

(121) カルマンフィルタによる線形1自由度系の同定結果に与える初期条件の影響

建設省土木研究所 正員 © 相沢 興 田村敬一

まえがき

拡張カルマンフィルタにより構造系の動的特性を同定する方法に関しては、星谷らなどにより種々の検討が成されている。実際の強震観測記録を用いて同定した結果の妥当性を判断するには初期条件などによる影響を把握することが重要である。本小文は、実橋脚の地盤～橋脚系の動的特性の同定を行う前段階として、星谷らが提案したEK-WGI法および運動方程式の定式化による同定方法の初期条件や観測記録の条件が同定結果に及ぼす影響を線形1自由度系のシュミレーション記録および振動実験記録を用いて確認したものである。

1. 拡張カルマンフィルタによる同定方法

拡張カルマンフィルタおよびEK-WGI法に関しては参考文献1)～3)に詳しいので、ここではその概略を述べる。拡張カルマンフィルタのアルゴリズムは図-1に示すとおりであり、系のパラメタベクトル p を直列に状態変数ベクトルに組み込むことにより、状態推定とパラメタ同定を同時に行うことができる。しかしながら、状態変数に組み込んだパラメタの推定を逐次行う場合、初期条件の与え方により不安定な同定結果を招く恐れがある。これを改善する方法として、グローバルな繰り返しによって初期値を更新すると同時に、推定結果の推定誤差共分散に重みを乗じて真値への漸近を早める重み付きグローバルな繰り返し法(EK-WGI法)が星谷・斎藤により提案されている(図-2参照)。ここでは、収束判定方法を l 回目の推定結果と $l-1$ 回目の推定結果の差 $d = \{\hat{x}^l - \hat{x}^{l-1}\}$ のノルム $\lambda = \{\|d\|/N_k\}$ が所要の値以下になったとき繰り返しを終了することとした。しかし、繰り返しの上限回数になっても終了条件が満たされない場合には、推定結果が最も観測データと合致した繰り返し時の結果を参考にとすることとした。

2. 運動方程式の状態方程式表現

運動方程式の状態方程式への定式化には、種々の定式化が提案されている^{2)～4)}。ここでは、線形多自由度系の運動方程式をモード分解して得られる等価な1自由度系の運動方程式を線形加速度法により離散型の非線形状態方程式と線形観測方程式に定式化する方法を用いた。

線形多自由度系の運動方程式をモード分解し、 j 次モードに対する運動方程式の両辺に j 次モードの i 質点のモード u_{ji} を乗じることににより、 j 次モードの i 質点の運動方程式は次式で表される。

$$d^2 x_{ji} / dt^2 + 2 h_j \omega_j dx_{ji} / dt + (\omega_j)^2 x_{ji} = -\beta_{ji} d^2 x_o / dt^2 \quad (1)$$

$$\text{ただし、} \beta_{ji} = u_{ji} \sum m_i u_{ji}, \quad z_i = \sum x_{ji}$$

ここで、 h_j は j 次モードの減衰定数、 ω_j は j 次モードの固有振動数であり、 x_{ji} は i 質点の j 次モードの応答変位、 β_{ji} は i 質点の j 次モードの刺激係数、 $d^2 x_o / dt^2$ は入力加速度である。また、 z_i は i 質点の応答変位である。

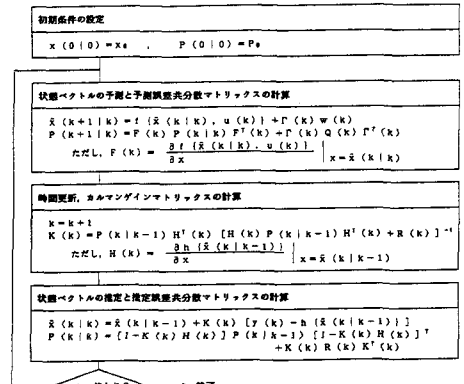


図-1 拡張カルマンフィルタのアルゴリズム

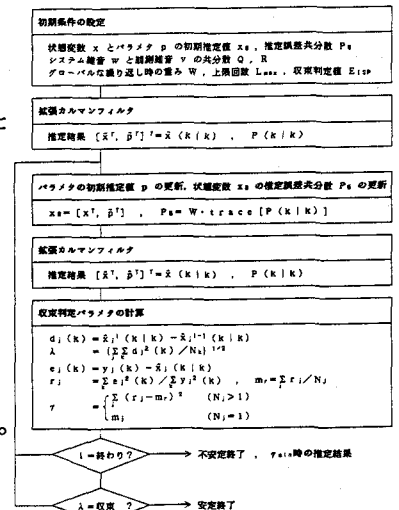


図-2 EK-WGI法のアルゴリズム

式(1)の応答加速度、応答速度、応答変位を状態変数とし、これに減衰定数、固有振動数、刺激係数のパラメタを組み込んだ状態変数ベクトル x と入力ベクトル u を次式のように定義し、

