

## (44) EK-WLI-FEMによる地盤動特性の同定

(株)地崎工業 正会員 須藤 敦史  
武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

### 1. はじめに

地盤や構造物の動特性同定や静的な逆解析において、対象システムを非線形状態方程式と観測方程式として、シーケンスに同定を行う拡張カルマンフィルタ<sup>1)</sup>を用いた研究が行われている。

拡張カルマンフィルタを用いたパラメータ同定の特徴は、動的な場合には運動方程式と未知パラメータを状態ベクトルとして状態方程式に組み込んでいる<sup>2)-4)</sup>。また有限要素法を用いた静的な逆解析では、システムの関係式を観測方程式に記述しており、状態ベクトルは未知パラメータのみとしてその定常性を仮定している点である<sup>5)-7)</sup>。

一方、構造物や地盤の動的なシミュレーション解析において、有限要素法や境界要素法などの数値離散化手法を用いた解析が広く用いられており、このうち有限要素法は非線形問題を扱うことができ、解析対象領域が不均質な場合や複雑な形状を有する場合に適した解析手法である。しかし実際の地盤において地盤定数は、空間的に変動し不均質性を有するものと考えられている。また観測データは、観測誤差等のばらつきを含む値である。したがって、有限要素法による地盤の数値解析では、必要な地盤定数を正確に推定することは難しく、信頼性の高い予測解析が行えないのが現状である。

また、動的なパラメータ同定において入力波形は、ある地点で観測された波形を水平に作用させている。しかし実際の地盤では入力波形やその特性は異なる場合が多く、入力特性の同定を行うことが必要となる。

そこで本研究では、ベイズ理論により事前分布を更新し事後分布を推定する拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを用いた手法(EK-WLI法)<sup>8)</sup>と有限要素法を組み合わせたEK-WLI-FEM<sup>9)</sup>による動的なパラメータ同定への適用性の検討を、地盤動特性と入力特性の同定を数値解析を通して行っている。

### 2. 拡張カルマンフィルタ

拡張カルマンフィルタは、非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本式として構成したものである。

$$d\mathbf{X}t/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X}t, t) + \mathbf{G}t\mathbf{w}t \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}t_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}t_k, t_k) + \mathbf{v}t_k \quad (2)$$

この拡張カルマンフィルタの基本式に対するアルゴリズムは、非線形の状態方程式と観測方程式を基準軌跡のまわりに線形化し、カルマンフィルタのアルゴリズムに代入して構成されたものである。ここで、式(1)は状態ベクトルの時間的遷移を、式(2)は状態ベクトルと観測ベクトルの関係を示している。したがって、初期状態ベクトル $\hat{\mathbf{X}}(t_0 | t_0)$ と初期推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}(t_0 | t_0)$ が得られれば、観測ベクトル $\mathbf{Y}t_k$ を順次取り込みながら漸化的に最適推定値を求めることができる。ここでカルマンフィルタの詳細なアルゴリズムは、文献 1)に委ねる。

### 3. EK-WLI-FEM<sup>10), 11)</sup>

#### (1) 観測方程式

一般に、動的な有限要素法において運動方程式は次式に示される。

$$[M] \ddot{\mathbf{u}} + [C] \dot{\mathbf{u}} + [K] \mathbf{u} = \mathbf{f}(\theta, t) \quad (3)$$

$[M], [C], [K]$  : 質量, 減衰, 剛性マトリクス

$\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  : 応答変位, 速度, 加速度ベクトル

$\mathbf{f}(\theta, t)$  : 荷重ベクトル

$\theta$  : 入射角度

ここで、得られる観測波形が応答加速度波形のときには、観測方程式は次式のようなになる。

$$\ddot{\mathbf{u}} = [M]^{-1} \{ \mathbf{f}(\theta, t) - [C] \dot{\mathbf{u}} - [K] \mathbf{u} \} \quad (4)$$

拡張カルマンフィルタにおける観測方程式は式(2)に示されるように、観測値は応答加速度ベクトルに観測雑音を加えた値である。したがって、観測方程式を有限要素法の運動方程式の形で表すと式(5), (6)のようなになる。

$$\mathbf{Y} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) + \mathbf{v} \quad (5)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = [M]^{-1} \{ \mathbf{f}(\theta, t) - [C] \dot{\mathbf{u}} - [K] \mathbf{u} \} \quad (6)$$

式(6)より、観測ベクトルは状態ベクトルの関数となる。ここで式(5)を離散表示すると、式(7)のようなになる。

$$\mathbf{Y}_{t_k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{t_k}) + \mathbf{v}_{t_k} \quad (7)$$

本研究で対象とする問題は、観測値がある時刻において計測され、その計測値より最適状態ベクトルの推定を行うものである。

また、EK-WLI法は観測ベクトルに含まれる情報を効率的に抽出するために、得られる観測値において状態ベクトル推定をローカルに繰り返す。したがって、繰り返し計算  $t_k$  は時間に関係ない。

