

(50) 既知波形を条件とする確率波のシミュレーション

京都大学大学院 盛川 仁
京都大学防災研究所 亀田弘行

1.はじめに 近年,地震による被害を軽減するための対策として,ライフライン事業者を中心に,多くの事業者により,地震動のモニタリングシステムの整備が進められている¹⁾。これらは通常,個々の事業者が保有する単独のシステムを対象としたものであることが多いため,都市の耐震信頼性を向上させるための一つの方策として,これをより普遍的な形で都市の中へ取り入れていくことの必要性が議論されている²⁾。このような地震動のモニタリングシステムを構築しようとする場合,有限な投資のもとで一定水準の精度を持つ地震波動場を推定することができるような,センサーの最適配置法を与える理論的な背景が求められる。従って,センサー間の波動場の推定とその精度評価を行うことが必要となる。本研究はこのような問題に対する基礎理論として,複数の地点で確定的に与えられた波形(以下,確定波という)を条件とする他の地点での確率波の振幅と位相の条件付確率密度関数を解析的に求める。そしてこの結果に基づき,条件付の確率波をシミュレートする手法について述べる。

2.理論解析のための前提条件 確定波を条件として,空間的にその間を埋める波形のシミュレーション理論には川上の研究³⁾があるが,そこでは最適化手法により確定的な波形を生成する考えが取られている。本研究は,上述のように,精度評価を可能とする理論構築のため,確率過程論により問題を扱うものである。現段階での理論解析の前提条件を以下に挙げる。1. 定常正規過程を取り扱う。2. 確定波が与えられている点と波形を推定しようとする点の間の相互スペクトルが与えられている。3. 波形を推定しようとする点におけるパワースペクトルが与えられている。

3.解析手法 最初に, $N-1$ 個の地点において確定波が与えられているとして,これを条件とする予測対象地点における振幅及び位相の条件付確率密度関数を求める。次にこの条件付確率密度関数から,確定波が与えられたという条件のもとで確率波をシミュレートする。この解析の流れを図1に示した。まず,1のように N 個の定常正規過程をフーリエ級数展開したとき,全てのフーリエ係数が正規分布に従うこと(2)を利用して,3の変数変換により5の調和成分の振幅と位相の同時確率密度関数を求める。この式より $\tilde{c}_{ik}, \tilde{\phi}_{ik}$ ($i=1, \dots, n-1$)が与えられたときの C_{nk}, Φ_{nk} (地点 n における ω_k なる振動数を持つ調和成分の振幅と位相)の条件付同時確率密度関数(6)が得られ,これを ϕ_{nk} で積分することにより, C_{nk} の条件付確率密度関数(7)が得られる。そして7を用いて, C_{nk} の実現値 $\tilde{c}_{nk}$ をシミュレートすること(8)で, $\tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \dots, \tilde{c}_{n-1,k}, \tilde{\phi}_{n-1,k}, \tilde{c}_{nk}$ を条件とする Φ_{nk} の条件付確率密度関数(9)が6,7より求められる。ここで7,9の結果を以下に示す。

