(90) 半無限弾性体と弾性円板の動的相互作用の定式方法の考察

東京大学地震研究所　東原紘道

1.　はじめに

半無限弾性体と円板の動的相互作用の解析的な研究は、当初は剛体円板についてなされてきたが、そこで開発された解法はやがて弾性板に拡張された。これらの解法はすべて次のような手順に従っている。

(1)　調和振動に着目して、周波数領域で計算を進める。

(2)　変位および応力を、共通の未知関数の積分変換として表示する。この積分は波数領域の（０，∞）にわたり、積分核はベッセル関数である（このような表現が可能ということ自体が半無限体中の弾性波動の際だった特徴である）。

(3)　弾性体表面における境界条件を課する。このうち自由表面における応力なしの条件は確定している。しかし接触面における変位および応力については種々の扱いがある。特に鉛直振動の場合には、応力の緩和条件（接触面が自由にすべるものとする）が簡便でしかも適合性もよいのでよく用いられる。

これらの原則に基づいて剛体円板を解析する統一的な手法としては、Dual Integral Equations 法（以下ではデュアル法と略称する）がよく知られている。のみならずこの手法はある種の弾性円板にも適用されている [1,2]。 しかし以下で見るように、これらの方法は、

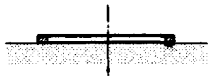
(1)　円板の質量密度および曲げ剛性が一定であること（特にIguchi and Luco　にあっては質量そのものが考慮されない）、

(2)　円板の一部は剛体でなければならないこと（右図の斜線部分）、

(3)　しかも外力は弾性部に作用してはならないこと、

などの制約をもっており、全体が弾性的な板には適用できないなど明らかに一般性に欠ける。そこで本論文の第３章においてこれらの解法を詳細に点検して、なるべく普遍的な記述を試みる。そしてそれによってこれらの方法の限界およびその由来を明らかにする。

Linの問題



Iguchiらの問題

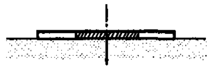


図１　既往の問題

他方、筆者らは同様に上述の原則に則りつつ、デュアル法とは異なる（そしておそらくはより強力な）積分方程式を導いた。デュアル法が、技巧的に導入されたある未知量に関する第二種フレドホルム型積分方程式に至るのに対し、これは接触面の変位と応力を結びつける第一種フレドホルム型積分方程式に至る。そこでこれを直接積分方程式法と呼ぶ。この方法によれば、上記のデュアル法の拡張に見られるような制限を受けることなく、弾性円板の一般的な解法を構築することができる。これを第４章において示す。またこれらの解法の準備として、半無限弾性体の基本的な公式を第２章で要約する。

2．半無限弾性体の基本公式

円板の鉛直変位を $w(r)\exp(i\omega t)\cos(m\theta)$ と書く。ただし $m=0,1$ である。

(1) 境界条件

半無限弾性体の境界条件は以下のとおりである。

①　自由表面においてはすべての応力成分が０である。

②　接触面におけるせん断応力は近似的に０とする。

③　接触面における鉛直方向の変位と応力の適合関係。

最後の条件は円板の運動方程式によって与えられるものであって、

$$R^2\nabla^2(D\nabla^2)w(r)=\rho_1 h\omega^2 w(r)+\sigma(r)+Q(r) \tag{1}$$

ここに R、D、ρ_1、h はそれぞれ円板の半径、曲げ剛性、質量密度、板厚であり、Q(r)は外力の面密度である。またσは半無限弾性体からの反力である。さらに次のような演算子記号を用いている。

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}$$

(2) 応答の積分表示

弾性体の運動方程式および上の条件 ①、② により、表面における変位と応力は次のように表現できる。

$$w(r) = b^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{F(k)} \Psi(k) J_m(kr) dk \tag{2}$$

$$\sigma(r) = \mu \int_0^\infty \Psi(k) J_m(kr) dk \tag{3}$$

ここに $F(x)=(2x^2-b^2)^2-4x^2\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-b^2}$, $a^2=\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)$, $b^2=\rho\omega^2/\mu$, (4)

さらに ωは振動数、λとμはラメの定数である。

式(1),(3) より次式を得る。

$$R^3\nabla^2(D\nabla^2)w(r) = \int_0^\infty A_0(k)\Psi(k)J_m(kr)dk + Q(r) \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \leqq r < R \tag{5}$$

ここに $A_0(k) = \mu R^3 \left[1 + \dfrac{\rho_1 h}{\rho R} \dfrac{\sqrt{k^2-a^2}}{R^3 F(k)} \xi^4\right]$ (6)

$$\int_0^\infty \Psi(k)J_m(kr)dk = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R<r \tag{7}$$

