

(39) 薄層要素-離散化波数法の3次元成層地盤への適用

東京理科大学 正会員 東平光生

1. はじめに

著者は、薄層要素法と離散化波数法を組み合わせた成層弾性体の衝撃応答解析手法（以下、薄層要素-離散化波数法）を展開してきた¹⁾⁻³⁾。この手法の特徴は、弾性波動方程式の解を波数領域の表面波モードの重ね合わせで表現する点にある。また、薄層要素法の導入によって、表面波モードがマトリックスの固有値問題として効率的に得られる点にも特徴がある。本論文は、これまで2次元の波動場について示してきた薄層要素-離散化波数法を、3次元波動場の解析に適用できるよう定式化を行う。また、これまで剛基盤上の表層地盤に限られていた数値計算を、半無限均質弾性体や弾性基盤上の表層地盤の解析にも適用し、剛基盤以外の解析モデルに対する本手法の有効性を検証する。

2. 薄層要素-離散化波数法の3次元成層地盤への適用法

薄層要素-離散化波数法を3次元成層地盤へ適用する場合、その離散化波数法の部分に関しては、Olsonらの手法⁴⁾を導入する。この理由は、点震源を考える場合、Olsonらの手法は非常に効率的な計算を実現するためである。Olsonらに従い、まず弾性波動方程式の解を表現するために、次の surface vector harmonics⁴⁾を導入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k^m(r, \phi) &= Y_k^m(r, \phi) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{S}_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{k} \partial_k Y_k^m(r, \phi) \mathbf{e}_r + \frac{1}{k r} \partial_\phi Y_k^m(r, \phi) \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{T}_k^m(r, \phi) &= \frac{1}{k r} \partial_\phi Y_k^m(r, \phi) \mathbf{e}_r - \frac{1}{k} \partial_k Y_k^m(r, \phi) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 r, ϕ および z は円筒座標系の座標成分、 k は r 方向の波数、 $\mathbf{e}$ は単位ベクトルで添字はその方向を示す。また、 ∂ は偏微分の演算子であり、下付きの添字の変数で偏微分を行う。また、 Y_k^m は J_m を m 次の第1種 Bessel 関数として、次式で表される。

$$Y_k^m(r, \phi) = J_m(kr) \exp(im\phi) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

点震源を考えると、弾性体に作用する物体力 $\mathbf{f}$ およびそれによって生じる変位場 $\mathbf{u}$ は、surface vector harmonics を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(r, \phi, z, t) &= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} [F_{zk_n}^m(z, t) \mathbf{R}_{k_n}^m(r, \phi) + F_{rk_n}^m(z, t) \mathbf{S}_{k_n}^m(r, \phi) + F_{\phi k_n}^m(z, t) \mathbf{T}_{k_n}^m(r, \phi)] \\ \mathbf{u}(r, \phi, z, t) &= \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} [U_{zk_n}^m(z, t) \mathbf{R}_{k_n}^m(r, \phi) + U_{rk_n}^m(z, t) \mathbf{S}_{k_n}^m(r, \phi) + U_{\phi k_n}^m(z, t) \mathbf{T}_{k_n}^m(r, \phi)] \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 t は時間、 k_n は、 $J_m(k_n R) = 0$ を満足する離散化波数である。ただし、 R は十分大きな正数であり、数値計算においては、鏡像ソース点¹⁾²⁾からの波動が解を乱さない様に設定する。式(3)で注意すべきことは、 m に関する総和は、 $-\infty < m < \infty$ の領域をとるのでなく、 $-1 \leq m \leq +1$ の領域をとることである。これは、物体力を点震源と仮定したことからの帰結であり、これによって、計算量の大幅な低減が可能となっている。

