

(26) 不整形表層地盤の応答解析の簡便化のための仮定とその妥当性

日本大学生産工学部 田村 重四郎
東京大学生産技術研究所 ○小長井 一男

1. はじめに

基盤と表層地盤の剛性が大きく異なる場合、不規則な表層地盤の形状が表層地盤の応答に与える影響を検討することは、埋設構造物の耐震性を評価する上で重要である。田村らは、軟弱な表層地盤を鉛直の土柱に分割し、この柱をそのせん断基本振動モードを考慮した振動子に置き換え、これを水平に広がる有限要素網で連結した擬似三次元の数値解析モデルを提唱した¹⁾。このモデルの特徴は、本来三次元の表層地盤の複雑な応答の特徴を Winkler型のバネで支えられた二次元の有限要素網で簡便に評価することである。このモデルの有効性は実際の不整形地盤での地震応答観測や模型実験などで検証され、これまでに様々な重要な知見が得られるに至っている。ここで用いられている仮定は表層地盤の応答の基本的特徴を簡便かつ的確に把握するうえで有効であるが、このモデルを実用的な用途に供するためには、これらの仮定の妥当性とその適用上の限界をより明確に提示しておく必要がある。

2. 上下動の取り扱い

震源から離れた沖積平野部では、地盤の上下動に比べ水平動が著しく大きいいため上下動を無視した解析が行われることが多い。二次元の均質な地盤を支配する運動方程式は以下の形で与えられる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v_p^2 - v_s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + v_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (v_p^2 - v_s^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + v_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots (2)$$

ここに、 $u, w = x, z$ 方向の変位、 $t =$ 時間、 $v_p, v_s =$ 縦波、横波の速度である。上下動 w を小さいものとして無視した場合に、上式は以下になる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots (3)$$

この式の解は、変数分離が可能な形で容易に求めることができる。この仮定は水平に堆積し厚さの変化が小さい地盤を対象とする場合には極めて有効であるが、不整形な地盤や物性の急変部を含む地盤を対象とする場合には上下動が比較的大きい状況も生ずる。表層の厚さが検討する地震動によって生ずる波長に比べてさほど大きくない場合には、上下方向の変位 w でなくむしろ直応力 σ_{zz} がかなり小さくなる。二次元のHookeの法則で $\sigma_{zz} (= \lambda \varepsilon_v + 2\mu \varepsilon_{zz}; \lambda, \mu = \text{Lameの定数})$ を0と置くと以下の式を得る。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots (4)$$

この式は地表面 ($x=0$) に沿って恒等的に成立するので、これを x で微分することができる。よって、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = - \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots\dots(5)$$

(5) 式を (1) 式に代入することで次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_p^{*2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots\dots(6)$$

$$\text{ここに、} v_p^* = \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu}{\rho}}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} \quad \dots\dots(7)$$

(6) 式は v_p が v_p^* に変化したのみで、形式的には (3) 式と全く同じであり、解析的に同じ扱いが可能である。ここに触れた 2 つの仮説の差違を検討するため、図 1 に示すような、矩形の表層地盤の固有振動数を求めてみる。運動方程式 (3) あるいは (6) を満たす振動形および固有振動数の解 X_{nm} 、 f_{nm} は以下の形で与えられる。

$$X_{nm}(x, z) = \sin \alpha_m z \sin \gamma_n (x+L) \quad \dots\dots(8)$$

$$f_{nm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{v_s^2 \alpha_m^2 + v_p^{*2} \gamma_n^2} \quad \dots\dots(9)$$

ここで、 $\alpha_m = (2m-1)/2H$ 、 $\gamma_n = n\pi/2L$ 、 $n, m = x, z$ 方向の振動の次数である。(6) 式の仮定を用いる場合、上式の v_p は v_p^* に置き換えられる。(9) 式で $m=1$ としたときの解は矩形地盤のアスペクト比 L/H が大きくなると、一様に広がった無限表層地盤の固有振動数 $f_0 (= v_s/(2\pi)(4H))$ に収束する。そこで (9) 式を f_0 で割ると次式を得る。

$$f_{nm}/f_0 = \sqrt{1 + \left(- \frac{H}{L} \frac{n}{2m-1} \frac{v_p}{v_s} \right)^2} \quad \dots\dots(10)$$

