

(19) 重複反射解析における非均質波の解特性

広島大学工学部 佐藤 誠

1. まえがき

平行多層地盤へ平面波が任意の角度で入射する場合の応答を振動数領域で解析する場合、Haskell型の重複反射解析法^{1), 2)}が多用されていることは周知の通りである。Haskell型の重複反射解析法は、もともと弾性波動解析に適用するために定式化されたものであるが、筆者らは、粘弾性波動問題に一般的に現れる非均質波など一般波にも適用できるように拡張し³⁾、地震波動のP波、SV波、SH波いずれに対しても、多層地盤の振動解析および耐震解析などに適用できる効果的な解析方法である。

ところが、この解析法をP-SV波系に適用するとき、任意層の伝播角が臨界角を越えると、高振動数領域で振動数応答関数または最大応答比などに、極めて不自然で解釈の困難な結果が現れることがある。これらは非均質波に特有な現象であると考えられ、粘弾性波動における一般波は、波動の入射角に無関係に常に非均質波となることが分かっているから、この場合にも弾性非均質波の場合と同様な問題が生じる可能性のあることは容易に想像できる。

一般に、地盤を平行多層地盤と考え、入射波を地震波動と考えるときには、数十Hzまでの振動数範囲を考えればよい場合が多く、その範囲内での解析においては問題となることは少ないと思われる。しかし、入射波が発破など爆発的で衝撃的な波動であるような場合にも、安心して適用できるようにするには、この解析法の解特性を十分吟味するとともに上記の原因を追求し対策を考慮しておく必要がある。

ここでは、Haskell型の重複反射解析法を弾性または粘弾性多層地盤内の非均質波に適用する場合について、得られた解の解特性を明らかにするとともに、不合理な結果を生じる原因と、正しい結果を得るための対策およびこの解析法の適用限界などを検討する。

2. Haskell型の重複反射解析

いま、図-1に示すような、層数 $n+1$ 、境界数 (n) 、第 n 層の層厚が d_n である平行多層地盤を考え、層境界方向に x 軸、これと直角方向に z 軸をとる。

第 n 層内の縦波と横波について、円振動数 ω の調和波動ポテンシャルをそれぞれ ϕ_n 、 ψ_n とすると、

$$\phi_n = \{\phi_n' \exp(i\alpha_n z) + \phi_n'' \exp(-i\alpha_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t), \quad (1a)$$

$$\psi_n = \{\psi_n' \exp(i\beta_n z) + \psi_n'' \exp(-i\beta_n z)\} \exp i(\delta x - \omega t) \quad (1b)$$

と書ける²⁾。

ここに、 θ_n 、 γ_n をそれぞれ伝播速度 C_{Ln} の縦波および C_{Tn} の横波の伝播角で、伝播ベクトルの方向と z 軸とがなす角度とすると、 $\alpha_n = \omega \cos \theta_n / C_{Ln}$ 、 $\beta_n = \omega \cos \gamma_n / C_{Tn}$ 、 $\delta = \omega \sin \theta_n / C_{Ln} = \omega \sin \gamma_n / C_{Tn}$ である。また、 ϕ_n' 、 ψ_n' および ϕ_n'' 、 ψ_n'' はそれぞれ z 軸の正および負方向へ伝播する縦波と横波のポテンシャル振幅である。

第 n 層の境界 (n) について、平面ひずみ場でのポテンシャル ϕ_n 、 ψ_n と粒子速度成分 v_x 、 v_z および応力成分 σ_z 、 τ_{xz} の関係から、共通項 $\exp i(\delta x - \omega t)$ を省いて次式が成立する²⁾。

$$\{f^{(n)}\} = [G_n] \{r_n\} \quad (2)$$

ここに、両辺の列ベクトルは

$$\{f^{(n)}\} = \{v_x^{(n)} \quad v_z^{(n)} \quad \sigma_z^{(n)} \quad \tau_{xz}^{(n)}\}^T,$$

$$\{r_n\} = \{\phi_n' + \phi_n'' \quad \phi_n' - \phi_n'' \quad \psi_n' - \psi_n'' \quad \psi_n' + \psi_n''\}^T$$

