(100) 時間領域ＦＥ－ＢＥ法によるフィルダムの振動解析

佐藤工業㈱　　　　　　　東平　光生
東京工業大学　総合理工　大町　達夫

１．　はじめに

フィルダムの地震時挙動を調べるために、フィルダムを弾性体とみなし有限要素法を適用することがしばしば行われる。しかし現状では、ダムの基礎を剛体として計算することがほとんどであり、ダムの基礎を弾性体と見なさなければならない場合のダムの挙動については、十分な知見が得られているとは言い難い。特に、ダムの振動に対する地下逸散減衰がどの程度であるかといったことや、基礎を弾性体と仮定したことにより、固有振動数がどのように変化するかといったことについては検討の余地があるものと思われる。

こうした問題を数値計算によって評価し得る手法としては境界要素法があり、周波数領域で定式化された手法は、さまざまな分野で成功を収めてきた。しかし、この手法で固有振動問題を解析するためにはデターミナント・サーチ法的なアプローチが必要となり、計算量が膨大になることも考えられる。

ところで第一著者は先に、時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法、すなわち時間領域ＦＥ－ＢＥ法のアルゴリズムを提案しその有効性を検証してきた[1)2)]。もし、この方法でフィルダムのインパルス応答が簡単に求められるならば、そのフーリエ・スペクトルのピークから固有振動数を簡単に求めることができ、さらに、時刻歴とスペクトルの両方から地下逸散減衰の定量評価が可能になることが期待される。

以上のことから、本論文では時間領域ＦＥ－ＢＥ法によって、インパルス応答を求める手法について説明すると共に、フィルダムのインパルス応答結果からフィルダムの固有振動特性や地下逸散減衰に関する基本的な性状を検討してみる。

２．　時間領域ＦＥ－ＢＥ法の概要

弾性体の運動方程式は次式で示される。

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\vec{u}+\mu\nabla^2\vec{u}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{u}=\vec{0} \qquad (1)$$

ここに、λ，μはラメの定数、ρは質量密度，ｔは時間，$\vec{u}$は変位ベクトルである。また、∇は勾配演算子を表す。

この運動方程式に対する有限要素法表示は次のようになる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\} \qquad (2)$$

ここに、$[M]$，$[K]$はそれぞれ、質量及び剛性マトリックス　$\{\ddot{u}\}$，$\{u\}$は加速度及び変位ベクトルである。また、$\{P\}$は、境界条件から定められる外力項に相当する節点力ベクトルである。

また、この方程式に対する時間領域境界要素法表示は、時間領域の境界積分方程式を離散化することによって得られ次の時間ステップに関する漸化式となる。

$$\{P\}^N=[k^*]\{u\}^N-\{F\}^N \qquad (3)$$

ここに、添字のＮは時間に関するステップを表し、$[K^*]$は、境界要素領域の剛性マトリックスである。また，$\{F\}^N$はＮステップ目の時刻以前の境界値から構成されるベクトルである。

時間領域ＦＥ－ＢＥ法のアルゴリズムを作成するためには、式（２）と式（３）を連立させる必要がある。式（２）の常微分方程式と式（３）の漸化式を連立させるために、時間方向の重み付き残差法を力の釣り合

い方程式に適用すると次式となる。

$$\int_0^t w(t)\ \{\{P\}_B+\{P\}_F\}\ dt=\{0\} \tag{4}$$

ここに，添字のＦとＢはそれぞれ、有限要素領域と境界要素領域に属する量であることを表し、ｗは重み関数である。式（４）の重み付き残差表示を変形することで、次の時間領域ＦＥ－ＢＥ法のアルゴリズムが得られる。

$$\begin{aligned}&[M+\beta\Delta t^2 K+1/2K^*]\ \{u\}^N\\&=[2M-(1-2\beta)\Delta t^2 K-1/2K^*]\ \{u\}^{N-1}\\&+[-M-\beta\Delta t^2 K]\ \{u\}^{N-2}\\&+1/2\Delta t^2\ \{F\}^N+1/2\Delta t^2\ \{F\}^{N-1}\end{aligned} \tag{5}$$