$$x = [x^T \quad p^T]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$$

$$= [d^2 x_{ji}/dt^2, dx_{ji}/dt, x_{ji}, 2h_j \omega_j, (\omega_j)^2, \beta_{ji}]^T \quad (2)$$

$$u = d^2 x_0 / dt^2 \quad (3)$$

式(1)に対応する状態方程式を線形加速度法により定式化した。ここで、システム雑音 w は簡単のために無視した。一方、強震観測で得られる記録は一般に絶対加速度である。ここでは、絶対加速度から入力加速度を差し引いた相対応答加速度のみが観測データとして得られるものとして観測方程式を次式で定義する。

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad H(k) = [0, 0, 1, 0, 0, 0] \quad (4)$$

また、固有振動数 f_j と減衰定数 h_j はパラメタの関係から次式により計算することとした。

$$f_j = \omega_j / (2\pi) = x_5^{1/2} / (2\pi), \quad h_j = x_4 / (2x_5^{1/2}) \quad (5)$$

3. 同定結果に及ぼす初期条件などの影響

EK-WGI法の同定結果に影響を与える項目として表-1に示すものが考えられる。これらの項目が同定結果にどのように影響するかを把握することは、実際の観測データを用いて同定した結果の妥当性を判断する上で重要である。ここでは、線形1自由度系の入力・応答を数値計算により作成し検討を行うこととした。

まず、5000個の一樣乱数を生成し、最大値が100galの入力波形(時間間隔は1/100秒)を作成する。これを線形1自由度系に作用させたときの応答をNewmark- β 法($\beta=1/6$)により数値計算し、応答加速度を求める。ここで、固有振動数は $\omega=2\pi$ 、減衰定数は $h=0.05$ とした。次に、応答加速度の2乗平均の $\alpha\%$ の分散 σ^2 をもつ正規乱数 $N(0, \sigma)$ を生成し、観測雑音として応答加速度に付加した(一例を図-3に示す)。このようにして作成した入力・観測データを用いてEK-WGI法における初期条件が同定結果に与える影響を検討することとした。検討対象項目および範囲は、表-1に示すとおりである。ここで、表中に $\cdots$ で示した値は、各項目について検討を行う場合の他の項目の標準値である。なお、データ数の影響は、先に示した波形の先頭から所要のデータ数までを用いることにより、入力・観測記録のレベルの大きさの影響は、入力の最大値が所要のレベルになるように振幅を調整することにより、入力・観測記録の時間ずれの影響は、両者の間で所要の時間をずらすことにより、それぞれ、入力・観測データを作成して検討することとした。また、状態変数の初期推定値は真値に近い方がよいと考えられ、ここでは、0ベクトルとした。初期条件を標準値として推定を行なった結果(一例を図-4に示す)によれば、推定結果はいずれも2回目以降ほとんど変化せず、推定結果の差のノルム λ は7回目以

表-1 同定結果に影響を与える項目と検討対象とした初期条件

EK-WGI法の初期条件		同定結果に影響を与える項目の検討対象範囲と標準値(標準)	
初期推定値	x_0	0ベクトル	
初期推定値の誤差分散	P_0	0.01, 0.0R, $\cdots$, 0.5, 1	x に対応
システム雑音の共分散	Q^{11}	5, 10, 50, 100, 500	p に対応
観測雑音の共分散	R^{11}	0.5, 1, 5, 10, 50	(%)
繰り返し時の量	W	1, $N_0^{1/2}$, $N_0^{1/2}$, $N_0^{1/2}$, N_0	
繰り返し時の条件	E_{11}	10 ⁻¹	
繰り返しの上限回数	L_{max}	20回	
観測データの条件			
入力・観測データ数	N_0	200, 500, 1000, 2000, 5000	(個)
入力・観測データレベル	U_1	5, 10, 50, 100, 500	(gal)
入力と観測の時間ずれ	τ_1	-10, -5, 0, +5, +10	(1/100秒)
観測雑音レベル	σ^2	0, 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20	(%)