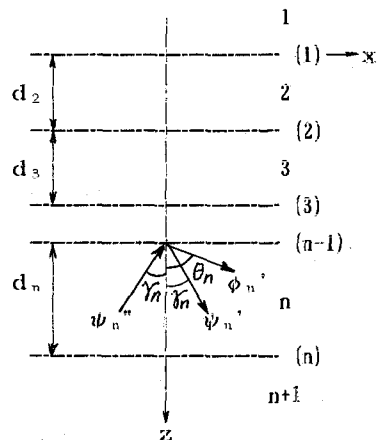


図-1 平行多層地盤

であり、右辺の正方行列は以下の形に書ける。

$$[G_n] = \begin{bmatrix} i g_{11} \cos P_n & -g_{12} \sin P_n & -i g_{13} \cos Q_n & g_{14} \sin Q_n \\ -g_{21} \sin P_n & i g_{22} \cos P_n & -g_{23} \sin Q_n & i g_{24} \cos Q_n \\ -i g_{31} \cos P_n & g_{32} \sin P_n & -i g_{33} \cos Q_n & g_{34} \sin Q_n \\ g_{41} \sin P_n & -i g_{42} \cos P_n & -g_{43} \sin Q_n & i g_{44} \cos Q_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに、 $P_n = \omega d_n \cos \theta_n / C_{Ln}$ 、 $Q_n = \omega d_n \cos \gamma_n / C_{Tn}$ であり、式(3)の要素に含まれる g_{ij} は、

$$g_{11} = g_{12} = g_{23} = g_{24} = \omega \sin \gamma_n / C_{Tn}, \quad g_{13} = g_{14} = \omega \cos \gamma_n / C_{Tn}, \quad g_{21} = g_{22} = \omega \cos \theta_n / C_{Ln},$$

$$g_{31} = g_{32} = g_{43} = g_{44} = \rho_n \omega \cos^2 \gamma_n, \quad g_{33} = g_{34} = \rho_n \omega \sin^2 \gamma_n, \quad g_{41} = g_{42} = \rho_n \omega \sin 2\theta_n / \tau_n^2$$

である。また、 $\tau_n = C_{Ln} / C_{Tn}$ である。

一方、第 n 層の境界 $(n-1)$ についての行列 $[G_n]$ の要素は、 $z=0$ すなわち $P_n = Q_n = 0$ とすれば行列(3)から $[G_n']$ として得られ、式(2)に対応して次式で書ける。

$$\{f^{(n-1)}\} = [G_n'] \{r_n\} \quad (4)$$

行列 $[G_n']$ の逆行列 $[G_n']^{-1}$ は簡単に得られるから、第 n 層の上下境界 (n) と $(n-1)$ の粒子速度成分と応力成分の関係は、第 n 層の伝達行列 $[a_n] = [G_n] [G_n']^{-1}$ を用いて次式となる。

$$\{f^{(n)}\} = [a_n] \{f^{(n-1)}\}. \quad (5)$$

行列 $[a_n]$ の要素は、第 n 層の密度 ρ 、縦波速度 C_L 、横波速度 C_T 、ポアソン比 ν 、減衰ファクター Q^{-1} などの層定数と層厚 d 、入射波の円振動数 ω 、入射波の入射角 γ 、 θ が与えられると定まる。このとき、一般波としての縦波または横波の各層内の伝播角は、Snellの法則⁽⁴⁾から求められる。なお、行列 $[a_n]$ の要素の具体的な形は文献(2)に示されており、今後の議論において重要でないのでここには示さない。

図-1における各境界上では、それを挟む両層での粒子速度の連続条件と力の釣合を考慮して、式(5)を繰り返し用いれば境界(1)と (n) について次式が得られる。

$$\{f^{(n)}\} = [a_n] \cdot [a_{n-1}] \cdots [a_3] \cdot [a_2] \{f^{(1)}\} = [A] \{f^{(1)}\}. \quad (6)$$

式(5)、(6)は、Haskell型の重複反射解析における基礎式で、行列 $[A]$ は、層数に無関係に4行4列であり、適当な境界に境界条件と入射条件を与えれば、任意境界の調和波動応答を求めることができる。

3. 半無限地盤の応答解析

いま、説明を簡単にするために、半無限弾性地盤の自由境界へ調和平面SV波が任意角度 γ_0 で入射する場合を考える。この問題の解は弾性波動論によって得られているが、ここでは、多層問題と考えるため式(6)を用いて解く方法を示す。なお、以下では、式(6)による解を数値解と呼ぶ。式(6)を用いるには、図-1において、境界(1)を自由境界として、層厚 d_2 の第2層と、その下方に第2層と同じ層定数を持ち z 軸の正方向に放射条件を満足する第3層を設定し、境界(2)を入射境界とする2層問題として考えることになる。

