

(87) 単純なライフラインの形状と需給点ペア間の連結確率との関係

埼玉大学工学部 川上 英二

1. 序文

ライフラインシステムは非常に多くの要素から構成されているため、解析方法の改良および近年の計算機の能力の飛躍的な増大にも拘らず、末端施設までのすべての要素を考慮して機能支障の解析を行うことは困難である。このため、システムを高次（幹線）施設と、低次（末端）施設とに分離し、高次施設に対してはネットワーク解析を行うが、低次施設に対しては、物理的な被害率と機能的な支障率とを簡単な関数で直接に関係付けるなど、解析に際しての単純化を行う必要がある。

著者は、参考文献1)2)において、システムの物理的な破壊の程度を表わす値として、1つのリンクまたは単位長さ当たりの破壊箇所数の期待値を表わす「被害率」と、システムがどの程度機能するかを示す「供給率（連結確率）」という2つのパラメーターに着目した。そして、特に、上水道または電力システムなどのように、供給地点と需要地点とが明確に分離されているようなシステムを対象として、いくつかの基本的な形状をしたシステムに対するこれら2つのパラメーターの地震直後および復旧期間中における関係を求めた。そして、都市およびシステムの形状または規模の変化に伴うシステムの安全性の変化を明らかにした。本研究においては、さらに、道路交通・通信システムなどのように、供給地点、需要地点の区別ができず、どの地点も、これらのいずれにもなりうるようなシステムを対象にして、検討を行った。

2. 解析の仮定

機能的な支障としては、単純化のため、まず、システムの連結性のみに着目し、この連結性と物理的な被害との関係がシステムの形状および規模によりどのように変化するかを検討した。この連結性の基準はライフラインの安全性を考えるための第1段階であると考えられる。設定した基本的な仮定は次のとおりである。

① システムをリンクからなるネットワークと考え、供給点（インプット）および需要点（アウトプット）はそれぞれ1つとし、それらの位置は、ネットワーク上に独立、一様、ランダムに発生するものとする。需要点、供給点は破壊しないものとする。

② システムの破壊はリンク上の破壊により生ずるものとする。破壊の発生確率は、ネットワーク中のどの場所においても等しく一様であり、また、発生する破壊はどれも互いに独立である。また、破壊箇所は点とみなし得る。

③ 被害率とは物理的な被害の程度を示し、次のように定義する。

$$(\text{被害率}) = (1 \text{ リンクまたは単位長さ当たりの破壊箇所数}) \quad (1)$$

④ 供給点と需要点と（今後、需給点ペアとも呼ぶ）を結ぶどの経路（パス）上にも一つ以上の破壊が存在している場合には連結していないとし、破壊が存在していない経路が一つでもある場合には連結していると仮定する。例えば、図-1に示すシステムに対して×印の箇所で破壊が生じた場合には、供給点1と需要点1とは連結（機能）しておらず、供給点2と需要点2とは連結していることになる。そして、連結確率を次のように定義する。

$$(\text{連結確率}) = (\text{需給点ペアが連結している確率}) \quad (2)$$

以上の仮定のうちのいくつかは拡張することが可能である

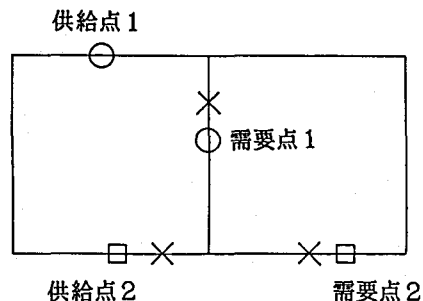


図-1 連結の定義（×：破壊箇所）

ものと考えられる。しかし、本論文ではシステムの形状および規模の影響に主に注目しているため、いたずらに仮定を複雑にすると本質を見失うおそれがあると考え、最も基本的であると考えられる仮定を設定している。

3. 直線システム

(1) 需給点ペア間距離の確率密度関数

まず、図-2 に示すような長さ L の直線システムを考え、この上に、1 点の供給点と 1 点の需要点を、独立、一様、ランダムに想定した場合、これらの 2 点間の距離 X の分布がどのようになるかを算定する。

図-3 に示すように、供給点の位置を横軸に、需要点の位置を縦軸にとると、これら 2 点間の距離 X が x 以下となる場合は斜線で示す場合で表すことができ、需給点の分布が一様であることより、その確率は、斜線の面積を、全体の面積で割った値として求められる。すなわち、需給点ペア間距離 X の確率分布関数 $F_X(x)$ は、次式で求められる。

$$F_X(x) = (2xL - x^2) \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{2}{L}x - \frac{1}{L^2}x^2 \quad (3)$$

これを x で微分したものが需給点ペア間距離の確率密度関数 $f_X(x)$ であり、

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2}{L} - \frac{2}{L^2}x \quad (4)$$