- 1) $Q=E\{w(k)w^T(k)\}$, ここでは簡単のため0マトリックスとして解
- 2) $R=E\{v(k)v^T(k)\}$, ここでは観測記録の2乗平均の $\gamma\%$ を設定
- 3) 観測雑音は真値の2乗平均の $\alpha\%$ の分散 σ^2 を持つ正規乱数 $N(0, \sigma)$ を付加。

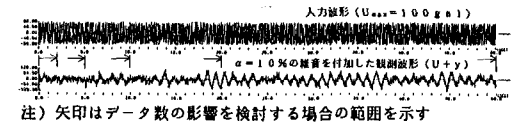


図-3 入力および観測記録の一例(付加雑音 $\alpha=10\%$ の場合)

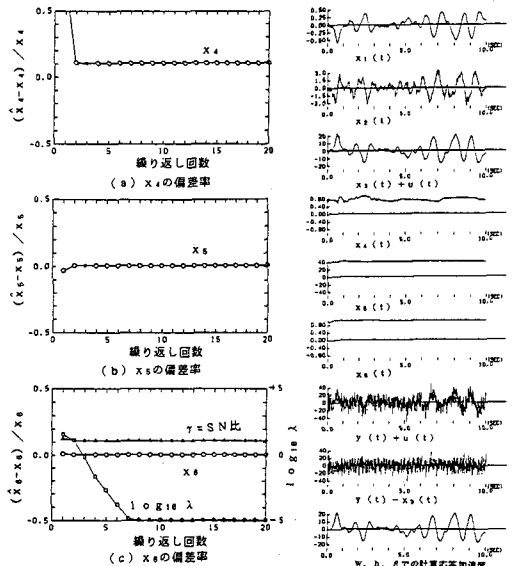


図-4 初期条件を表-1の標準値で推定した各繰り返し時の結果の一例($\alpha=10\%$)

図-5 初期条件を表-1の標準値で推定した結果の時刻歴の一例($\alpha=10\%$)

降 10^{-5} に収束している。また、推定結果の時刻歴（一例として $\alpha = 10\%$ の 6 回目の推定結果を図-5 に示す）を各繰り返しの間で比較しても 4 ~ 6 回目以降はほとんど差が認められなかった。そこで、ここでは、収束判定レベルを 10^{-3} 以下とし、繰り返しの上限は 20 回とした。

同定結果は偏差率 $\{ = (\text{推定値} - \text{真値}) / \text{真値} \}$ と SN 比 $\{ = \Sigma (\text{観測値} - \text{推定値})^2 / \Sigma (\text{観測値})^2 \}$ により検討した。結果の一例を図-6 ~ 10 示す。これより、各項目ごとの同定結果に与える影響をまとめると次のようになる。① 付加観測雑音レベル α の影響（図-6）： x_4 , x_5 , x_6 の推定値はいずれも付加した雑音レベルが大きくなるにしたがって偏差率が+側に大きくなり、 x_4 は他に比べて偏差率が大きい。SN 比は付加した観測雑音レベルより若干大きめのレベルである。② 繰り返し時の重み W の影響（図-7）：重みが 1 の場合は収束しにくく、いずれの場合も上限まで繰り返しが行われている。重みがデータ数と等しい場合の α が大きい場合も同様である。重み 1 以外の検討範囲の重みでは繰り返し回数にあまり差がなく、偏差率などもおおむね同じ値となる。③ 観測データ数 N_k の影響（図-8）： x_4 , x_5 はデータ数が多くなると偏差率も小さく、 α による差も小さくなるが、 x_6 はデータ数が少ない方が偏差率が小さく、 α による差も小さく、データ数が 500 の場合は偏差率が負となった。繰り返し回数はデータ数が多い方が少ない。