いま、 $d_2 = 100\text{m}$ 、 $C_{T2} = C_{T3} = 200\text{m/sec}$ 、 $\nu_2 = \nu_3 = 0.45$ をモデルM1とし、 $\gamma_0 = 17^\circ, 18^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ のとき、自由境界の水平動の応答倍率 η_x の数値解を、入射波の振動数 f の関数として図-2に示す。なお、臨界角 γ_c はポアソン比によって

$$\gamma_c = \sin^{-1} \{ (C_T / C_L)^{1/2} \} = \sin^{-1} \{ (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu) \}^{1/2} \quad (7)$$

から定まり、モデルM1では $\gamma_c = 17.54^\circ$ となるから、 $\gamma_0 \geq 18^\circ$ の入射角に対して反射縦波(P波)は非均質波(表面波)となっている。

$\gamma_0 = 17^\circ$ に対しては振動数 f によらず理論解に一致する一定値を示しているが、非均質波となる 18° 以上の入射角に対しては振動数の増加とともに振動しはじめ理論解から離れる。数値解が理論解

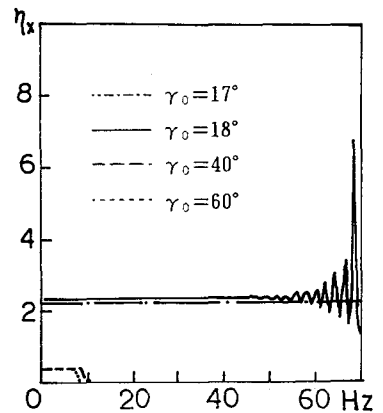


図-2 水平動の応答倍率 η_x

から離れる振動数 f の値は、式(3)の P_2 に換算すると $|P_2| \approx 10$ である。

数値解のこのようなふる舞いは、振動数 f が極めて大きい場合でも、SV波の入射角が臨界角以下のときに生じることはなく、その原因は、自由境界での反射P波が非均質波となることにありとえられる。

Snellの法則から、臨界角を越えた入射角 γ_0 に対して自由境界からの反射P波の反射角 θ_2 は

$$\sin \theta_2 = \tau_2 \sin \gamma_0 \geq 1, \quad \tau_2 = C_{L2}/C_{T2} \quad (8)$$

となる。このとき、式(2)の行列 $[G_2]$ の要素は、式(3)に示されている P_2 を含み、 P_2 は $\omega d_2 \cos \theta_2 / C_{L2}$ の形で $\cos \theta_2$ を含む。この場合の $\cos \theta_2$ は、式(8)から

$$\cos \theta_2 = i (\sin^2 \theta_2 - 1)^{1/2} = i (\tau_2^2 \sin^2 \gamma_0 - 1)^{1/2} \quad (9)$$

のように純虚数となるから P_2 も純虚数となる。

モデルM1の場合、 $\tau_2 = 11.0$ であるから、 $\gamma_0 = 13^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ のとき、 $\cos \theta_2$ はそれぞれ $3.243 i$, $7.000 i$, $9.474 i$ となり、正解が得られる $|P_2| = 10$ に対応する振動数 f は、それぞれ $f_{13} = 38.7 \text{ Hz}$, $f_{40} = 18.6 \text{ Hz}$, $f_{60} = 13.3 \text{ Hz}$ である。

上記の結果から、数値解で正解が得られる f の範囲が極めて低いように思われるが、半無限地盤のモデルとして層厚 d_2 は任意であり、 P_2 一定のとき d_2 を小さくすれば P_2/d_2 に比例して ω の範囲を拡大できるから、実際の問題では制限がないと考えてよい。しかし、半無限地盤でなく、実際に平行多層地盤として与えられた場合には、その層厚 d_2 に対応した振動数 f の制限範囲が適用されることになる。

半無限粘弾性地盤の場合には、モデルM1において第2層と第3層に同じ減衰ファクター Q_T^{-1} と Q_L^{-1} を導入し、文献4)に示した複素弾性係数および一般化されたSnellの法則を用いて、縦波と横波に対する複素伝播速度と減衰角（非均質度）を虚部とする複素伝播角 γ が求められる。これらを、たとえば、式(3)における伝播速度、伝播角の代わりに用いれば応答が得られる。