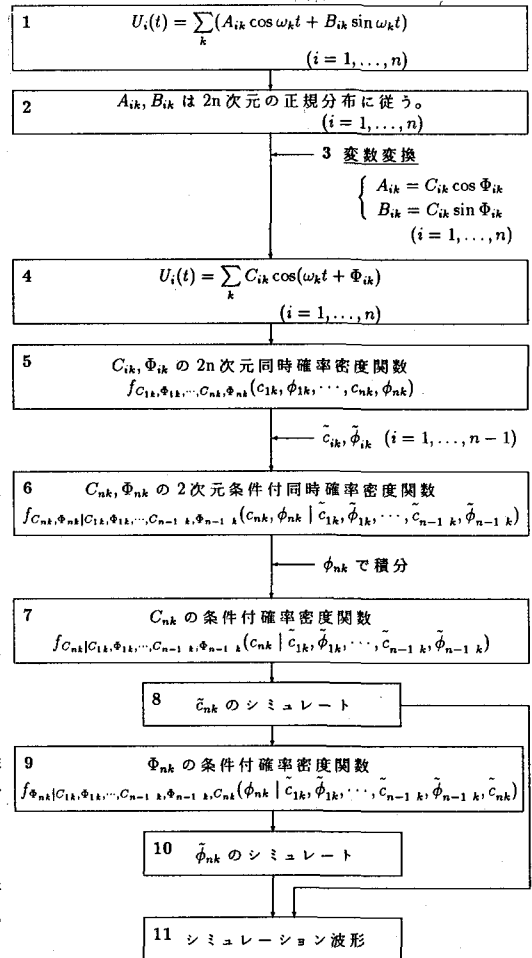


図1 解析の流れ

$$f_{C_{nk}|C_{1k}, \Phi_{1k}, \dots, C_{n-1, k}, \Phi_{n-1, k}}(c_{nk} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \dots, \tilde{c}_{n-1, k}, \tilde{\phi}_{n-1, k}) \\ = c_{nk} A_{k, 2n-1, 2n-1} \cdot I_0 \left(c_{nk} \sqrt{\tilde{P}_k^2 + \tilde{Q}_k^2} \right) \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(c_{nk}^2 A_{k, 2n-1, 2n-1} + \frac{\tilde{P}_k^2 + \tilde{Q}_k^2}{A_{k, 2n-1, 2n-1}} \right) \right] \quad (1)$$

$$f_{\Phi_{nk}|C_{1k}, \Phi_{1k}, \dots, C_{n-1, k}, \Phi_{n-1, k}, C_{nk}}(\phi_{nk} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \dots, \tilde{c}_{n-1, k}, \tilde{\phi}_{n-1, k}, \tilde{c}_{nk}) \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{I_0 \left(\tilde{c}_{nk} \sqrt{\tilde{P}_k^2 + \tilde{Q}_k^2} \right)} \cdot \exp [-\tilde{c}_{nk} R_k] \quad (2)$$

ここで,

$I_0(\cdot)$: 第1種の0次変形ベッセル関数

$$\tilde{P}_k = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_{ik} \sqrt{S_k} \cos T_k, \quad \tilde{Q}_k = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_{ik} \sqrt{S_k} \sin T_k, \quad R_k = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_{ik} \sqrt{S_k} \cos(T_k - \phi_{nk})$$

$S_k = A_{k, 2i-1, 2n-1}^2 + A_{k, 2i-1, 2n}^2$, $T_k = \tilde{\phi}_{ik} + \theta_{ink}$, $\Lambda_k^{-1} = [A_{kij}]$, Λ_k は C_{ik}, Φ_{ik} ($i = 1, \dots, n$) の共分散行列である。特に, $n = 2$ の場合,

$$f_{C_{2k}|C_{1k}, \Phi_{1k}}(c_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}) \\ = \frac{c_{2k}}{\sigma_{2k}^2(1 - Coh_{12}(\omega_k))} \cdot I_0 \left(\frac{\tilde{c}_{1k} c_{2k} \sqrt{Coh_{12}(\omega_k)}}{\sigma_{1k} \sigma_{2k} (1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right) \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{2k}^2 Coh_{12}(\omega_k) \tilde{c}_{1k}^2 + \sigma_{1k}^2 c_{2k}^2}{\sigma_{1k}^2 \sigma_{2k}^2 (1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right] \quad (3)$$

$$f_{\Phi_{2k}|C_{1k}, \Phi_{1k}, C_{2k}}(\phi_{2k} | \tilde{c}_{1k}, \tilde{\phi}_{1k}, \tilde{c}_{2k}) \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{I_0 \left(\frac{\tilde{c}_{1k} \tilde{c}_{2k} \sqrt{Coh_{12}(\omega_k)}}{\sigma_{1k} \sigma_{2k} (1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right)} \cdot \exp \left[\frac{\tilde{c}_{1k} \tilde{c}_{2k} \sqrt{Coh_{12}(\omega_k)} \cdot \cos(\tilde{\phi}_{1k} - \phi_{2k} + \theta_{12k})}{\sigma_{1k} \sigma_{2k} (1 - Coh_{12}(\omega_k))} \right] \quad (4)$$