であり、これを図-4 中に太線で示す。供給点と需要

点とが直線システム上に、独立、一様、ランダムに発生した場合、これらの 2 点間の距離は短い場合ほど多く、距離の増加と共に線形的に減少する事がわかる。

(2) 連結確率

(1) で述べたように定めた供給点および需要点を有する全長 L の直線システム上に、独立、一様、ランダムな N 個の破壊が生ずる場合に、需給点ペア間が連結しているか否かを考える。供給点の位置 Y の密度関数を $h_Y(y)$ 、需要点の位置 Z の密度関数を $h_Z(z)$ 、供給点の位置を y 、需給点ペア間の距離を x とすると、需要点の位置の密度関数は $h_Z(y+x)$ となる。需給点ペア間距離が x で、連結している確率（連結している需給点ペア間距離 X の確率密度関数） $f_X(x, N)$ は、 N 個の破壊のすべてが需給点ペアの外側（図-2 中の $L-x$ の区間）に生ずる場合の確率であり、

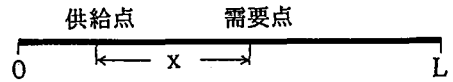


図-2 直線システム

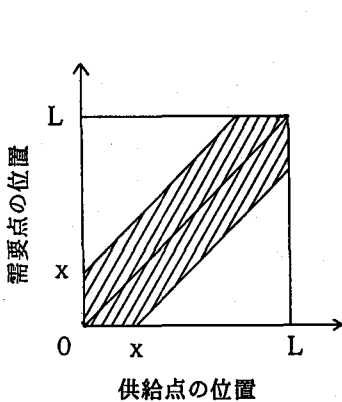


図-3 需給点ペア間距離
(直線システム)

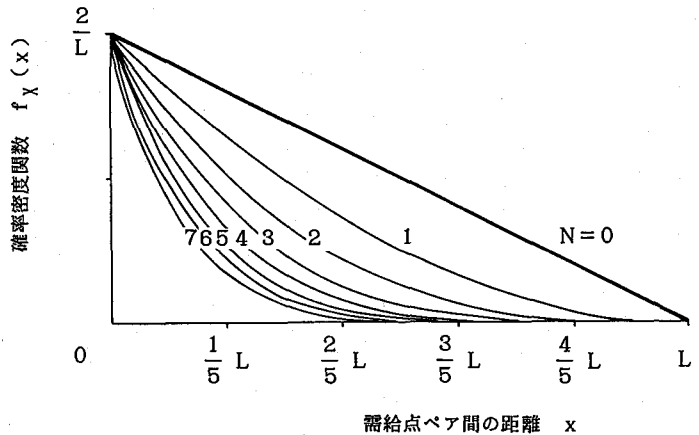


図-4 連結している需給点ペア間距離の
密度関数 (直線システム)

$$f_x(x, N) = 2 \int_0^{L-x} h_V(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} \quad (5)$$

ただし、供給点、需要点は一様に発生させることより、

$$h_V(y) = h_Z(y+x) = \frac{1}{L} \quad (6)$$

を用いた。式(5)の係数2は、供給点と需要点の左右の位置関係が逆になる場合を考えたものであり、積分範囲は、 y の移動できる範囲を示している。また、 $N=0$ の場合は、破壊が生じない場合の、需給点ペア間距離の確率密度関数であり、式(4)と一致している。式(5)より、破壊箇所数 N をパラメーターにとり、 $N = 1 \sim 7$ に対し、連結している需給点ペア間距離 x の確率密度関数を図-4 に示す。これらと、先に求めた $N=0$ の太線との間の大きさが非連結となる確率を示している。破壊箇所数 N が大きい程、連結性が低下することは当然であるが、特に、需給点ペア距離が長い程、少ない破壊箇所数で非連結となる可能性が高いことがわかる。

次に、式(5)を x の全領域で積分すると連結確率 $P(N)$ が得られる。

$$P(N) = \int_0^L \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} dx = \frac{2}{N+2} \quad (7)$$

連結確率 $P(N)$ は、順列の理論を用いて、次のように求めることも可能である。図-5 のように、 N 個の破壊箇所と2個の需給点との計 $(N+2)$ 個の順列の個数 ${}_{N+2}P_{N+2}$ のうち、需給点が隣り合っているものの個数は、需給点ペアを一組と考えると $(N+1)$ 個の順列 ${}_{N+1}P_{N+1}$ と、需給点 (2点) の順列 ${}_2P_2$ との積 ${}_{N+1}P_{N+1} \cdot {}_2P_2$ であることより、次式で求められる。

$$P(N) = \frac{{}_{N+1}P_{N+1} \cdot {}_2P_2}{{}_{N+2}P_{N+2}} = \frac{2}{N+2} \quad (8)$$

連結確率 $P(N)$ を破壊箇所数 N の関数として図-6 の実線で示す。連結確率は、破壊箇所数の増加に伴い減少し、下に凸の関数となる。なお、解析解の確認のため、供給点、需要点、破壊点のシミュレーションを1000回行い、連結確率を求めた結果を ● 印で示してある。理論解とシミュレーションで求めた値とはほぼ一致している。

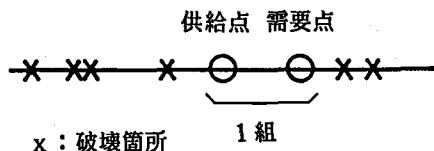


図-5 連結している場合 (直線システム)