図-3に、モデルM1において第2層と第3層の減衰ファクターを、 $Q_T^{-1} = 0.1$, $Q_L^{-1} = 0.04$ とした半無限粘弾性地盤MV1について、 $\gamma_0 = 60^\circ$ の場合の第2層の反射SV波のポテンシャル ψ_2' の理論解と数値解を、 $|P_2|$ に対して示す。

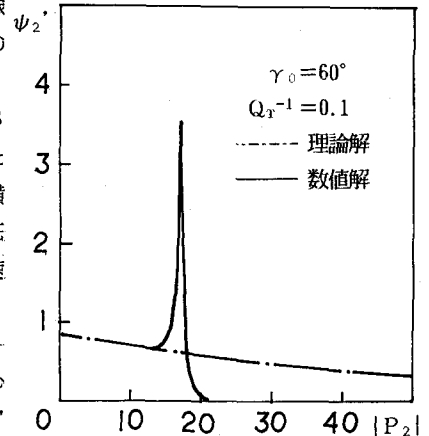


図-3 粘弾性地盤の ψ_2'

4. 多層地盤の非均質波の解特性

一般に、弾性多層地盤の第 n 層内の波動が非均質波となっている場合、 $\sin \theta_n > 1$ であるか、 $\sin \theta_n > 1$ かつ $\sin \gamma_n > 1$ であるかである。以下では、まず前者の場合について考える。

式(9)に示したように、 $\sin \theta_n > 1$ のとき $\cos \theta_n$ および P_n は純虚数となる。いま、式(3)の行列を考え、 $P_n = i y_n$ (y_n は実数) とおくと、 $\cos P_n = \cosh y_n$, $\sin P_n = i \sinh y_n$ であるから、 $\cos P_n$, $\sin P_n$ は ω すなわち y_n の増加とともに急速に増加する。結局、 $\omega \gg 1$ のとき $y_n \gg 1$ となり、 $\sinh y_n \approx \cosh y_n$, すなわち $i \cos P_n \approx \sin P_n$ となる。そのため適用している計算システムの精度に対して、

$$i \cos P_n = \sin P_n \quad (10)$$

と判断されれば、式(3)の行列 $[G_n]$ は特異となるから式(5)が成立せず、高振動数領域で正解が得られない。また、 $\sin \theta_n > 1$ かつ $\sin \gamma_n > 1$ である場合は、 $\sin \gamma_n$ も純虚数になるとして、 P_n に関する上記の議論をそのまま Q_n に適用すればよい。したがって、正解が得られる ω の最大値は、式(10)から求められる。

粘弾性多層地盤の場合、入射角に無関係に非均質波が存在する。したがって、式(3)から P_n は常に $P_n = x_n + i y_n$ (x_n , y_n は実数) の形となり、 $y_n \gg 1$ のとき $\sinh y_n \approx \cosh y_n$ であるから、弾性地盤の場合と同様に $\omega \gg 1$ に対して $i \cos P_n = \sin P_n$ と書ける。結局、弾性多層地盤の場合と同じ理由で、 ω が増加すると正解が得られなくなる。また、 Q_n についても同じ議論ができる。

5. 振動数の制限範囲の拡大法

これまでの議論から、Haskell型の重複反射解析法で数値解析する場合に、非均質波が存在するときには、正解が得られる ω の範囲に制限があることが明らかとなった。 ω の適用範囲の制限を緩和するためには、 ω の増加に伴う P_n と Q_n の増加を制御する必要がある。

いま、一般波について、与えられた層定数($\nu < 0.5$)と入射角に対して $\cos \theta_n / C_{Ln}$ または $\sin \gamma_n / C_{Tn}$ が有限であることを考えると、式(3)より、 P_n と Q_n の大きさを制限するには、 d_n を小さくする以外にない。そこで、与えられた第 n 層の層厚 d_n を m 等分した補助層を考えると、その層厚 d_n/m の補助層すべての層定数と伝播角は等しく、式(10)と判断されるとき補助層内の P_m 、 Q_m を P_n 、 Q_n より減少させることができ、 ω の制限範囲を増加させることができる。ただし、式(5)、(6)から

$$\{f^{(n)}\} = [a_m]^m \{f^{(n-1)}\} = [a_n] \{f^{(n-1)}\} \quad \therefore [a_m]^m = [a_n] \quad (11)$$