したがって問題は、式(5),(7)を満足するような関数$\Psi(k)$を求めることである。

3．デュアル積分方程式法

w(r) を、剛体としての変位 $w_m(r)$と弾性的変形 $w_e(r)$に分解する。

$$w(r)= w_m(r)+w_e(r), \quad ただし \quad w_m=\Delta_m(r/R)^m \tag{8}$$

ここで未知量は $\{\Delta_m, w_e(r)\}$ である。以下では専ら板の曲げ剛性および質量密度が一定の場合を考えると、

$$R^3\nabla^4 w_e(r) = \int_0^\infty A(k)(k)J_m(kr)dk + q(r) \tag{9}$$

ここに $A(k) = \alpha \left[1 + \dfrac{\rho_1 h}{\rho R} \dfrac{\sqrt{k^2-a^2}}{R^3 F(k)} \xi^4\right]$ (10)

ただし$\alpha=\mu R^3/D$ は地盤と弾性板の剛性の比率を表す無次元数、$q=QR^3/D$ は無次元化された外力であり、また $\xi=R\omega/V_s$ は無次元化された振動数である。

ここで式(9) について解く。これはオイラー型であるので同次解は簡単に見つけることができて、

m=0 のとき $c_1+c_2r^2+c_3\log(r)+c_4r^2\log(r)$, m=1 のとき $c_1r+c_2r^3+c_3/r+c_4r\log(r)$ となる。

ここに c_1～c_4は積分定数であって、弾性板の境界条件から決定される。

非同次解のうち右辺の積分項に対応する特解は次のような形をしている。

$$\int_0^\infty A(k)\Psi(k)\frac{J_m(kr)}{k^4}dk$$

この項は$k\downarrow 0$のときに特異になるが、上記の同次解を適当に付加することによって、それを除去できる。

外力に対応する特解を解析的に求めることは一般的にはできないが、やはりオイラー型の性質により、多項式の外力に対してはやはり多項式型の特解が得られるので、これをw_qと書く。

次に境界条件を考える。弾性板が中心点を含むときは r=0 における変位の正則性により、同次解の後2項は消える。また弾性板の端部には2個の境界条件があるので、同次解に含まれる積分定数はすべて定まる。

ところが板が剛体部分を含まないときには同次解には不定性が残り、しかもその代わりに未知関数に拘束条件が課せられる結果となり、これを解くことはほとんど不可能になる。この意味において板の一部が剛体であるということは、この解法にとって不可欠の条件と言うことができる。
同次解が適切に定まる場合には次のような形の解が得られる。

$$w_e(r)=\int_0^\infty A(k)\Psi(k)W_m(r,k)dk+w_q(r) \tag{11}$$

ここで $W_m(r,k)$ および $w_q(r)$ は既知関数である。前者はベッセル関数およびその導関数を含んでいる。これは $k\uparrow\infty$ において十分に速く減少するので、上式の積分はたしかに収束する。
以上をまとめると次のような積分方程式を得る。

$$\int_0^\infty [b^2\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{F(k)}J_m(kr)-A(k)W_m(r,k)]\Psi(k)dk=w_m(r)+w_q(r)\ \ ....0\leqq r<R \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \Psi(k)J_m(kr)dk=0\ \ ....R<r \tag{7}$$

ここで次の関係によって新たに未知関数 $\psi_m(x)$ を導入する。

$$\Psi(k)=k\int_0^R \psi_m(s)e_m(ks)ds \tag{13}$$

ただし表示を簡単にするために、$\cos(x)=e_1(x)$, $\sin(x)=e_2(x)$ と書いた。
式(13)のポイントは、自由表面の条件(7)を自動的に満足する形になっていることである。この結果、問題は ψ_m に対する単独の方程式に還元される。

$$\int_0^R K_m(r;s)\psi_m(s)ds=w_m(r)+w_q(r) \tag{14}$$

ここに

$$K_m(r;s)=-\frac{1-\nu}{\sqrt{r^2-t^2}}H(r-s)+\int_0^\infty k[(b^2\frac{\sqrt{k^2-a^2}}{F(k)}+\frac{1-\nu}{k})J_m(kr)-A(k)W_m(r,k)]e_m(ks)dk \tag{15}$$

ただし H はヘビサイド関数である。式(15)を数値計算することは困難ではない。しかし狭義のデュアル法はここで Noble の方法を適用して、式(15)の代わりに次のような第二種フレドホルム型積分方程式を得る[3]。

$$\psi_m(r)+\int_0^R G_m(r;s)\psi_m(s)ds=-\frac{\pi(m+1)}{2(1-\nu)}w_m(r)-\frac{\pi}{2r^m}\frac{d}{dr}\int_0^r\frac{t^{m+1}}{\sqrt{r^2-t^2}}w_q(t)dt \tag{16}$$

ここに

$$G_m(r,s)=\int_0^\infty\{\frac{2}{\pi}[-1-\frac{b^2}{(1-\nu)}\frac{k\sqrt{k^2-a^2}}{F(k)}]e_m(kr)e_m(ks)+\frac{kA(k)e_m(ks)}{(1-\nu)r^m}\frac{d}{dr}\int_0^r\frac{t^{m+1}W_m(t,k)}{\sqrt{r^2-t^2}}dt\}dk \tag{17}$$