式(3)より、変位場を求めることは、 $U_{zk_n}^m, U_{rk_n}^m$ ならびに、 $U_{\phi k_n}^m$ を求めることに帰着される。これらを求めるための方程式は、式(3)を弾性波動方程式に代入することで得られ、次式となる。

$$\begin{aligned} ((\lambda + 2\mu)\partial_z^2 - k_n^2\mu)U_{zk_n}^m - k_n(\lambda + \mu)\partial_z U_{rk_n}^m + F_{zk_n}^m &= \rho\partial_t^2 U_{zk_n}^m \\ (\mu\partial_z^2 - k_n^2(\lambda + 2\mu))U_{rk_n}^m + k_n(\lambda + \mu)\partial_z U_{zk_n}^m + F_{rk_n}^m &= \rho\partial_t^2 U_{rk_n}^m \\ \mu(\partial_z^2 - k_n^2)U_{\phi k_n}^m + F_{\phi k_n}^m &= \rho\partial_t^2 U_{\phi k_n}^m \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 λ および μ はLaméの定数、 ρ は質量密度である。

ここでは、式(4)を解くために、薄層要素法を用いる。すなわち、式(4)の z に関する微分演算を有限要素法で離散化し、離散化された方程式を解くためにモーダルアナリシスを適用する。この定式化の詳細については、これまでに述べてきた方法¹⁾²⁾と全く同様であり、式(4)の解は、次のように表現される。

$$\{U(t)\}_{k_n}^m = \int_0^t [V]_{k_n}^m [\Lambda(t-\tau)]_{k_n}^m [[V]_{k_n}^m]^T \{F(\tau)\}_{k_n}^m d\tau \quad (5)$$

ここに、 τ は時間を表すパラメータ、 $\{U(t)\}_{k_n}^m$ および $\{F(\tau)\}_{k_n}^m$ は、薄層要素の境界位置で定義された、式(4)の解ならびに物体力をベクトル化したものである。また、 $\{F(\tau)\}_{k_n}^m$ の値は、 $\tau < 0$ でゼロになるものとし、式(4)の積分区間を設定している。また、 $[V]_{k_n}^m$ は、モーダルマトリックスで表面波モードの形状を記述し、 $[\Lambda(t-\tau)]_{k_n}^m$ は、表面波モードの時間変動を記述する対角マトリックスである。 $[\Lambda(t-\tau)]_{k_n}^m$ は、次の成分を持つ。

$$[\Lambda(t)]_{k_n}^m = \text{diag.} \left[\frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1}, \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2}, \dots, \frac{\sin \lambda_N t}{\lambda_N} \right] \quad (6)$$

ここに、 λ は各表面波モードの角振動数であり、その添字は表面波モードの次数を表す。式(6)の右辺では添字の m と k_n を省略しているが、 λ は m と k_n に依存して変化することに注意する。

式(5)で表現された解を、式(3)に示す方法で重ね合わせることで、弾性体に生じる変位場 u を計算することが可能となる。なお、薄層要素法では、各薄層要素ごとに、異なる材料定数を設定することが可能であり、この意味で式(5)は、多層地盤の応答を表現することが可能な解表現である。ただし、式(5)に現れるモーダルマトリックスは、通常は剛基盤の境界条件を設定して得られるものである。本論文では、この薄層要素法で弾性基盤上の表層地盤の解や半無限弾性体の解を求めるため、仮想の剛基盤を地表面から十分深くとり、仮想の剛基盤からの反射波が解を乱さないようにする。

3. 数値計算例

最初に、Fig. 1に示すように、半無限均質弾性体の一点に振源を置き、その影響を地表面で観測する問題を扱う。ここでは、振源として、鉛直方向に作用する荷重を考える。ただし、荷重の時間変動は階段関数で表されるものとする。この例題に関しては、Pekeisら⁵⁾によって、解析解が計算されている。剛基盤上の表面波モードの重ね合わせで、弾性波動方程式の解を表現する本手法にとって、半無限均質弾性体の解析は最も苦手の例題の一つであると言える。しかし、不利な計算条件のもとでの数値解と解析解を比較することは、解析手法の妥当性を検証する上で、非常に有効である。