## (2) 状態方程式

一般の設計や数値解析では、地盤定数を各種物理試験の値をもとにして確定値を用いる場合が多い。しかし、地盤定数は不均質性を有し空間的にばらつく値である。また、物性値試験による値は観測誤差などのばらつきを含む値と考えられる。そこで、空間的に分布する地盤定数や測定誤差を評価するため、拡張カルマンフィルタの状態ベクトルやシステムノイズを空間的なばらつきを有する値や試験誤差と仮定して定式化を行うと式(8)のようなになる。

$$\mathbf{X}(t_{k+1} | t_k) = [I] \mathbf{X}(t_k | t_k) + \mathbf{w}_t \quad (8)$$

ここで状態方程式は定常とし、未知パラメータを要素とする状態ベクトルとなる。

## 4. EK-WLI-FEMの変換行列

拡張カルマンフィルタの変換行列は式(7)を各状態ベクトルで偏微分して得られる。しかし、観測ベクトルは状態ベクトルに対して非線形であるため、直接偏微分により求めることは困難である。

したがって、変換行列を影響係数法<sup>12)</sup>により近似的に算出する。影響係数法は状態ベクトルを順次微量変化させ有限要素法の順解析より求める手法であり、式(9)のように表される。

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{X}_{t_k})}{\partial x_j} = \frac{h_i(x_j t_k + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - h_i(x_j t_k)}{\Delta x_j} \quad (9)$$

$h_i(x_j)$  :  $\mathbf{h}(\mathbf{X})$  の  $j$  番目の観測点

$\Delta x_j$  :  $x_j$  の微小増分

$\mathbf{e}_j$  :  $j$  番目の要素

これにより、EK-WLI-FEMによる同定計算が複雑な偏微分計算を行うことなく可能になる。

EK-WLI-FEMにおけるフローを図-1に示す。

ここで、状態ベクトルの推定は、図-1に示すように初期値  $\hat{x}_0, P_0$  が与えられるとカルマンフィルタのアルゴリズムにより漸化的に行なわれる。

この時に観測ベクトルは、ある時刻  $t_k$  に得られる観測値を用いて計算を行う。そして、この観測ベクトルにおいてローカルな繰り返しを行い、繰り返し2回目以降に推定誤差共分散行列の重み ( $W$ ) を乗じ、ローカルな繰り返しを  $Q$  回行い最適状態ベクトルの推定を行う。

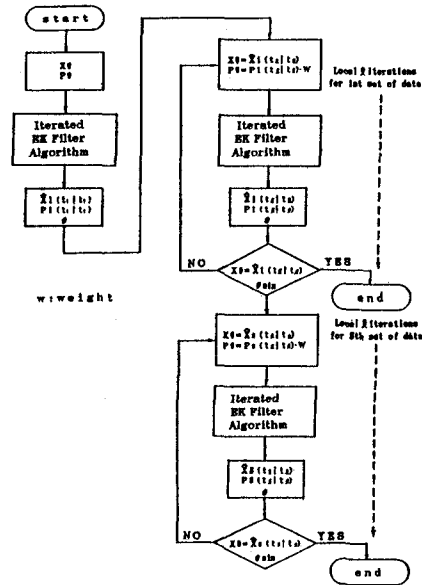
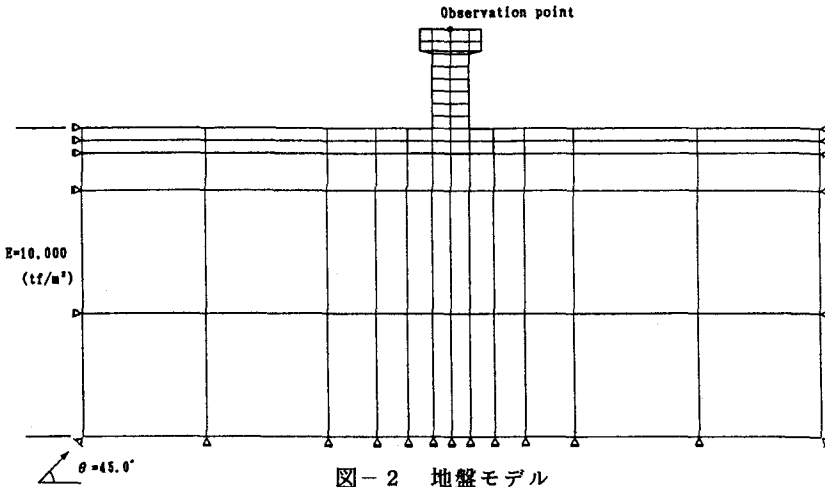


図-1 EK-WLI-FEMの同定フロー

## 5. 数値解析例 (1)

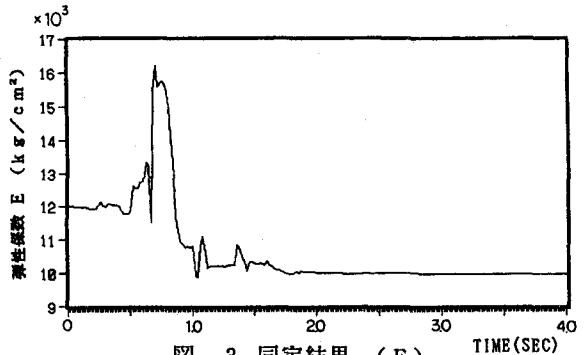
実際の地盤を図-2に示すような均質な地盤モデルを仮定し、本手法により未知弾性係数の推定を行う。