この f_{nm}/f_0 のアスペクト比 L/H による変化を図 2 (a) (b) に示す。図中の破線は x 方向に伝播する縦波の速度を v_p 、実線はこれを v_p^* としたものである。また図中の黒丸は有限要素法による解である。破線と実線とは L/H が小さくなるほど大きな隔たりが生じ、有限要素法で計算された解は縦波速度を v_p^* とした解により近い。すなわち表層内部での応力 σ_{zz} を小さいものとして無視した結果の方が、この場合よい近似解を与える。対象とする地盤を三次元的に考える場合は、(7) 式で $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$ とすればよく、これは擬似三次元モデルで有限要素網を平面応力状態とする従来の仮定と合致する。

3. 深さ方向に沿った振動形

擬似三次元モデルでは、地盤の深さ方向に、分割された土柱のせん断基本振動モードを仮定している。この仮定は実際に工学的に重要となる地盤全体の低次の振動を対象とする場合に有効であり、模型実験、実際の地盤での地震応答観測でもその妥当性が確認されている。しかし表層地盤の深さが極めて急激に変化する場合や、高周波成分を含む応答解析が必要となる場合にはより複雑な振動モードが表現できるような工夫が必要となる。土柱を深さ方向に細かく分割するのが最も容易な手段であるが、分割数の著しい増加は簡便である本手法の特長を大きく損なうことになりかねない。そこで分割された柱要素（図3）内部の時間領域での変位を要素両端の境界条件を満たすような3次曲線で表現することにする。

$$u_i(t, z) = C_{3,t} z^3 + C_{2,t} z^2 + C_{1,t} z + C_{0,t} \quad \dots\dots (11)$$

ここに、 $C_{3,t}$ 、 $C_{2,t}$ 、 $C_{1,t}$ 、 $C_{0,t}$ は時刻 t における未定係数であり、両端での変位 $u_i(t, 0)$ 、 $u_i(t, H)$ 、両端でのせん断力 $S_i(t, 0)$ 、 $S_i(t, H)$ から決定される。この要素内の変位が両端で運動方程式 (7) を満たすという条件式から以下の伝達マトリックスが導かれる。

$$\begin{Bmatrix} u_i(t+\Delta t, H) \\ S_i(t, H) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6R_z^2 \\ \mu & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(t+\Delta t, 0) \\ S_i(t, 0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (12)$$

H
 μ
 $2R_z^2 H$

$$\begin{aligned} b_1 &= (6R_z^2 + 2)u_i(t, H) - (6R_z^2 - 4)u_i(t, 0) - u_i(t - \Delta t, H) \\ &\quad - u_i(t - \Delta t, 0) + R_x^2 (u_{i+1}(t, H) - 2u_i(t, H) + u_{i-1}(t, H)) \\ &\quad + 2R_x^2 (u_{i+1}(t, 0) - 2u_i(t, 0) + u_{i-1}(t, 0)) \\ b_2 &= 3\mu (u_i(t, H) - u_i(t, 0))/H + \mu u_i(t, 0)/R_z^2/H - \mu u_i(t - \Delta t, 0)/R_z^2/H/2 \\ &\quad + \mu R_x^2 (u_{i+1}(t, 0) - 2u_i(t, 0) + u_{i-1}(t, 0))/R_z^2/H/2 \end{aligned}$$

$$R_z^2 = (v_s \Delta t / H)^2 \quad R_x^2 = (v_p \Delta t / \Delta x)^2 \quad \Delta t = \text{時間増分}$$

この伝達マトリックスを用いて図4に示すような極端な深さの急変部のある表層地盤を浅い部分の基本振動数1.5Hzで加振したときの、深い部分の中央部における変位の時刻歴を図5(a)(b)(c)に示す。この図の(d)は差分法によって求めた厳密解である。深さ方向の分割数 N_{sz} をわずかに増やすことで厳密解に近い複雑な振動モードが現れる様子が示されている。

4. まとめ

擬似三次元地盤モデルに用いられている基本的な仮定を検討した。その結果、(1)水平方向に伝播する縦波の見かけの速度を表面で応力が開放されている条件を考慮して低減させることにより、よい近似解が得られること、(2)深さ方向に複雑な形状の振動モードを考慮する場合、適切な変位関数を導入することで深さ方向の分割数を低減できることが示された。

参考文献

- (1) Tamura C. and T. Suzuki: Proposal of a Mathematical Model for Earthquake Response Analysis of Irregularly Bounded Surface Layer, Proc., 9WCEE, 1988.