でなければならない。以下では、等分割した補助層を考える解析を ψ_2' 層分割法と呼ぶ。

図-4に、図-3で考えたモデルMV1を層分割法を用いて、0、2、10等分割した場合の反射SV波ポテンシャル ψ_2' を、 $|P_2|$ に対して理論解と比較して示す。分割数の増加とともに正解が得られる $|P_2|$ すなわち振動数 f の範囲は増加するが、式(11)の制限があるため $|P_2|$ にも上限があり、最も少ない分割数でこの上限に達する最適分割数が存在する。モデルMV-1の場合、最適分割数は6であった。

$\gamma_0 = 90^\circ$ の場合に $|P_2|$ の範囲が最も小さく、この入射角のとき層分割すると、層分割しない場合に対して $|P_2|$ の範囲は、弾性地盤と粘弾性地盤についてそれぞれ約3および3.5倍に増加する。

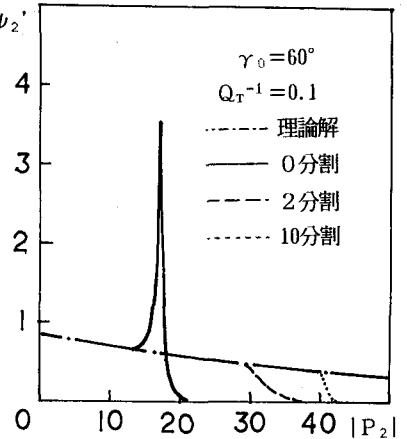


図-4 層分割法による ψ_2'

6. 層分割法の適用例

図-5に示す2層モデルM2の弾性と粘弾性地盤(第2、3層の $Q_T^{-1} = 0.1$)について、全入射角に対する地表の水平動の最大応答比 η_{x^*} を、層分割しない場合と分割した場合(10等分割)に対して、それぞれ図-7(a)、(b)に示す。

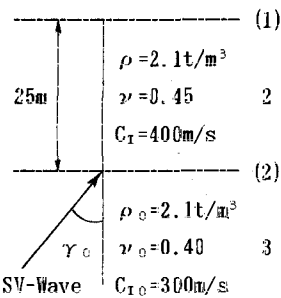


図-5 2層モデルM2

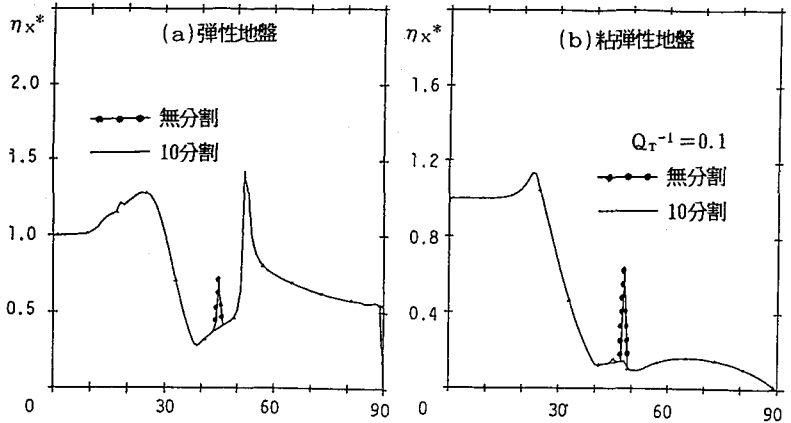


図-7 SV波の入射角 γ_0 と最大応答比 η_{x^*}

図-7において、層分割を行わない場合の最大応答比 η_{x^*} には、臨界角($\gamma_{cs} = 24.1^\circ$)と無関係の入射角 $\gamma_0 \approx 48^\circ$ で不自然な卓越した応答が現れているが、層分割法を適用することによってこの応答は解消されている。

参考文献 1) Haskell, N.A.: The Dispersion of Surface Waves in Multilayered Media, B.S.S.A., Vol. 43, 17-34, 1960. 2) 佐藤誠: 平行多層地盤に対する調和SV波の伝播解析, 土木学会論文報告集, No. 328, 57-68, 1982. 3) 佐藤誠: 粘弾性平行多層地盤の調和SV波動応答, 土木学会論文報告集, No. 386, 377-386, 1987. 4) 佐藤, 田村: 非均質波動による粘弾性地盤の臨界角と最大応答, 広大学部研究報告, Vol. 38, No. 1, 51-62, 1989.