④ 入力・観測記録レベル U_L の影響（図-9）：入力の最大値が 5 g a 1 でかつ α が大きい場合に不安定となるが、それ以外の検討範囲ではいずれも安定している。⑤ 入力と観測の時間ずれ τ_t の影響（図-10）： x_5 は時間が一側にずれた場合には+側に偏差し、逆に+側にずれた場合には一側に偏差する。 x_4 , x_6 は 0 近傍で偏差率が小さく、 x_6 は上に、 x_4 は下に凸である。SN 比は下に凸であり、時間ずれ 0 で最小となる。いずれの場合も時間ずれが大きいと偏差率および SN 比も大き

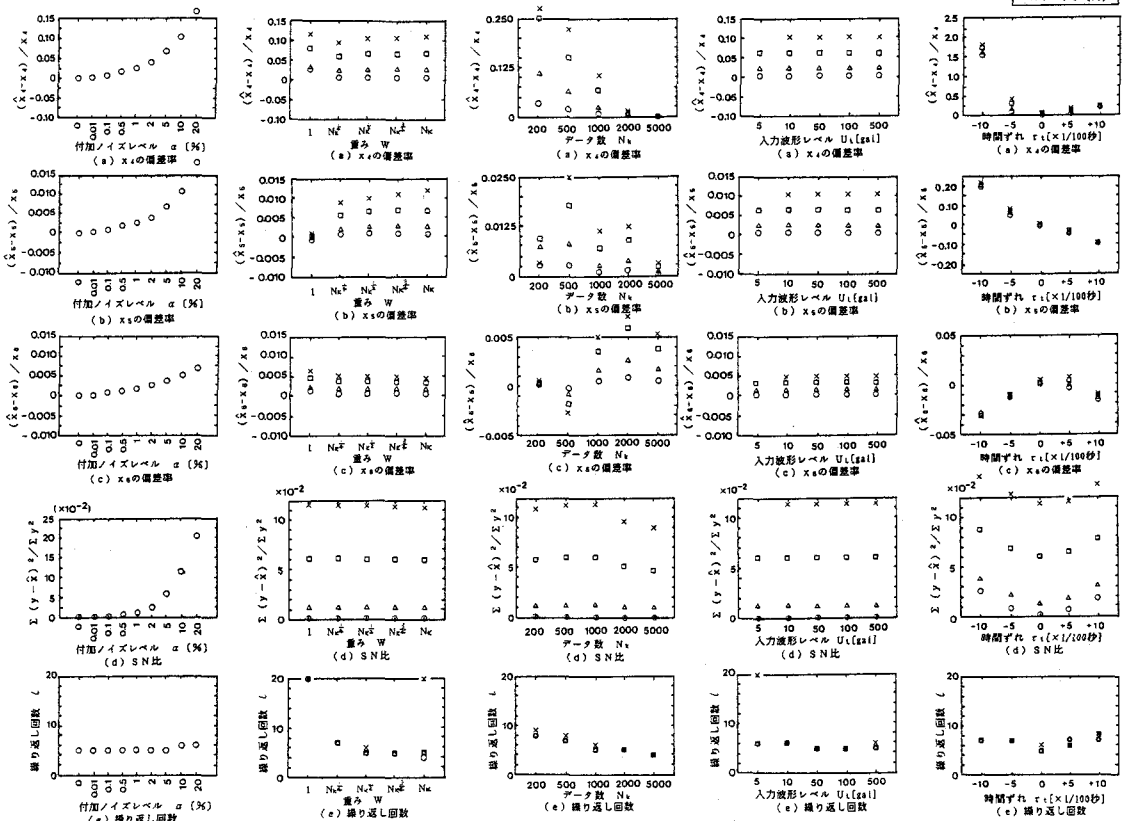


図-6 付加雑音レベル α の影響
(初期条件は標準値)

図-7 繰り返し時の重み W の影響

図-8 入力・観測データ数 N_k の影響

図-9 入力・観測記録レベル U_L の影響

図-10 入力と観測記録の時間ずれ τ_t の影響

くなり、推定結果に与える影響が他の項目に比べて大きい。

ここでは図示していないが、観測雑音の共分散 R の影響は観測データの 2 乗平均の $\gamma\%$ を観測雑音の共分散 R として考慮した場合、10% まではいずれの場合も安定していたが、50% では不安定となった。初期推定値の誤差共分散 P の影響は検討範囲では差が認められず安定した結果が得られた。

4. 振動実験記録による同定

前述の検討に用いた記録は定常時系列である。しかしながら、実際の強震記録は非定常時系列である。そこで、実地震記録による振動実験記録を基に同定をおこない $EK-WGI$ 法の適用性を検討することとした。