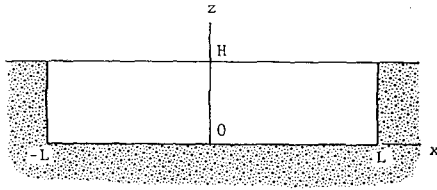


図1 矩形表層地盤

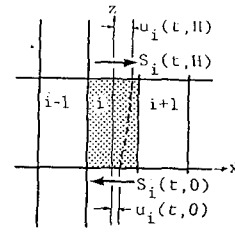


図3 土柱要素と境界条件

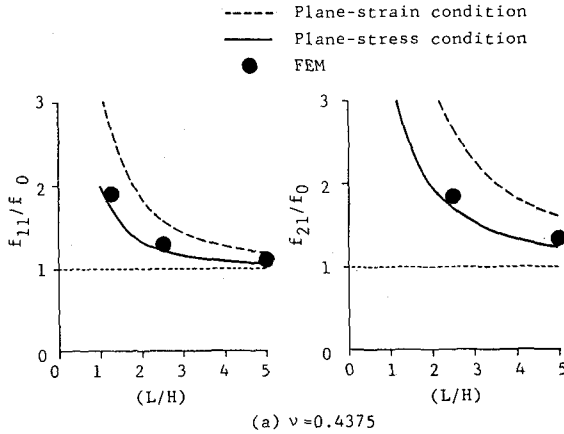


図2 矩形地盤の固有振動数

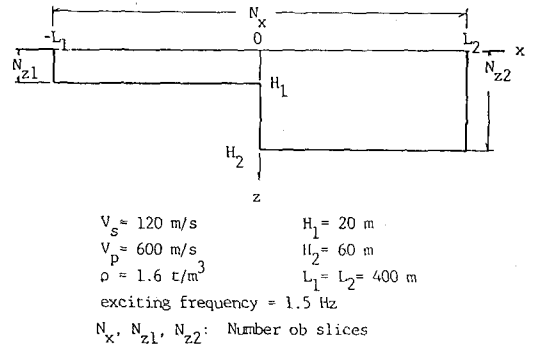


図4 深さの急変部を有する表層

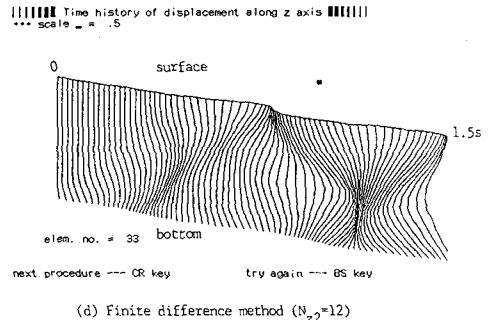
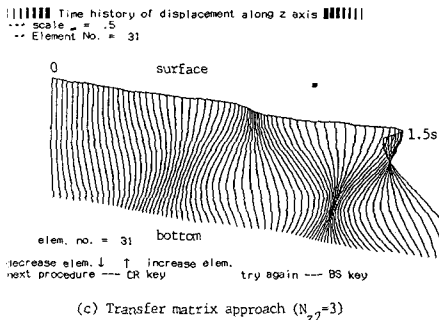
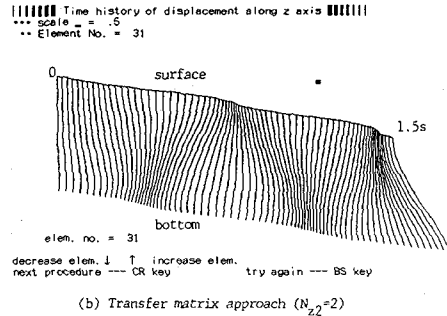
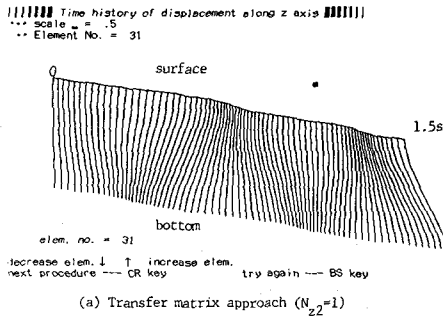


図5 深さ方向の変位の時刻歴応答