式(17)の積分および式(18)の内側の積分は解析的に実行できる。しかし外側の積分は数値計算を必要とする。このように弾性体部分に外力が作用する場合であっても、方程式そのものの計算は実行可能である。しかし式(16)の右辺第1項は、不定のパラメータである Δ_m を含んでいる。外力項がない場合には、変位および応力のすべてがこのパラメータに比例するために、これらの量の比率で定義されるコンプライアンス関数の計算の際には、このパラメータの不定性は表面化しない。しかし外力項が存在する場合には、Δ_m も決定されなければならなくなる。この計算は原理的には不可能ではないが、既往の方法よりも相当めんどうになる。したがって、外力は剛体部分にのみ作用するという制限は、板の一部が剛体であるという制限ほどには本質的ではないものの、実際上は取り去ることは困難である。
第二種フレドホルム型方程式は、解の存在条件が比較的によく知られていること、および積分核が十分に小さいときには、逐次近似法によって簡単に計算できるなどの利点をもっている。しかし計算機を前提した本格的な離散化を行うかぎり（事実、デュアル法においては差分法が使われているようである）、特に式(14)のような第一種フレドホルム型方程式よりも本質的に有利なことはない。

3．直接積分方程式法

直接積分方程式の原理は、式(12)の段階から適用することが可能である。しかしそのようなアプローチをとったのでは、上述のデュアル法と同様に一様な円板しか扱うことができない。任意の軸対称な弾性円板に対応できる計算手法を見いだすためには離散化した形の計算を進める必要があり、そのためには、半無限弾性体の剛性関係を、円板の運動方程式とは独立に定式化しておく必要がある。これは直接積分方程式によって既に実行されている。

(1) 半無限弾性体の剛性関係

式(2),(3)により次のような積分方程式が得られる[4,5]。

$$w(r)=\frac{1}{\mu}\int_{0}^{R} sW_m(r;s)\sigma(s)ds \tag{18}$$

ただし

$$W_m(r;s)=b^2\left[I_m-\frac{1}{\pi r(b^2-a^2)}K_m(s/r)\right] \tag{19}$$

$$I_m=\int_a^b\frac{k\sqrt{k^2-a^2}}{[F_1(k)]^2+[F_2(k)]^2}F_2(k)H_m(kr,ks)dk+\int_0^a\frac{k\sqrt{a^2-k^2}}{F_1(k)+F_2(k)}H_m(kr,ks)dk \tag{20}$$

$$-\pi\frac{\kappa\sqrt{\kappa^2-a^2}}{F'(\kappa)}H_m(\kappa r,\kappa s)$$

ここに K_m は一般化された楕円積分、H_m は複素数値の特殊関数であって、予め数値データは与えられている。

(2) 離散化

適当な内挿関数を定め、これを$\{\phi_j\}$とする。円板の変位を次のように表す。

$$w(r)=\Sigma x_j\phi_j(r)$$

これを円板の運動方程式(2)に代入する。ただしここでは、曲げ剛性D、質量密度ρ_1および板厚hは変化しても差し支えない。同様にして、外力および反力の内挿関数を$\{\chi_j\}$とすれば、次のような、運動方程式の離散的表示が得られる。

$$([K]-\omega^2[M])\{x\}=[X]\{q\}+[X]\{\sigma\} \tag{21}$$

$$[\Phi]\{x\}=[W]\{\sigma\} \tag{22}$$

ここに $[K]$と$[M]$はそれぞれ剛性マトリクスと質量マトリクスである。また $\Phi_{ij}=(\phi_i,\phi_j)$, $X=(\phi_i,\chi_j)$, $W_{ij}=(\phi_i(r),sW_m(r;s)\chi_j(s))$ であって、その内積は円板全体上で取るものとする。

ここで$\{\sigma\}$を消去することにより次のような連立一次方程式が得られる。そこでこれを解けばよい。

$$([K]-\omega^2[M]-[X][W]^{-1}[\Phi])\{x\}=[X]\{q\} \tag{23}$$

5．参考文献

[1] Lin,Y.J.,Dynamic response of circular plates resting on viscoelastic half space, Journal of Applied Mechanics,ASME,Vol.45,pp.379-384,1978

[2] Iguchi,M. and Luco,J.E., Vibration of flexible plate on viscoelastic medium, Journal of Engineering Mechanics,ASCE,Vol.108,No.EM6,pp.1103-1120,1982

[3] Noble,B., The solution of bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method,Proc.Camb.Phil.Soc.,59,pp.351-362,1963

[4] 東原紘道，半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題－その１．軸対称鉛直振動，日本建築学会構造系論文報告集，第349号，pp.50-58，1985

[5] 東原紘道，半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題－その２、鉛直高次モード，日本建築学会構造系論文報告集，第371号，pp.39-43，1987