとなることを考慮し、虚軸に沿う積分は

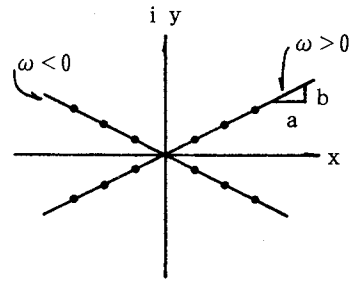
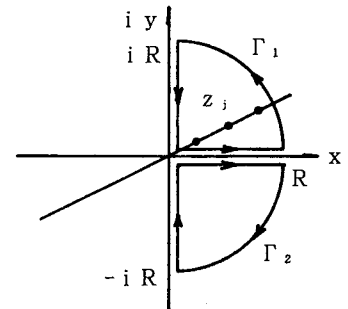
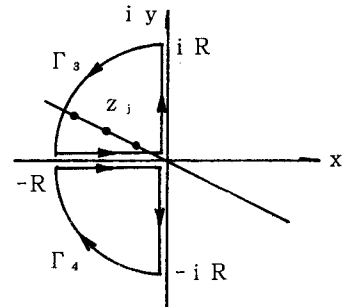


図-2 伝達関数の特異点の位置 (複素減衰)



(a) $\omega > 0$



(b) $\omega < 0$

図-3 複素積分路 (複素減衰)

$z = iy$ と置いて、

$$h_c(t) = \sum_j i \sqrt{\frac{G}{\rho}} \frac{1}{H} \left[\frac{\sqrt{1-2ih} \cdot e^{-i\bar{z}_j t}}{\sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{\bar{z}_j H}{\sqrt{1-2ih}}} - \frac{\sqrt{1+2ih} \cdot e^{iz_j t}}{\sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{z_j H}{\sqrt{1+2ih}}} \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin by \sinh ay}{(\cos by \cosh ay)^2 + (\sin by \sinh ay)^2} e^{-y't} dy \quad (11)$$

ここで、 $z_j = x_j + iy_j$ と置き、式(8)の関係を考慮すれば、

$$h_c(t) = \sum_j \frac{4}{\pi} \omega_j (-1)^{j-1} e^{-q\omega_j t} [p \sin \omega_j t + q \cos p \omega_j t] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin by \cdot \sinh ay}{(\cos by \cosh ay)^2 + (\sin by \sinh ay)^2} e^{-y't} dy \quad (t > 0) \quad (12)$$

$$\text{ここに、} p = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4h^2}+1}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4h^2}-1}{2}}, \quad \omega_j = \omega_1(2j-1), \quad \omega_1 = \frac{\pi V_s}{2H}$$

また、 $t < 0$ のときは、 $\omega > 0$ および $\omega < 0$ に対してそれぞれ図-3(a)の第4象限および図-3(b)の第3象限に示すような積分路に沿う複素積分を考えると、

$$h_c(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin by \sinh ay}{(\cos by \cosh ay)^2 + (\sin by \sinh ay)^2} e^{y't} dy \quad (t < 0) \quad (13)$$

式(12)は、加速度のインパルス応答を表しているが、文献に示した一自由度系に対するインパルス応答¹⁾と比較すれば、一自由度系の応答のモード合成形になっていることがわかる。

4. フォークト形減衰を有する場合のインパルス応答

(1) 伝達関数の特異点 式(5)より

$$H_v(\omega) = \frac{1}{\cos \left\{ \frac{a\omega}{\sqrt{1+ib\omega}} \right\}} \quad \text{ここに、} a = \sqrt{\frac{\rho}{G}} H, \quad b = \frac{\eta}{G} \quad (14)$$

円振動数 ω を複素数 z として、 $\cos \left\{ \frac{az}{\sqrt{1+ibz}} \right\} = 0$ を満足する x および y は次式で表される。

$$\begin{cases} \cos(axA + ayB) = 0 \\ yA = xB \end{cases} \quad (x > 0, y > 0) \quad \begin{cases} \cos(axA - ayB) = 0 \\ yA = -xB \end{cases} \quad (x < 0, y > 0) \quad (15)$$

ここに、

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-by)^2 + b^2x^2} + (1-by)}{2\{(1-by)^2 + b^2x^2\}}}, \quad B = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-by)^2 + b^2x^2} - (1-by)}{2\{(1-by)^2 + b^2x^2\}}}$$

式(15)を満足する点 (x, y) の軌跡(特異点の位置)は、

図-4に示すように、中心 $(0, \frac{1}{b})$ 、半径 $\frac{1}{b}$ の円上と虚軸上の

$y > \frac{1}{b}$ の部分になることが示される。式で表せば、

$$\left. \begin{aligned} h_j \leq 1 \text{ のとき } & \begin{cases} x_j = \pm \omega_j \sqrt{1-h_j^2} \\ y_j = h_j \omega_j \end{cases} \\ h_j \geq 1 \text{ のとき } & \begin{cases} x_j = 0 \\ y_j = \omega_j (h_j \pm \sqrt{h_j^2 - 1}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