ここでは、振源の地表面からの深さを $H = 0.6 \text{ km}$ とする。また、振源の荷重の大きさを $F = 1.0 \times 10^7 \text{ kN}$ 、地表面上の観測点の位置を $r = 3.0 \text{ km}$ 、弾性体の質量密度を $\rho = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、せん断弾性係数を $\mu = 2.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ 、ポアソン比を $\nu = 0.25$ とする。また、薄層要素の厚さは、均等に 0.2 km とし、仮想の剛基盤を地表面から 10.0 km の深さに設定する。式(3)の説明で示した R の値は 30 km とする。また、数値計算では、固有値解析で得られるすべての表面波モードを重ね合わせるものとし、離散化波数は $14.0 / \text{km}$ まで考慮する。

Fig. 2およびFig. 3は観測点における鉛直変位ならびに水平変位の時刻歴を示したものである。比較のため、図中にPekerisらの結果をプロットで示している。また、波動理論で求められるP波、回折SP波、S波、Rayleigh波の到着時刻をそれぞれの記号で示している。Fig. 2およびFig. 3の座標 τ 、 W および U は次のように無次元化されている。

$$\tau = \frac{c_p t}{L}, \quad W = -\frac{\pi^2 \mu L}{3F} w, \quad U = \frac{\pi^2 \mu L}{3F} u \quad (7)$$

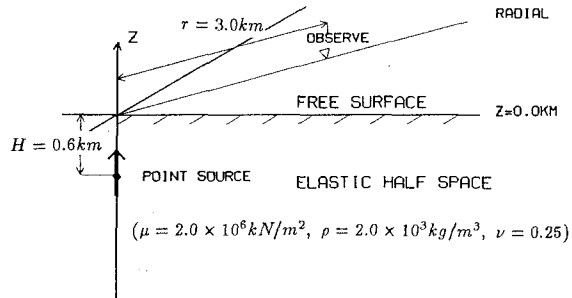


Figure 1. Point source in homogeneous elastic half space.

ここに、 w と u は鉛直および水平変位、 c_T はS波の伝播速度、 L は観測点と振源との距離である。

解析結果の中で、まず各種の波動の到着時刻について述べておく。本解析モデルの場合、波動論から、P波は $\tau = 0.58$ 、回折SP波は $\tau = 0.73$ 、S波は $\tau = 1.0$ 、Rayleigh波は、 $\tau = 1.07$ に到着する。この時刻に付けた記号と数値計算結果を比べれば、数値計算結果は、それぞれの波動の到達をよく評価していると思われる。ただし、Pekerisらの結果によれば、S波が到達した時刻での変位は瞬間的に無限大となるが、数値計算ではこの特異性が現れていない。これは、数値計算では、有限個の表面波モードを有限な波数領域で重ね合わせるためである。

Pekerisらの結果と数値計算結果は、概ね良好に一致していると言える。特に、鉛直変位時刻歴の後半の部分で現れる永久変位量を、本手法が精度よく表現していることが注目される。ただし、水平変位時刻歴で現れている、Rayleigh波の到着の部分では、数値計算結果とPekerisらの結果との間にやや開きがある。この開きは、半無限弾性体のRayleigh波を、剛基盤上のRayleigh波の重ね合わせで表現する難しさを示しているようにも思われる。

次に、本手法を成層弾性体へ適用してみる。解析モデルをFig. 4に示す。ここでは、地表面から深さ1.2 kmの場所に弾性基盤を設定する。弾性基盤におけるせん断弾性係数は $4.0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ 、質量密度は $2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ポアソン比は0.25とし、表層地盤の材料定数、荷重条件、観測点の条件については、Fig. 1で述べたものと同じとする。また、仮想の剛基盤は地表面から10 kmの深さに設定し、薄層要素の厚さは均等に0.2 kmとする。