ここで、状態方程式は式(10)となる。

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{t_{k+1}} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix}_{t_k} + \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}_{t_k} \quad (10)$$

また、観測点は図-2に示す点としている。観測ベクトルはあらかじめ真の弾性係数により応答加速度を算出し、加速度平均に対し10%の標準偏差をもつ正規性のノイズを観測誤差として加えた値を用いている。入力波形はエルセントロ地震加速度波形を用いている。ここで、本手法におけるローカルな繰り返し回数は、



2回で同定解析を行っている。

観測ベクトルに10%の観測誤差を含む場合の同定結果を図-3示す。図より安定した収束過程を示している。

## 6. 数値解析例(2)

地盤の動弾性係数と入力特性(入射角度)の同定を行う。状態方程式は地盤の弾性係数と入射角度を未知数として式(11)のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{t_{k+1}} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} E \\ \theta \end{bmatrix}_{t_k} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_{t_k} \quad (11)$$

観測加速度波形にノイズが含まれない場合の同定結果を図-4, 5に示す。図より安定した状態ベクトルの収束過程を示している。

本手法は観測値を逐次取り込み、その観測値に対してローカルな繰り返しを行うことで観測値に含まれる情報を有効に抽出して、最適状態ベクトルの推定を行っていると言える。

## 7. 結 論

本手法は、拡張カルマンフィルタの逐次性を生かしたEK-WLI法のアルゴリズムと有限要素法を組み合わせたパラメータ同定手法である。そして、安定した最適状態ベクトルの推定結果が得られた。また、弾性係数などの空間的なばらつき、試験誤差や観測データの誤差を考慮することができ、入力特性の同定も可能である。

### (参考文献)

- 1) Jazwinski, A. H.: Stochastic processes and filtering theory, Academic press, 1970.
- 2) Hoshiya, M. and Saito, E.: Structural identification by Extended Kalman Filter, Jour. E. M. Div., ASCE, Vol. 110, No. 12, December, 1984
- 3) 星谷 勝・斉藤悦郎: 拡張カルマンフィルタを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文集, No. 339, pp. 59-67, 1983
- 4) 星谷 勝・斉藤悦郎: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文集, No. 344, pp. 289-298, 1984
- 5) 門田俊一・斉藤悦郎・和久昭正・後藤哲雄: 繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用, 土木学会論文集, No. 406, pp. 107-116, 1989
- 6) 村上 章・長谷川高士: Kalmanフィルタ有限要素法による逆解析と観測点配置, 土木学会論文集, No. 388, pp. 227-235, 1987
- 7) 鈴木 誠・石井 清: 拡張カルマンフィルタによる土質定数の空間分布推定, 土木学会論文集, No. 406, pp. 71-78, 1989
- 8) 須藤敦史・星谷 勝: 拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI法の提案, 土木学会論文集, No. 437, pp. 203-211, 1991
- 9) 須藤敦史・星谷 勝: EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析, 土木学会論文集, No. 446, pp. 177-185, 1992.
- 10) M. Hoshiya and A. Sutoh: Extended Kalman filter-weighted local iteration method for dynamic structural identification, Proc. of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering, pp. 3715-3720, 1992.
- 11) 須藤敦史・星谷 勝: EK-WLI-FEMによるパラメータ同定, 土木学会北海道支部年次技術研究発表会論文報告集第49号, pp. 289-293, 1993
- 12) W. G. W. Yen, Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem, Water Resources Research, 22(2) 1986

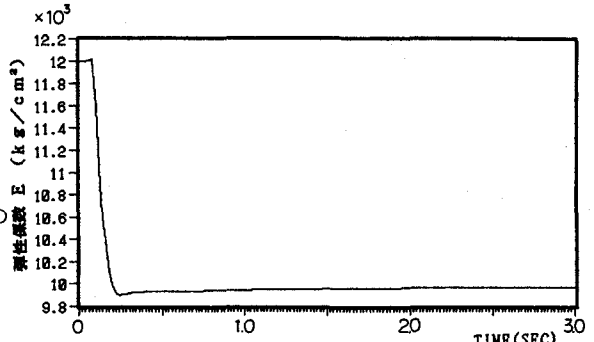


図-4 同定結果 (弾性係数)

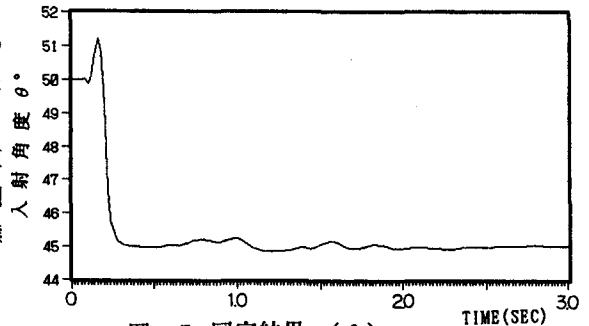


図-5 同定結果 (θ)