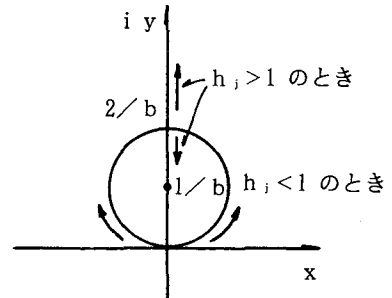


図-4 伝達関数の特異点の位置 (フォークト型)

ここに、 $\omega_1 = \pi V_s / 2H$, $\omega_j = \omega_1 (2j-1)$ ($j=1, 2, \dots$), $h_j = b \omega_j / 2$ (j 次のモード減衰定数) で定義している。特に、粘性タイプの減衰では、 $\eta = 2hG/\omega_1$ で地盤の減衰定数 h を定義し、 $h_j = h \omega_j / \omega_1$ となる。また、振動数非依存型 (ひずみエネルギー比例型) の減衰では、 $\eta = 2hG/\omega_j$ で h を定義し、 $h_j = h$ となる。振動数非依存型では、図-4 に示した円の中心が $(0, \frac{\omega_j}{2h})$ 、半径が $\frac{\omega_j}{2h}$ となるので、円の大きさが ω_j によって変化することになる。すなわち、 $h < 1$ のときは $y_j = \pm h x_j / \sqrt{1-h^2}$ (ただし $y_j > 0$) の直線上に特異点が存在する。

(2) インパルス応答の計算 インパルス応答 $h_v(t)$ は伝達関数 $H_v(\omega)$ のフーリエ逆変換で表され、式(14)より、

$$h_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_v(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\cos \left\{ \frac{a\omega}{\sqrt{1+ib\omega}} \right\}} d\omega \quad (17)$$

式(17)を評価するために、 ω を複素数 $z (z = x + iy)$ と考え、図5に示すような実軸と上半平面の半円に沿う積分路に沿う複素積分を考える。この時、留数定理より、

$$h_v(t) = i \operatorname{Res}_{z=z_j, z_j'} [H_v(z) e^{izt}] \quad (18)$$

伝達関数の特異点 z_j および z_j' は、式(16)を用いて

$$h_v(t) = \sum_{\substack{j \\ (h_j < 1)}} \frac{4}{a} \operatorname{Im} \left[\frac{(1+ibz_j) \sqrt{1+ibz_j}}{(2+ibz_j) \sin \left\{ \frac{az_j}{\sqrt{1+ibz_j}} \right\}} \cdot e^{iz_j t} \right] + \sum_{\substack{j \\ (h_j > 1)}} \frac{2}{a} \left[\frac{(1-by_j^+) \sqrt{by_j^+-1}}{(2-by_j^+) \sin \left\{ \frac{ay_j^+}{\sqrt{by_j^+-1}} \right\}} e^{-y_j^+ t} + \frac{(1-by_j^-) \sqrt{by_j^--1}}{(2-by_j^-) \sin \left\{ \frac{ay_j^-}{\sqrt{by_j^--1}} \right\}} e^{-y_j^- t} \right] \quad (19)$$

ここに、 $y_j^+ = \omega_j (h_j + \sqrt{h_j^2 - 1})$, $y_j^- = \omega_j (h_j - \sqrt{h_j^2 - 1})$ である。式(19)より、

$$h_v(t) = \sum_{\substack{j \\ (h_j < 1)}} \frac{4}{\pi} (-1)^{j-1} \omega_j e^{-h_j \omega_j t} \left[\frac{1-2h_j^2}{\sqrt{1-h_j^2}} \sin \omega_j \sqrt{1-h_j^2} t + 2h_j \cos \omega_j \sqrt{1-h_j^2} t \right] + \sum_{\substack{j \\ (h_j > 1)}} \frac{4}{\pi} (-1)^{j-1} \omega_j e^{-h_j \omega_j t} \left[\frac{1-2h_j^2}{\sqrt{h_j^2-1}} \sin h \omega_j \sqrt{h_j^2-1} t + 2h_j \cosh \omega_j \sqrt{h_j^2-1} t \right] \quad (20)$$

式(20)によれば、フォークト型減衰を有する一自由度系での加速度のインパルス応答のモード合成形になっていることがわかる。

5. あとがき 本報では、フォークト型減衰と複素減衰を有する均質な一層系地盤を対象として、一次元波動理論から導かれる伝達関数のフーリエ逆変換を直接に評価することによって得たインパルス応答の比較から、減衰タイプの特徴を検討した。その結果、伝達関数の特異点位置の違いに関連してインパルス応答特性が異なることがわかったとともに、一自由度系のインパルス応答のモード合成形で表されることも示された。今後は、二層系地盤についての同様の検討を行ってゆく予定である。

【参考文献】1) 松原勝己：減衰を有する一自由度系のインパルス応答について、土木学会第48回年次学術講演会、平成5年9月、2) Ohsaki, Y. : Dynamic Characteristics and One-Dimensional Amplification Theory of Soil Deposits, Department of Architecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo, 1982

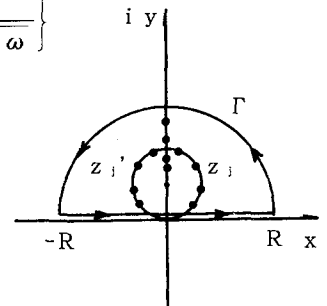


図-5 複素積分路
(フォークト型)