ここに、βは重み関数の形状から決められるパラメータでＮｅｗｍａｒｋのβ法のβに相当し、Δtは時間増分である。また、本論文で示す数値計算では$\beta=1/4$と設定している。

さて、本手法によりインパルス応答を計算する場合には式（４）の釣り合い条件の代わりに次式を用いれば良い。

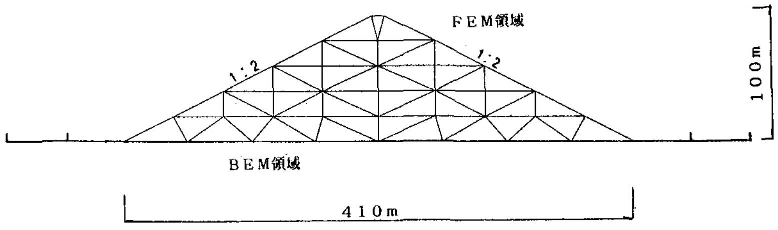
$$\int_0^t w(t)\ \{\{P\}_B+\{P\}_F+\{P\}\ \delta(t-\tau)\}\ dt=\{0\} \tag{6}$$

ここにτはインパルスを与える時刻であり、δはディラックのデルタ関数である。また、｛Ｐ｝は衝撃力の大きさと方向を示すベクトルである。デルタ関数そのものは無限大に発散する関数であるが、これを積分して用いる時間領域ＦＥ－ＢＥ法は衝撃力を有限な値として扱うことができる。

３．　時間領域ＦＥ－ＢＥ法によるフィルダムのインパルス応答解析

前章で示した手法を用いてフィルダムのインパルス応答解析を行う。ここでは、フィルダムの代表的な形状を考慮してＦｉｇ－１に示すモデルを用いて応答解析を行う。また、フィルダムと基礎とのインピーダンス比が逸散減衰にどの程度寄与するかを見るためにＴａｂｌｅ－１に示す解析ケースについて計算を行う。

ダムの基礎に水平に衝撃力を加えた場合のそれぞれの解析ケースのうち、特にＣＡＳＥ２，５についてダム頂上の変位時刻歴とフーリエ・スペクトルをＦＩＧ－２～５に示す。



ＦＩＧ－１　解析モデル

４．　フィルダムの固有周期

外力として加えたインパルスそのものは、一様な振動数成分を有するので、インパルス応答のスペクトルのピークは固有周期に対応するものと考えて良い。弾性基盤上のダムの固有値問題は無限領域の固有値問題となり固有値は連続的に分布するようになるが、スペクトルのピークが十分際立っていれば、その周期を固有周期としても工学的には許されるものと思われる。

ここで示されたフーリエ・スペクトルの特徴は、ダムと基礎のインピーダンス比に大きく影響されること

がわかる。すなわち、フーリエ・スペクトルはインピーダンス比が小さい場合に離散スペクトルとしての傾向を顕著に表し，インピーダンス比が大きくなるほど連続スペクトルとしての傾向を強くする。これは、ダムの振動が基盤でどの程度はねかえされるかに関連しており、連続スペクトルとしての傾向が強いほど、振動エネルギーは下方に流れ、逸散減衰は大きいものと考えることができる。

これらの結果を用いて、フーリエ・スペクトルのピークから固有周期を拾ったものをＴＡＢＬＥ－２～３に示す。ここではダムの基礎を剛体として固有値解析を行った結果についても合わせて記述している。

なお，ＣＡＳＥ２のフーリエ・スペクトルからは、際立った２次以上のモードは読みとれないので、１次の固有周期を拾うことに止めている。また、剛基礎と弾性基礎の固有周期の比率を逸散減衰の定数に換算した結果を備考欄に示している。