ここで,

$$\sigma_{1k}^2 = G_1(\omega_k) \Delta\omega, \quad \sigma_{2k}^2 = G_2(\omega_k) \Delta\omega, \quad Coh_{12}(\omega_k) = \frac{|S_{12}(\omega_k)|^2}{G_1(\omega_k) \cdot G_2(\omega_k)} \quad (0 \leq \omega_k)$$

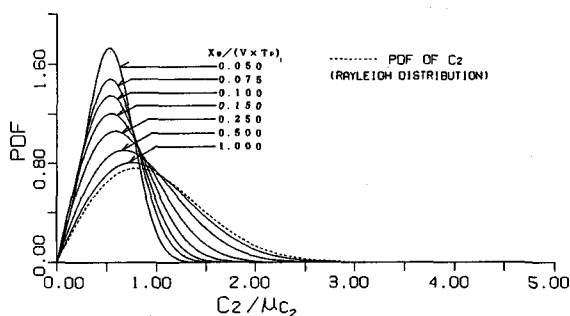
$G_1(\omega_k)$: 地点1における確率波の片側スペクトル, $G_2(\omega_k)$: 地点2における確率波の片側スペクトル,
 $S_{12}(\omega_k)$: 地点1及び地点2の確率波の間の相互スペクトル

となる。これより, $N-1$ 個の地点での確定波を条件とする第 n 地点の確率波をシミュレートすることができる。このようにしてシミュレートされた波形と確定波の間の相互相関は, 与えられた相互スペクトルによって決まるが, いくつかの地点でシミュレーション波形を求めた場合, シミュレーション波同志の相互相関を直接規定する関数関係は存在しない。従って, 確定波から離れた地点で得られたシミュレーション波が, すぐ近くの別のシミュレーション波と全く異なる形となることがある。これは確率波を1次元の確率過程(時間のみの関数)として扱っているためであるが, 複数地点で確定波が与えられたとき, ある特定の地点でこれを条件とする確率波のシミュレートを行おうとする場合には, 本研究で述べた手法で十分である。

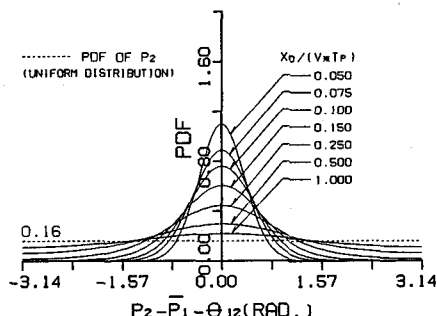
4. 数値計算例 数値計算にあたっては, 前提条件の項で述べたようにパワースペクトルと相互スペクトルを与える必要がある。本研究ではこれらは地震動に関するこれまでの研究成果を利用した。この計算例では一様な確率場を扱うものとし, パワースペクトルは, Kameda⁴⁾ による有理関数型スペクトルにおいて定常な場合の関数形を, また相互スペクトルは Kawakami ら⁵⁾ によるものを用いた。以下の図中の記号について, T/T_P は時間(T)をパワースペクトルの卓越周期(T_P)で除して無次元化した, 時間に関するパラメータ, $x_0/(v \cdot T_P)$ は距離(x_0)を波の見かけの伝播速度(v)と卓越周期の積で除して無次元化した, 距離に関するパラメータ, $c_i/\mu C_2$ ($i = 1, 2$) は振幅の実現値($\tilde{c}_i$ ($i = 1, 2$))を確率波の振幅の期待値(μC_2)で除して無次元化したパラメータである。具体的には T/T_P は卓越周期の何倍だけ時間が経過したか, $x_0/(v \cdot T_P)$ は卓越周期を持つ調和成分の波長の何倍の距離であるかを表している。