板バネ・マス・ダンパーで構成した 1 自由度系の模型振動実験の記録を用いて模型の動的特性を同定する。模型の固有振動数および減衰定数は、実橋脚を想定して自由減衰振動から求めた固有振動数 f_0 および減衰定数 h が、それぞれ、 $f_0 = 2.79 \text{ Hz}$ 、 $h = 0.067$ になるように設定した。また、実験の入力に用いた記録は、想定した橋脚近傍で得られた 9 回の実地震記録であり、入力レベルは最大加速度が 200 gal 程度になるように振幅調整したものである。同定の初期条件は表-1 に示した標準値を用いた。状態変数の初期推定値を 0 ベクトルとして推定を行った場合には同定結果が不安定となる場合があったため、ここでは、 x_5 および x_6 の初期推定値のみ、それぞれ、300 および 1 とし、それ以外の初期推定値は 0 とした。同定結果の時刻歴の一例を図-11 に示す。これより、パラメタの推定結果は 3 秒程度までは変動するが、それ以降は安定している。同定結果から得られた動的特性を図-12 示す。これより、記録 1, 2, 9 以外の固有振動数は 2.70 Hz 、減衰定数は 0.075 、刺激係数は 1.00 である。また、SN 比は記録 1, 7, 9 以外ではおおむね 0.05 程度であり、記録 1 の SN 比は特に大きい。記録 1 の場合は図-11 に示すように先頭部分の推定誤差 $\{ \text{観測値 } y - \text{推定値 } x \}$ が大きいためと考えられる。記録 1, 2, 7, 8, 9 の結果が他の記録と異なる原因としては、状態変数の初期推定値の偏り、模型の非線形性および高次モードの共振などが考えられるが、現時点では詳細は不明である。

まとめ

表-1 に示した検討範囲における初期条件が同定結果に与える影響の全体としての特徴をまとめると次のとおりである。① 観測雑音および時間ずれは推定結果に影響する。② 共分散 P 、 R 、重み W 、データ数 N_k および記録のレベル U などは収束性に影響するが収束した場合の推定値はほとんど同じ値となる。

③ x_4 の推定値は x_5 、 x_6 に比べて偏差率が大きい。

④ 時間ずれが予想される場合には SN 比最小規範が有効的な評価方法となると考えられる。

今後は、実橋脚の強震記録による同定を検討するとともに、時間ずれの評価、動的特性の非定常性、高次モードの影響などを検討する必要があると考えられる。

【参考文献】

- 1) 片山徹：応用カルマンフィルタ、朝倉書店、1983。
- 2) 星谷・斉藤：拡張カルマンフィルタを用いた同定問題の・・・、土木学会論文集第339号、1983.11。
- 3) 星谷・斉藤：線形多自由度系の動特性の推定、土木学会論文集第344/I-1号、1984.4。
- 4) 星谷・丸山：非線形構造系の地震時挙動特性の同定、土木学会論文集第386/I-8号、1987.10。

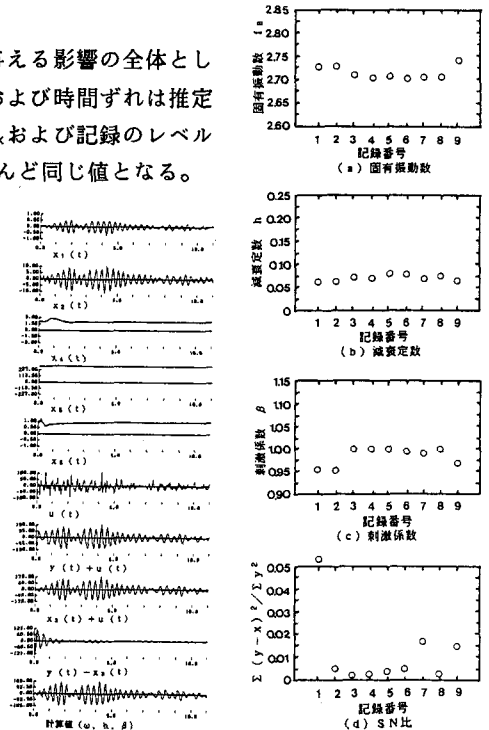


図-11 推定結果の時刻歴の一例 (記録1の場合)

図-12 推定結果から計算した動的特性値