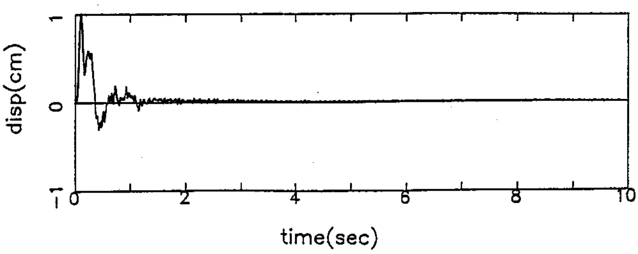
これらの結果から、剛基礎と弾性基礎による固有周期の違いはインピーダンス比に大きく影響を受け、インピーダンス比が大きい程、固有周期は弾性基礎で長くなることが分かる。しかし、この固有周期の伸びを減衰定数に換算すると、減衰定数は非常に大きくなり、現実的な値ではなくなるように思われる。弾性基礎における固有周期の伸びは基礎より下の半無限領域の自由振動モードも寄与するものと考えられ、逸散減衰のメカニズムが複雑であると考えることもできる。

５．インパルス応答から求められる逸散減衰

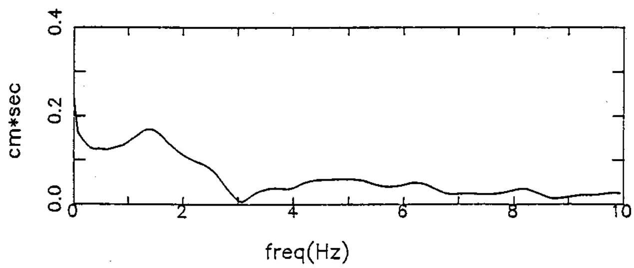
インパルス応答の時刻歴から、逸散減衰を定量的に評価するために、まず時刻歴の極大値を片対数図上にプロットし、最小二乗法でこれらの極大値を通過する直線を定める。そして、この直線の傾きから逸散減衰の定数を定めることを考える。変位時刻歴に対してこのような操作を加えた結果を

ＴＡＢＬＥ－１　解析ケース

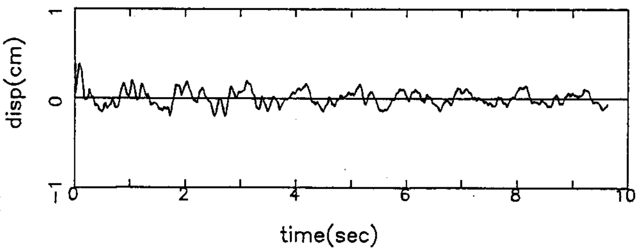
解析ケース	ダムのせん断波速度（ｍ／ｓ）	基礎のせん断波速度（ｍ／ｓ）	ダムと基礎のインピーダンス比
１	３００		０．３
２	５００	１０００	０．５
３	３００		０．１５
４	５００	２０００	０．２５
５	３００		０．１０
６	５００	３０００	０．１７



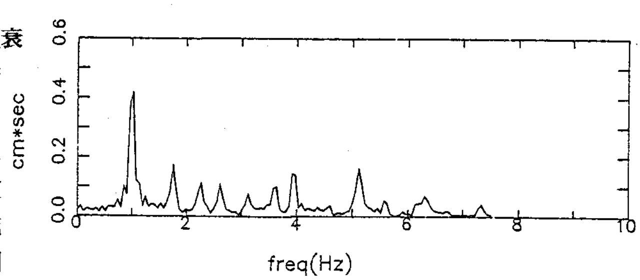
ＦＩＧ－２　時刻歴（ＣＡＳＥ２）



ＦＩＧ－３　フーリエ・スペクトル（ＣＡＳＥ２）



ＦＩＧ－４　時刻歴（ＣＡＳＥ５）



ＦＩＧ－５　フーリエ・スペクトル（ＣＡＳＥ５）

ＦＩＧ－６～７に示す。また、この直線の傾きから求められた減衰定数をＴＡＢＬＥ－４に示す。この方法で得られた値は１次モードから高次のモードまでを含めた平均的な値であるが、前述の固有周期の比率から換算した減衰定数よりはるかに小さな値であることがわかる。