図2,3に式(3),(4)の関数形の一例を挙げた。これは卓越振動数を持つ調和成分について示したもので、1つの図中では、確定波からの距離(x_0)をパラメータとし、(a)~(c)の各図毎には確定波の振幅の実現値($\tilde{c}_1$)をパラメータとして変化させている。ただし式(4)は $\tilde{c}_1$ と $\tilde{c}_2$ についての対称式であるから図3では $\tilde{c}_1$ のみをパラメトリックに変化させ、確率波の振幅の実現値($\tilde{c}_2$)はその期待値に等しいとしている。また、図3では関数形が分かりやすいように、確定波の位相の実現値($\tilde{\phi}_1$)及び確定波と確率波の位相差の期待値(θ_{12k})を0として関数のピークが中央へくるように平行移動させている。また、各図の破線は確定波の条件がない場合の確率波の振幅及び位相の確率密度関数でそれぞれレーリー分布、一様分布である。これは式(3),(4)において無相関の条件 $\text{Coh}_{12}(\omega_k)=0$ を代入することで得られる。図2,3より確率波に関する条件付確率密度関数は、 $\tilde{c}_1$ によって変化するものの、確定波からの距離が大きくなるにつれて破線で示した、条件のない確率密度関数へ近づいていることがわかる。これは確定波とシミュレーション波の間の距離が離れるに従ってシミュレーション波は確定波の影響を受けなくなるとことを示している。

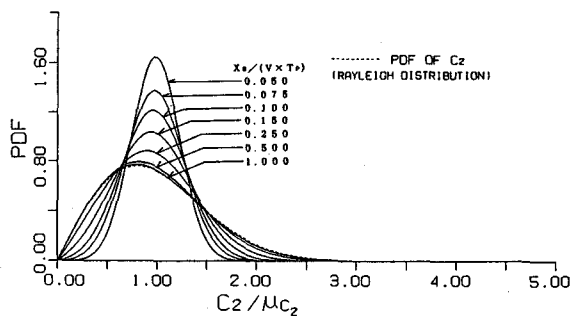
次に、確定波として狭帯域の波形を与え、式(1),(2)に従ってシミュレートした波形を図4に示す。(a)図は



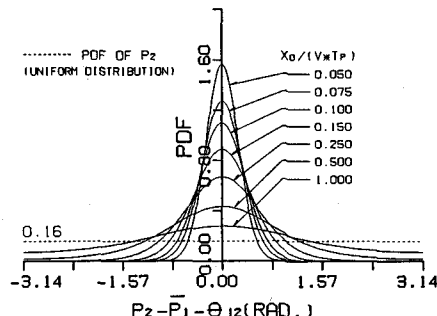
(a) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 0.5$ の場合



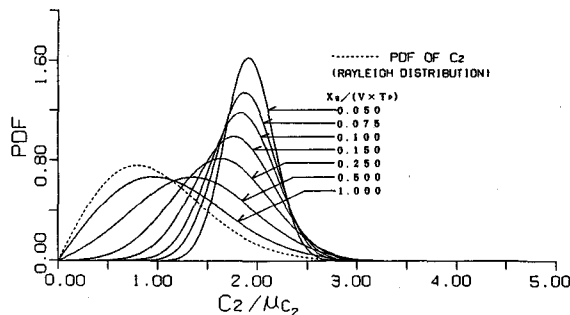
(a) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 0.5$ の場合



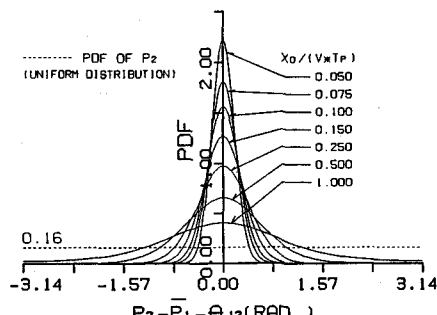
(b) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 1.0$ の場合



(b) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 1.0$ の場合



(c) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 2.0$ の場合



(c) $\tilde{c}_1/\mu_{C_2} = 2.0$ の場合

図2 確率波の振幅の条件付確率密度関数の例

図3 確率波の位相の条件付確率密度関数の例

$n=2$, (b)・(c) 図は $n=3$, (d) 図は $n=4$ としたものである。これより、確定波に近い地点でのシミュレーション波は確定波に似ているが、離れるにつれて、確定波の影響が小さくなっている様子がわかる ((a) 図)。また 2 地点で確定波を与えた場合、その間隔が離れていると ((c) 図)、2 点間の中央付近ではどちらの確定波ともあまり相関がみられない。それに対して確定波の間隔が小さい場合 ((b)・(d) 図)、その間を埋めるシミュレーション波は確定波の影響を強く受けたものとなっている。これは図 2,3 でみた傾向をよく反映しているといえる。