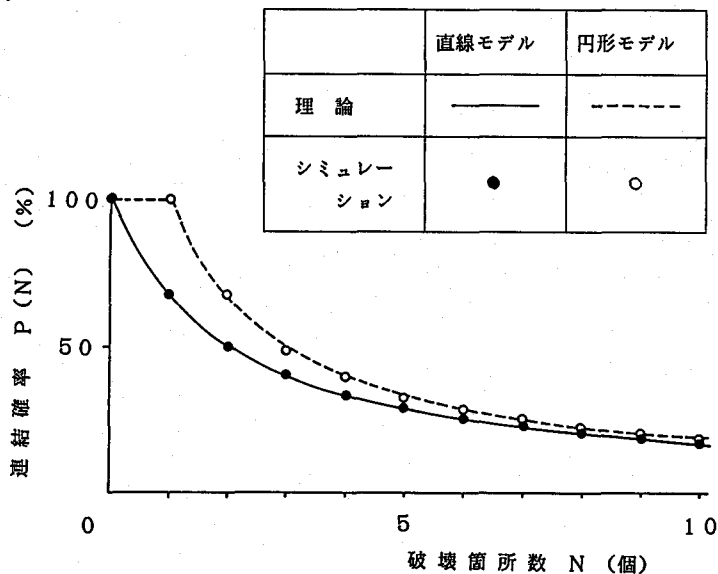


図-6 破壊箇所数と連結確率との関係

4. 円形システム

(1) 需給点ペア間距離の確率密度関数

次に、図-7(a) に示すような長さ L の円形システムを考え、この上に、1 点の供給点と 1 点の需要点とを、独立、一様、ランダムに想定する。需給点ペア間距離 X の確率密度関数 $f_X(x)$ は、システム上の一点 O [図-7(a)] で、円形システムを図-7(b) のように展開することにより、直線システムの場合と同様にして、次式のように求められる。

$$f_X(x) = \frac{2}{L} \quad (9)$$

需給点ペア間距離の確率密度関数は図-8 の太線で示すように一定値であることがわかる。ただし、需給点ペア間の距離 X としては、左右回りの 2 つのルートのうち、短い方の距離をとり、 $0 \leq X \leq L/2$ としている。

(2) 連結確率

円形システム上に、 N 個の破壊が独立、一様、ランダムに発生した場合、需給点ペア間距離が x で、連結している確率 $f_X(x, N)$ は、

$$f_X(x, N) = \frac{2}{L} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right\} \quad (10)$$

これを、図-8 に示す。上式を $0 \sim L/2$ の範囲で積分する、あるいは、順列の理論を用いることにより、連結確率は、

$$P(N) = \frac{2}{N+1} \quad (11)$$

となり、これを図-8 の破線で示す。

5. その他のシステム

基本的なネットワークモデルとして直線システム、円形システムの他に、人形（三つ又）システムを考えて、需給点ペア間の距離の分布、被害率と連結確率との関係、連結している需給点ペア間の距離の分布等を解析的に算定する方法を展開した。また、多数回のシミュレーションを行うことにより、理論解の確認を行うと共に、碁盤目（格子）状システムに対しては近似解を算定した。さらに、システムの形状または規模が変化するに伴いこの両者の関係がどのように変化するかを検討した。

参考文献

- 1) 川上英二：単純なライフラインネットワークの被害率と供給率との関係について，土木学会論文報告集，第344号，1984。
- 2) Kawakami, H.: Earthquake physical damage and functional serviceability of lifeline network models, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, 1990.

(連絡先：〒338 浦和市下大久保 255, 埼玉大学工学部建設工学科)

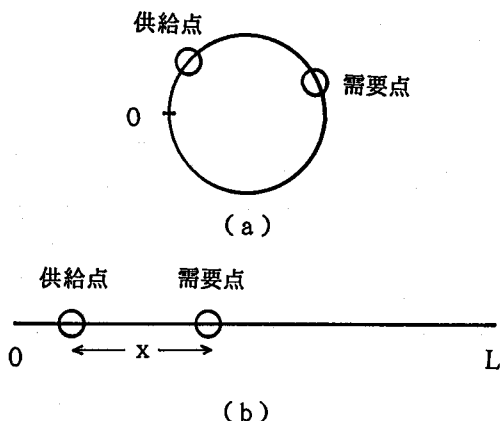


図-7 円形システムの展開

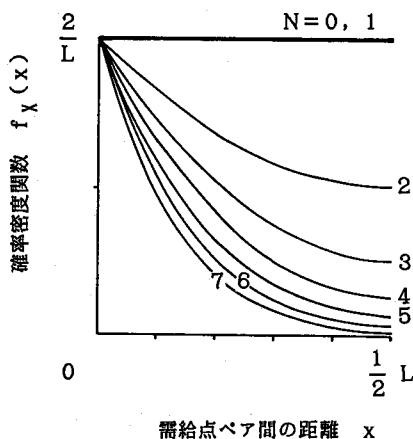


図-8 連結している需給点ペア間距離の密度関数（円形システム）