観測点における鉛直方向ならびに水平方向の変位時刻歴をFig. 5、Fig. 6に示す。これらの時刻歴についても、Fig. 2およびFig. 3で施した座標の無次元化を行っている。また、各種の波動の到着に関しても記号で図示している。この時刻歴によると、回折SP波が到着してからS波が到着するまでの間にも、振動が見られる。この振動は半無限均質弾性体の解析では見られなかったことから、弾性基盤から反射してきた波動によるものと考えられる。

また、Fig. 2によれば、半無限弾性体の鉛直方向の応答は、S波到着後まもなく永久変位に収束するが、弾性基盤上の鉛直方向の応答はS波到着後も少し振動を続ける。この振動は表層地盤の存在によるRayleigh波によるものと考えられる。永久変位に関しては、弾性基盤上の応答の方が、半無限弾性体の応答に比べ小

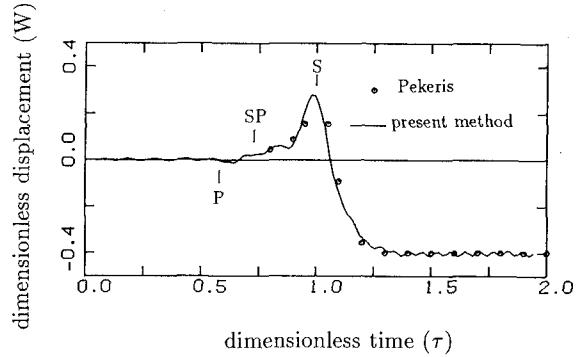


Figure 2. Comparison of time histories (vertical component).

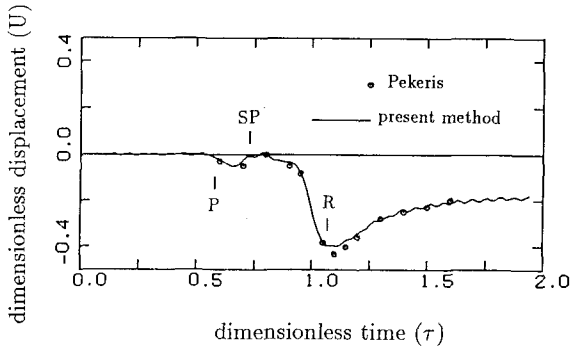


Figure 3. Comparison of time histories (horizontal component).

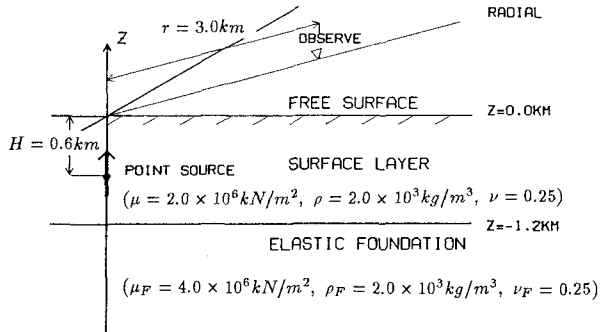


Figure 4. Point source in two-layered elastic half space.

さい。これは、弾性基盤による拘束を表層地盤が受けるためである。

以上の考察をまとめると、本手法による結果は、解析解が存在する問題に対しては、解析解と良好に一致し、解析解が存在しない問題に対しては、十分合理的な解を与えているものと言える。そして、これより本手法の妥当性が結論できると思われる。

なお、仮想の剛基盤を地表面から十分深いところに設定し、そこでの表面波モードから弾性波動方程式の解を構成する試みは、既に Harvey⁶⁾によって行われている。Harvey の手法と本手法との違いは、薄層要素法を用いて、マトリックスの固有値問題から表面波モードを求めたこと、周波数領域の解を経由せず、波数領域の解から直接時間領域の解を求めたことである。Harvey は、Fig. 1 に関連した例題で、P 波が到着する前と、時刻歴が永久変位に収束する部分で、数値解に誤差が生じることを指摘している。そして、この原因として、表面波モードの重ね合わせが有限であること、周波数領域の解の離散的な重ね合わせで時間領域の解を表現することなどを挙げている。