5. おわりに 本研究の手法による、条件付のシミュレーション波形が通常考えられる状況をよく再現していることを数値計算によって確認した。今後は最大値の確率分布や、いき値通過の問題を考えていく。また、本手法では地震波動への応用を強く意識しているものの、現段階では確率論的な側面のみからの議論に留まっている。従って、ここで展開された理論を地震波動の問題として応用するためには、条件をつけない確率場の理論で Harada ら⁶⁾ が行っているように、地震波動論と結び付けた定式化を行う必要がある。この点に関する研究も今後進める計画である。

本研究の詳細については文献 7) を参照されたい。

参考文献

- 1) たとえば、中村豊：JR の地震対策，日本地震工学会ニュース，No.104，1989.1，pp.24-30.
- 2) 亀田弘行：近代都市の地震対策，土木学会誌，別冊増刊「新しい時代の防災」，vol.74-6，1989.6，pp.26-29.
- 3) 川上英二：一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーション，土木学会論文集，第 410 号/I-12，1989.10，pp.435-443.
- 4) Kameda, H. : "Engineering Application of Stochastic Earthquake Motion Models with Non-linear Soil Amplification," Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology vol. A, Lausanne, 17-21 August 1987, pp.327-336.
- 5) Kawakami, H. and Sato, Y. : "Effect of Distortion of Seismic Waves on Ground Strain," Proc. 9WCEE, vol.II, Tokyo-Kyoto, 1988.8, pp.477-482.
- 6) Harada, T. and Fugasa, T. : "Seismic Response Characteristics of Stochastic Ground," 第 8 回日本地震工学シンポジウム論文集，1990.12，pp.427-432.
- 7) 盛川仁・亀田弘行：既知波形を含む条件付確率場のシミュレーション理論，都市耐震センター研究報告，別冊第 8 号，1991.4.

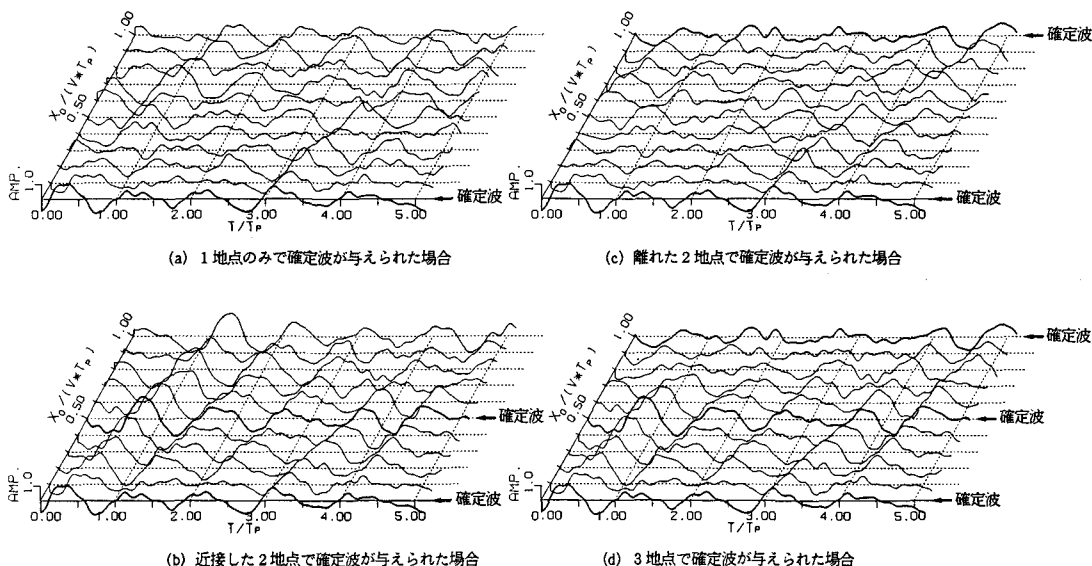


図4 複数地点で確定波が与えられた場合の確率波のシミュレーション例