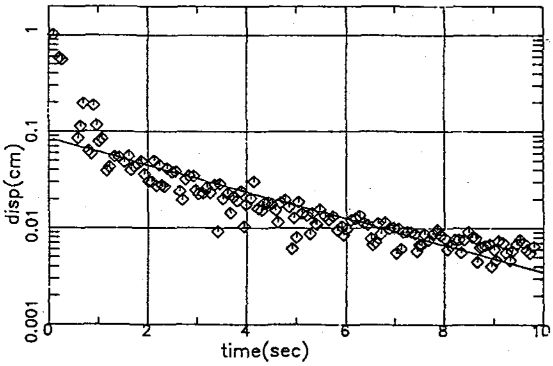
６．おわりに

時間領域ＦＥ－ＢＥ法によって、フィルダムのインパルス応答解析を行い、時刻歴とそのスペクトルからフィルダムの基本的な振動性状を検討した。各次の固有振動モードに対する逸散減衰の定量評価や逸散減衰のメカニズムを工学的に解明することが今後の課題である。

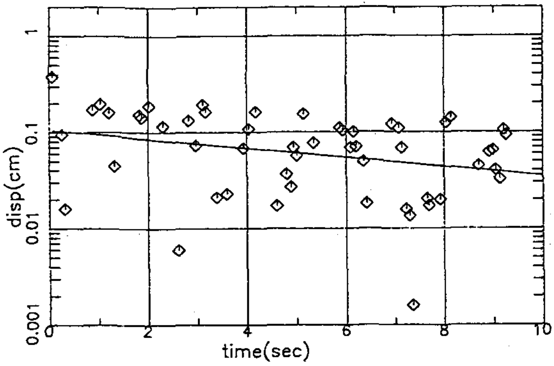
参考文献

１）東平　吉田　「時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析」
１９８８　　構造工学論文集　ＶＯＬ３４Ａ　　ｐｐ８６５～８７５

２）東平　吉田　「時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析」
土木学会論文集　　投稿中



ＦＩＧ－６　　逸散減衰定数の算定（ＣＡＳＥ２）



ＦＩＧ－７　　逸散減衰定数の算定（ＣＡＳＥ５）

ＴＡＢＬＥ－２　固有周期（１次モード）

解析ケース	ダムと基礎のインピーダンス比	固有周期（ｓｅｃ） 剛基礎 Ｔｒ	弾性基礎 Ｔｅ	固有周期の比率 Ｔｒ／Ｔｅ	備考 周期比率から求めた減衰定数
１	０．３０	０．９７	１．２１	０．８０	０．６０
２	０．５０	０．５８	０．７８	０．７４	０．６７
３	０．１５	０．９７	１．１１	０．８７	０．４９
４	０．２５	０．５８	０．６３	０．９２	０．３９
５	０．１０	０．９７	０．９８	０．９９	０．１４
６	０．１７	０．５８	０．６１	０．９５	０．３１

ＴＡＢＬＥ－３　固有周期（２次モード）

解析ケース	ダムと基礎のインピーダンス比	固有周期（ｓｅｃ） 剛基礎 Ｔｒ	弾性基礎 Ｔｅ	固有周期の比率 Ｔｒ／Ｔｅ	備考 周期比率から求めた減衰定数
１	０．３０	０．５３	０．６３	０．８４	０．５４
２	０．５０	０．３２	——	——	——
３	０．１５	０．５３	０．６０	０．８８	０．４７
４	０．２５	０．３２	０．３５	０．９１	０．４１
５	０．１０	０．５３	０．５７	０．９３	０．３７
６	０．１７	０．３２	０．３５	０．９１	０．４１

ＴＡＢＬＥ－４　最小二乗法から求められる減衰定数

解析ケース	ダムと基礎のインピーダンス比	減衰定数
１	０．３０	０．０８
２	０．５０	０．０６
３	０．１５	０．０３
４	０．２５	０．０７
５	０．１０	０．０２
６	０．１７	０．０４