本論文で示した数値計算例に限れば、Harvey の指摘した誤差は回避できたようである。この原因の一つには、波数領域の解から時間領域の解を、因果性を考慮して直接計算したことが考えられる。しかし、Harvey の行った詳細な議論にしたがって、Harvey の手法と本手法の特徴の差異を検討する余地があると思われる。

4. おわりに

本論文では、薄層要素-離散化波数法による3次元成層地盤の解析手法を示すと共に、これを用いて半無限弾性体や弾性基盤上の表層地盤の解析を行った。数値計算結果は、解析解と良好に一致し、解析解が存在しない例題でも、十分合理的な解が得られたと思われる。このことはまた、十分深い場所に仮想の剛基盤を設定し、無限領域の解を求めて行くことが妥当であることを示している。剛基盤からの反射波が到達しないtime-windowにおいて、こうした境界条件の設定法が有効であることは、直感的にも理解できる。しかし、表面波モードの重ね合わせで解を表現するという視点に戻ると、正規モードが、有限なtime-windowで、解の完全な基底として振舞うことを示すと考えることもできる。こうした考えが、波動解析にとって有効な視点となるかどうか、今後検討を行いたい。

参考文献

- 1) 東平光生：離散化波数法と薄層要素法を組み合わせた成層弾性体の面外波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No. 459/I-22，pp. 119-128，1993.1
- 2) 東平光生：薄層要素-離散化波数法による成層弾性体の面内波動場での衝撃応答解析手法，土木学会論文集，No. 465/I-23，pp. 137-144，1993.4
- 3) 東平光生：3次元弾性体の表面波動の性質に関する基礎的検討，土木学会論文集，投稿中
- 4) Olson, A. H., Orcutt, J. A. and G. A. Frizer: The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 77, pp. 421-460, 1984
- 5) Pekeris, C. C. and H. Lifson: Motion of the surface of a uniform elastic half-space produced by a buried pulse, J. Acous. Soc. Am., Vol. 29, pp. 1233-1238, 1957
- 6) Harvey, D. J.: Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 66, pp. 37-69, 1981

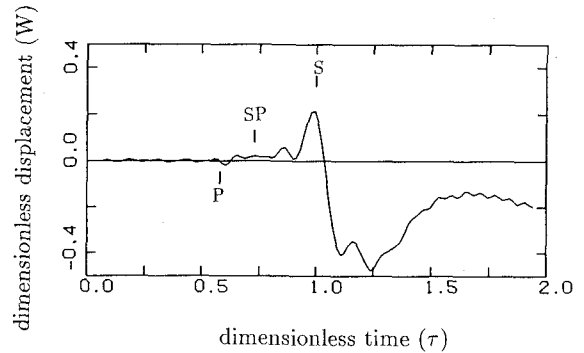


Figure 5. Response of the surface layer
(vertical component).

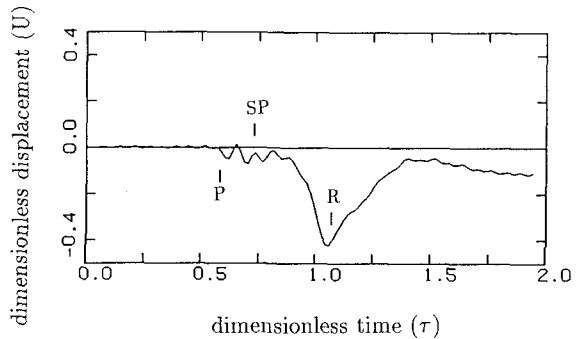


Figure 6. Response of the surface layer
(horizontal component).